

О. И. ГУСЬКОВ

П. Н. КУШНАРЕВ С. М. ТАРАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

СБОРНИК
ЗАДАЧ



ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

О.И. ГУСЬКОВ
П.И. КУШНАРЕВ С.М. ТАРАНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ

СБОРНИК
ЗАДАЧ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве
учебного пособия для студентов
геологических специальностей вузов*



МОСКВА "НЕДРА" 1991

Рецензенты: кафедра месторождений полезных ископаемых и их разведки
Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, д-р геол.-минер. наук
А.В. Канцель

Курс "Математические методы в геологии" включен в типовой учебный план специальности 0801 "Геологическая съемка, поиски и разведка месторождений полезных ископаемых" с 1983 г. Он знакомит будущих инженеров-геологов с теоретическими положениями, на которых основано применение математических методов при описании геологических объектов, а также с практическими приемами решения математическими методами задач, возникающих в процессе геологических исследований и при проведении геологоразведочных работ. Прикладной характер данного курса во многом определяет его структуру. Основные его положения и наиболее типичные задачи более подробно разбираются во время лабораторных занятий на конкретном геологическом материале. Изучение данной дисциплины предусмотрено учебным планом на пятом семестре после завершения курсов "Высшая математика", "Вычислительная математика и программирование", "Общая геология", "Кристаллография и кристаллохимия", "Минералогия", "Историческая геология", "Структурная геология, геокартирование и дистанционные методы исследования". Параллельно студенты изучают курсы "Петрография", "Геоморфология и четвертичная геология". Этот курс предшествует изучению курсов "Поиски и разведка месторождений полезных ископаемых" и "Месторождения полезных ископаемых". Это обстоятельство учитывалось при выборе типов геологических задач, включенных в сборник. Авторы отдавали предпочтение задачам из тех дисциплин, которые были изучены студентами в предшествующий период. Однако, поскольку полученные при изучении данного курса знания должны использоваться студентами и в последующие годы при прохождении специальных дисциплин, в числе задач рассматриваются и некоторые примеры из области поисков и разведки месторождений полезных ископаемых. В этих случаях дается более развернутая формулировка геологической задачи.

Задачи приведены в порядке очередности их решения на лабораторных занятиях, которая согласуется с изложением теоретической части курса на лекциях. Они основаны на фактическом материале, полученном при изучении реальных геологических объектов. В процессе их решения студенты знакомятся с областью применения различных математических методов в геологии, особенностями геологической информации, факторами, влияющими на выбор типа геолого-математических моделей. Большинство задач имеет комплексный характер. Решение общей геологической задачи в этом случае базируется на решении частных задач. Для выполнения таких заданий формируются бригады из 8–12 студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет частную задачу, получая при этом навыки использования тех или иных математических методов. Вы-

воды по общей содержательной задаче формулируются совместно членами бригады при обсуждении полученных ими результатов и активном участии преподавателя. Опыт проведения лабораторных занятий по данному курсу в МГРИ показал, что такой принцип выполнения заданий способствует повышению активности студентов и развивает у них навыки творческого общения. Количество вариантов частных задач в большинстве случаев соответствует числу студентов в учебной подгруппе.

В учебном плане МГРИ по данной дисциплине предусмотрено выполнение курсовой работы. Примеры заданий по курсовым работам приведены в разд. 6.

Ко времени изучения данной дисциплины студенты должны владеть навыками программирования и работы на персональных ЭВМ типа ДВК или "Электроника-60". В МГРИ составлены комплексные программы, позволяющие выполнять расчетные операции и графические построения, предусмотренные заданиями. Программы обеспечивают работу в различных режимах. При наличии в вузе класса персональных ЭВМ или дисплейных комплексов на базе мини-ЭВМ типа СМ-2 или СМ-4 студенты могут работать с ЭВМ в диалоговом режиме, анализируя промежуточные результаты, выводя их на дисплей в виде таблиц и графиков. Краткое описание этих программ приведено в прил. 16.

Навыки, полученные при изучении данного курса, студенты будут реализовывать на старших курсах при выполнении курсовых проектов по профилирующим дисциплинам и составлении дипломного проекта.

При подготовке сборника задач учтен многолетний опыт проведения лабораторных занятий по курсам "Математические методы в геологии" и "Основы геолого-математического моделирования", которые преподаются в МГРИ с 1973 г.

Авторами были учтены ценные советы и критические замечания коллег по кафедре Методика поисков и разведки месторождений полезных ископаемых МГРИ — проф. А.Б. Каждана, доцентов Е.А. Сидоркова, В.И. Пахомова и В.Г. Будрика, а также д-ра геол.-минер. наук А.В. Канцеля и доцента Б.Н. Науменко. Задача 4.1 составлена при участии В.И. Пахомова. При составлении некоторых задач использованы исходные данные С.Н. Иванова и Лаваут Копа Уальдо Дамиани.

Раздел 1

ОДНОМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ЗАДАЧА 1.1

Предварительный анализ химического состава коры выветривания на месторождениях никеля

Месторождение силикатного никеля приурочено к латеритной коре выветривания ультрамафитов. По минеральному составу и текстурным особенностям в вертикальном разрезе коры выветривания сверху вниз выделяются шесть зон:

- 1) железистых стяжений;
- 2) бесструктурных охр;
- 3) конечных структурных охр;
- 4) структурных полуохр;
- 5) выщелоченных материнских пород;
- 6) дезинтегрированных материнских пород.

Для изучения химического состава коры выветривания и поведения различных химических элементов в процессе корообразования по четырем месторождениям из каждой зоны были отобраны пробы, по которым выполнены анализы на Fe_2O_3 , FeO , NiO , CoO , SiO_2 , MgO , Al_2O_3 и Cr_2O_3 (табл. 1–6).

Требуется:

- 1) выявить отличительные особенности химического состава коры выветривания разных месторождений;
- 2) выявить отличительные особенности химического состава различных зон;
- 3) установить характер поведения различных химических элементов в процессе корообразования;
- 4) выделить ассоциации химических элементов, сходных по характеру поведения в процессе корообразования.

Задание выполняется бригадой из восьми студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет пункты 1–3 по одному из химических элементов. Пункт 4 выполняется совместно членами бригады.

Методические указания

1. Для выявления различий химического состава коры выветривания на разных месторождениях необходимо результаты анализов на каждый химический элемент по каждой зоне отдельного месторождения представить в виде, удобном для сравнения. Исходные данные (см. табл. 1–6) можно записать в виде числовых диаграмм "стебель с листья-

Таблица 1

Результаты анализов проб из зоны железистых стяжений

№ пробы	Содержание, %								Место-рожде-ние
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	56,26	0,21	0,35	0,089	6,73	2,85	14,45	2,70	I
2	57,20	0,31	0,38	0,073	7,91	0,95	15,99	2,24	
3	61,06	0,26	0,50	0,013	4,40	0,80	14,14	2,80	
4	58,63	0,51	0,29	0,027	5,28	1,10	14,17	3,28	
5	66,78	0,10	1,19	0,155	3,03	0,45	11,93	2,36	II
6	70,50	0,21	0,93	0,082	2,71	0,60	8,55	2,78	
7	54,63	0,15	0,77	0,127	9,87	0,30	18,33	1,51	
8	59,72	0,31	0,47	0,022	2,94	0,40	18,54	2,65	
9	60,46	0,41	0,47	0,022	3,18	0,45	18,70	2,46	
10	69,92	0,26	0,55	0,130	6,98	0,35	9,09	2,78	
11	66,75	0,41	0,54	0,022	1,41	0,25	15,54	2,99	
12	64,26	0,21	0,94	0,076	1,79	0,32	13,17	2,88	
13	67,69	0,43	1,05	0,138	1,96	0,68	12,64	1,85	III
14	68,33	0,41	1,37	0,015	2,40	0,67	10,87	2,63	
15	65,35	0,22	1,42	0,105	2,24	0,77	12,27	2,69	
16	67,67	0,41	1,62	0,212	5,11	2,34	8,00	2,11	
17	61,44	0,55	1,00	0,038	1,60	0,58	17,14	5,97	
18	68,30	0,13	0,88	0,022	1,92	0,57	13,72	1,71	
19	67,40	0,22	1,00	0,070	2,42	0,57	13,10	1,98	
20	67,17	0,22	1,10	0,035	2,18	0,46	11,78	2,33	
21	60,60	0,29	1,05	0,080	6,56	1,49	14,61	1,82	
22	66,10	0,49	1,00	0,032	1,98	0,94	12,41	2,12	
23	65,17	0,36	1,00	0,057	2,48	1,19	13,31	2,13	
24	65,92	0,29	0,69	0,046	1,70	0,56	15,46	1,71	
25	62,02	0,22	0,52	0,024	1,98	0,41	19,10	1,34	
26	66,71	0,29	0,74	0,059	2,22	0,61	14,27	1,48	
27	62,45	0,16	0,86	0,025	2,26	0,86	16,86	1,16	
28	63,63	0,25	0,92	0,040	3,06	0,82	13,64	1,62	
29	59,29	0,43	0,52	0,015	1,28	0,38	19,83	2,18	
30	64,32	0,41	0,45	0,015	3,25	0,53	14,60	2,29	
31	65,68	0,22	0,65	0,043	2,19	0,72	14,72	2,09	
32	68,02	0,29	0,67	0,034	1,50	0,67	13,20	2,09	
33	67,61	0,29	0,68	0,060	1,88	0,31	14,50	1,62	
34	58,62	0,65	0,95	0,063	5,89	0,67	15,29	1,78	
35	67,24	0,11	0,56	0,040	1,83	0,74	13,29	2,08	
36	58,91	0,29	0,55	0,034	1,78	0,57	19,60	1,65	
37	60,49	0,72	0,62	0,067	5,87	0,56	16,40	1,67	
38	45,49	0,50	0,77	0,148	4,02	1,95	25,63	1,98	
39	64,91	0,65	1,06	0,024	2,12	0,82	13,50	1,62	
40	68,33	0,15	2,74	0,082	2,77	0,85	11,87	2,74	IV
41	65,01	0,15	0,43	0,034	1,05	0,79	16,24	2,20	
42	66,57	0,25	1,73	0,106	2,37	1,86	9,41	4,94	

Продолжение табл. 1

№ пробы	Содержание, %								Место-рожде-ние
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
43	65,25	0,22	0,69	0,021	1,81	0,46	13,83	2,15	IV
44	68,10	0,12	0,68	0,025	1,74	0,08	13,48	2,12	
45	68,38	0,11	0,68	0,044	1,70	0,38	11,50	2,66	
46	69,87	0,18	0,64	0,312	1,73	0,34	10,84	2,47	
47	69,93	0,11	0,67	0,044	2,83	0,92	10,04	2,58	
48	69,05	0,14	0,64	0,096	1,60	0,77	11,67	2,75	
49	69,04	0,29	0,74	0,063	1,75	0,98	10,19	3,06	
50	69,59	0,36	0,68	0,080	2,57	0,72	9,59	2,24	
51	67,83	0,22	0,76	0,015	1,57	0,44	11,98	2,84	
52	65,76	0,14	0,64	0,057	1,57	0,67	13,48	2,12	
53	62,38	0,36	0,59	0,031	2,71	0,31	15,25	1,99	
54	64,61	0,04	0,69	0,055	2,10	0,84	15,37	2,52	
55	72,10	0,20	0,46	0,009	1,62	0,50	10,92	2,72	
56	70,73	0,20	0,40	0,012	1,08	0,64	10,88	2,33	
57	72,28	0,32	0,57	0,017	1,68	0,44	10,09	2,59	
58	66,85	0,32	0,46	0,017	2,07	1,66	12,29	2,95	
59	65,21	0,25	0,52	0,049	2,05	0,85	14,16	2,37	
60	69,83	0,22	0,99	0,027	1,96	0,82	9,13	2,51	
61	68,15	0,20	0,96	0,050	2,12	0,16	11,61	2,49	
62	71,44	0,25	1,01	0,080	2,02	0,66	7,52	2,40	
63	72,22	0,11	1,10	0,007	2,11	1,00	6,76	2,67	
64	70,21	0,22	1,06	0,030	1,92	0,35	9,67	2,71	
65	67,29	0,92	0,69	0,006	2,25	0,64	9,55	3,37	
66	69,69	0,22	1,18	0,046	2,49	0,64	9,63	2,42	
67	67,29	0,92	0,69	0,006	2,25	0,64	9,55	3,37	

Таблица 2

Результаты анализов проб из зоны бесструктурных охр

№ пробы	Содержание, %							Место-рожде-ние
	Fe ₂ O ₃	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	68,78	1,65	0,200	2,30	0,75	10,62	2,36	I
2	71,21	1,36	0,046	3,27	1,05	6,26	2,97	
3	63,81	1,06	0,143	7,92	1,25	10,05	2,34	
4	65,49	1,44	0,255	4,21	1,00	10,35	2,19	
5	70,04	1,35	0,028	1,97	0,75	7,63	3,53	
6	70,13	1,12	0,016	3,09	1,75	6,81	2,81	
7	70,38	1,10	0,095	2,00	1,05	7,55	2,69	
8	65,32	1,85	0,240	4,75	2,60	7,79	2,79	II
9	66,03	1,23	0,267	4,85	2,17	8,48	3,07	
10	61,71	1,02	0,033	3,42	0,57	16,44	0,20	

Продолжение табл. 2

№ пробы	Содержание, %							Место- рожде- ние
	Fe ₂ O ₃	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
11	55,43	1,17	0,066	3,97	0,28	6,85	1,49	II
12	71,99	1,39	0,155	1,70	0,90	7,58	2,92	
13	69,06	1,31	0,177	3,45	1,83	7,34	2,72	
14	66,72	1,13	0,083	3,14	1,19	10,12	3,11	
15	66,63	0,94	0,123	4,22	1,68	9,08	2,12	
16	66,44	1,52	0,190	4,32	2,71	7,82	2,34	
17	69,18	1,70	0,330	2,19	1,15	7,63	3,18	
18	67,49	1,23	0,128	2,05	0,93	9,89	2,62	
19	67,67	1,56	0,148	2,06	1,06	9,81	2,18	
20	63,20	1,23	0,034	5,08	2,21	9,63	2,72	
21	59,20	1,02	0,024	1,94	0,77	17,82	2,08	
22	67,86	1,14	0,180	2,12	0,87	10,37	2,33	
23	67,54	1,02	0,234	2,07	0,98	10,34	2,67	
24	68,02	1,06	0,040	3,10	0,08	8,60	3,05	
25	67,95	0,83	0,152	3,27	0,46	11,31	1,94	
26	54,96	0,95	0,139	1,93	0,51	20,74	1,70	
27	65,11	1,04	0,054	5,35	1,69	9,81	2,36	
28	68,69	1,18	0,031	2,51	1,50	8,11	3,21	
29	64,93	0,76	0,034	2,00	0,36	11,66	2,01	
30	66,36	0,86	0,060	1,98	0,52	12,95	2,01	
31	66,38	0,80	0,060	3,32	0,37	11,59	2,57	
32	64,81	0,78	0,027	3,55	0,75	12,71	2,50	
33	67,61	2,59	0,159	2,98	1,25	7,91	2,59	
34	63,98	3,13	0,233	5,47	1,25	9,65	3,13	
35	69,40	1,10	0,533	2,24	1,54	6,99	2,23	
36	72,88	1,27	0,047	1,68	0,61	6,92	3,16	
37	66,02	1,92	0,165	3,60	1,28	10,05	2,87	
38	62,84	0,98	0,037	2,65	0,80	14,29	2,55	
39	72,26	2,04	0,305	2,17	1,21	6,76	2,22	
40	65,03	2,01	0,231	2,13	0,77	12,32	2,67	
41	69,07	1,28	0,214	2,11	1,45	8,10	2,92	
42	57,61	1,67	0,096	11,82	7,01	5,24	2,31	
43	63,09	1,24	0,125	7,42	2,58	6,78	2,88	
44	70,75	1,02	0,125	2,50	0,77	7,63	2,15	
45	69,50	0,99	0,015	1,84	0,41	10,08	3,07	
46	70,02	1,05	0,241	2,52	1,03	7,48	2,30	
47	71,87	0,86	0,021	1,99	0,37	7,90	2,59	
48	68,67	1,00	0,050	2,02	0,46	10,58	2,20	
49	89,48	1,06	0,63	2,27	0,77	8,42	2,79	
50	69,51	1,05	0,017	2,30	0,40	9,68	2,59	
51	61,97	1,08	0,012	2,08	1,08	9,16	2,56	
52	65,83	0,77	0,183	2,15	1,13	10,89	2,84	
53	69,06	0,99	0,179	2,25	1,04	7,99	3,31	
54	70,87	0,93	0,034	1,77	0,90	8,86	2,94	

8

Продолжение табл. 2

№ пробы	Содержание, %							Место- рожде- ние
	Fe ₂ O ₃	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
55	69,54	0,99	0,057	2,23	0,74	8,18	2,84	IV
56	68,81	0,97	0,057	1,60	0,64	10,81	2,73	
57	60,42	0,96	0,135	2,41	1,27	7,12	2,95	
58	64,07	1,01	0,121	2,75	3,53	9,31	2,95	
59	70,57	1,19	0,113	1,44	1,33	8,91	2,63	
60	66,35	2,07	0,198	3,75	1,30	8,92	2,61	
61	66,89	1,07	0,138	2,13	0,57	10,71	2,37	
62	66,68	1,18	0,100	2,13	0,87	12,08	0,80	
63	62,75	1,14	0,127	11,68	0,60	8,75	1,82	
64	66,89	1,37	0,157	2,39	0,65	7,66	2,52	
65	62,38	0,44	0,062	3,57	1,30	12,50	3,28	
66	67,79	0,52	0,016	1,57	0,50	9,05	2,41	
67	64,69	1,57	0,127	5,71	3,10	6,90	2,10	

Т а б л и ц а 3

Результаты анализов проб из зоны конечных структурных охр

№ про- бы	Содержание, %								Место- рожде- ние
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	65,90	0,15	1,36	0,197	3,98	1,00	9,95	2,32	I
2	69,70	0,46	0,90	0,056	2,32	0,50	6,53	2,76	
3	61,01	0,31	1,35	0,320	6,32	2,60	6,94	2,03	
4	67,72	1,08	1,30	0,292	2,02	0,85	6,55	2,62	
5	59,60	0,41	0,66	0,085	6,37	2,85	10,88	3,11	
6	61,32	0,41	1,65	0,039	10,89	3,15	6,43	2,31	
7	61,92	0,26	2,69	0,076	11,26	2,70	4,54	2,06	
8	63,21	0,15	1,31	0,209	5,24	0,75	10,71	2,39	II
9	69,15	0,10	1,95	0,175	4,55	1,05	6,07	2,74	
10	64,96	0,87	1,78	0,121	5,15	2,25	7,05	3,15	
11	61,03	0,15	1,40	0,361	6,15	1,65	12,25	2,49	
12	62,61	0,15	0,84	0,085	4,51	0,90	11,38	4,96	
13	64,67	0,13	1,69	0,275	7,55	1,88	8,06	2,96	
14	56,69	0,34	1,31	0,135	12,08	4,96	7,90	2,53	
15	59,41	—	2,47	0,229	8,95	3,51	7,49	2,74	
16	61,59	—	1,41	0,167	11,00	1,31	6,86	3,02	
17	68,63	—	1,32	0,169	1,90	0,90	7,52	3,27	
18	61,41	—	1,88	0,141	12,20	1,23	5,94	2,49	
19	67,67	0,10	1,28	0,135	3,60	2,15	7,68	2,24	
20	68,27	—	1,45	0,153	2,60	0,73	8,94	2,96	
21	59,95	—	2,20	0,179	9,02	5,64	5,45	3,01	
22	53,46	0,15	2,47	0,127	13,96	7,64	6,62	1,83	

9

№ пробы	Содержание, %								Месторождение
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
23	68,06	0,26	2,08	0,656	3,29	2,75	7,12	2,40	III
24	64,88	0,25	1,18	0,193	2,53	1,77	12,28	3,02	
25	53,60	0,82	1,21	0,166	13,66	7,87	7,51	2,55	
26	67,01	0,56	1,83	0,239	5,12	2,02	6,87	3,65	
27	59,42	0,35	2,72	0,137	9,33	2,26	7,54	3,33	
28	61,47	0,25	3,14	0,117	9,72	3,68	4,87	2,77	
29	67,75	0,14	1,19	0,121	2,08	0,93	0,70	2,55	
30	68,89	0,29	1,18	0,121	3,60	1,44	7,42	3,04	
31	54,27	0,50	1,24	0,074	13,15	6,92	8,03	2,82	
32	62,52	0,36	1,84	0,015	5,18	2,17	10,85	3,21	
33	67,26	0,72	1,62	0,100	2,74	1,65	10,14	2,34	
34	65,38	0,36	1,09	0,148	4,90	3,41	9,40	2,32	
35	58,10	0,22	1,24	0,304	9,30	1,15	7,63	3,18	

36	67,55	0,21	2,94	0,255	3,36	1,15	8,23	2,94	IV
37	70,19	0,19	1,21	0,150	2,50	0,94	6,56	3,49	
38	72,36	0,45	1,08	0,183	1,98	1,21	6,70	2,32	
39	67,90	0,15	1,41	0,137	2,41	1,43	7,07	3,47	
40	71,64	0,34	1,42	0,127	2,31	1,35	6,04	2,35	
41	69,97	0,15	1,12	0,274	3,35	1,41	6,33	2,65	
42	67,55	0,25	2,20	0,239	4,22	1,45	7,88	3,04	
43	64,47	0,25	1,45	0,170	2,16	1,25	12,31	2,55	
44	67,54	0,22	1,15	0,283	7,00	2,17	7,00	3,12	
45	66,87	0,43	1,55	0,173	3,85	1,95	8,83	2,08	
46	63,97	0,22	1,52	0,180	6,04	3,92	7,04	2,85	
47	65,27	0,07	1,33	0,346	3,17	2,13	7,55	3,49	
48	69,73	0,43	1,13	0,180	2,34	0,68	7,80	2,94	
49	69,46	0,29	1,10	0,115	2,34	0,84	8,93	3,00	
50	66,78	0,04	1,02	0,096	2,80	1,37	9,32	3,35	
51	67,93	0,22	1,39	0,210	2,14	0,95	8,58	3,10	
52	68,19	0,14	1,18	0,171	2,66	0,75	8,44	3,01	
53	64,83	0,22	1,32	0,199	5,21	1,96	7,31	3,01	
54	58,33	0,14	1,13	0,115	12,01	6,07	5,77	2,67	
55	62,49	0,29	1,34	0,154	4,96	3,14	8,85	3,16	
56	63,49	0,04	1,69	1,142	7,15	3,53	7,17	2,72	
57	63,83	0,22	1,24	0,173	4,50	2,41	7,09	3,40	
58	64,95	0,12	1,32	0,157	4,74	2,77	8,00	2,98	
59	59,98	0,07	1,56	0,239	6,08	4,98	8,42	2,66	
60	66,79	0,25	1,33	0,49	2,37	1,10	7,87	2,75	
61	61,46	0,29	2,12	0,105	9,18	3,66	6,65	2,71	
62	62,17	0,29	1,61	0,177	4,66	3,15	9,45	2,78	
63	65,26	0,25	1,39	0,217	5,13	1,84	8,61	2,28	
64	66,89	0,15	2,19	0,169	4,17	1,64	7,67	1,28	
65	63,40	0,22	1,39	0,154	3,45	3,82	6,60	3,00	

Результаты анализов проб из зоны структурных полуохр

№ пробы	Содержание, %							Месторождение
	Fe ₂ O ₃	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	52,08	1,23	0,206	12,48	8,78	7,91	2,49	I
2	54,31	2,59	0,213	13,26	8,26	5,52	2,42	
3	48,85	3,63	0,078	18,99	7,72	4,32	0,24	
4	33,07	2,32	0,108	26,19	17,64	4,08	1,79	
5	32,08	1,17	0,091	24,20	18,25	8,08	1,58	
6	33,41	1,41	0,104	26,51	18,35	4,18	1,81	
7	28,18	1,16	0,067	27,04	19,68	7,13	1,72	
8	28,58	2,58	0,069	28,36	20,58	3,42	1,28	
9	32,17	2,09	0,059	26,10	19,54	3,98	1,68	
10	40,19	3,28	0,080	21,94	15,20	3,14	1,88	
11	27,51	1,50	0,045	37,86	12,92	5,10	1,23	
12	29,83	2,55	0,070	31,12	18,25	2,63	1,50	
13	26,18	0,75	0,166	22,94	17,52	14,62	1,09	II
14	24,59	2,00	0,056	32,90	19,23	6,41	1,01	
15	21,30	2,18	0,043	32,45	21,24	7,54	0,66	
16	22,91	2,09	0,049	31,67	24,36	3,42	0,86	
17	23,81	1,64	0,049	34,56	19,18	4,44	1,00	
18	36,45	2,46	0,088	23,97	18,58	3,11	2,46	
19	28,62	1,70	0,058	40,00	10,73	4,74	1,26	
20	32,63	1,40	0,060	28,27	17,36	4,89	1,92	
21	35,58	1,27	0,069	21,54	13,90	6,04	2,32	
22	45,96	2,05	0,089	10,32	12,05	4,63	2,81	
23	33,21	3,05	0,058	28,44	18,24	3,24	1,31	
24	26,77	2,43	0,052	27,11	16,42	11,18	1,52	
25	33,08	1,76	0,078	27,12	17,70	4,97	1,48	
26	36,47	1,42	0,076	26,01	15,40	5,29	1,88	
27	36,18	1,98	0,057	25,91	14,63	5,29	3,35	
28	25,85	1,82	0,110	31,59	17,69	6,97	1,35	
29	28,31	1,38	0,050	31,05	21,03	3,61	1,57	
30	31,18	1,81	0,046	27,10	19,89	5,16	1,63	III
31	24,95	1,29	0,046	27,29	22,05	8,04	1,61	
32	25,69	1,27	0,041	29,12	24,69	3,85	0,97	
33	25,95	1,04	0,044	29,10	8,18	16,44	1,80	
34	29,21	1,10	0,047	26,46	20,09	6,61	1,73	
35	27,33	1,05	0,023	30,39	18,69	6,29	1,26	
36	22,34	1,15	0,037	31,40	26,29	3,20	1,26	
37	33,01	1,55	0,029	23,79	14,67	10,03	1,65	
38	26,02	1,45	0,039	30,53	23,99	2,79	1,15	
39	18,16	1,47	0,038	34,51	24,88	5,83	0,95	
40	43,81	1,30	0,077	18,23	12,22	6,42	2,47	
41	27,24	0,96	0,037	26,25	20,88	8,86	1,25	
42	30,46	1,40	0,038	29,76	16,39	6,47	1,68	
43	26,74	1,12	0,040	30,56	21,81	3,72	1,89	

№ пробы	Содержание, %							Месторождение
	Fe ₂ O ₃	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
44	39,31	2,71	0,076	22,56	14,42	4,92	1,90	III
45	32,94	1,32	0,063	27,86	16,15	6,60	2,34	
46	42,92	1,56	0,085	16,36	8,00	14,64	1,09	IV
47	29,39	3,18	0,066	27,36	23,50	2,48	1,25	
48	36,38	1,12	0,072	23,91	19,03	3,72	1,68	
49	30,65	1,32	0,063	26,16	10,29	2,88	1,42	
50	34,97	1,05	0,063	21,21	15,58	11,58	1,39	
51	23,25	2,50	0,059	31,18	25,80	2,53	1,02	
52	36,72	1,13	0,080	23,27	19,12	3,38	1,77	
53	28,76	0,93	0,058	26,80	21,69	5,51	1,38	
54	35,75	1,75	0,062	22,88	16,76	6,72	0,25	
55	25,44	3,35	0,073	26,29	21,71	6,61	1,18	
56	29,12	1,14	0,070	27,45	23,41	3,26	0,85	
57	45,27	1,09	0,105	14,79	9,81	12,41	1,87	
58	41,04	1,48	0,060	10,92	14,10	6,32	2,10	
59	47,47	1,04	0,105	16,44	12,92	6,19	1,90	
60	33,04	1,42	0,161	25,45	19,07	5,25	1,44	
61	48,62	2,26	0,031	16,87	9,16	6,46	2,40	
62	22,82	1,59	0,031	29,56	14,84	14,94	0,71	
63	46,42	1,94	0,067	19,48	11,04	5,14	1,68	
64	22,69	1,98	0,038	32,23	25,38	2,34	1,27	
65	37,21	3,48	0,083	23,07	16,91	3,88	1,54	
66	37,88	2,56	0,069	23,66	12,03	7,14	1,99	
67	24,54	1,27	0,039	31,66	21,88	4,38	0,56	
68	49,16	1,71	0,070	6,43	7,61	6,43	1,82	
69	45,69	1,05	0,079	10,12	8,35	7,00	2,10	
70	41,36	1,96	0,136	22,19	7,50	7,47	1,22	
71	23,96	1,09	0,043	30,06	20,19	7,60	0,98	
72	27,95	1,32	0,063	28,67	17,75	6,86	0,94	
73	43,72	1,96	0,089	18,12	8,03	5,82	3,11	
74	41,28	1,28	0,052	25,43	13,52	2,91	1,40	
75	40,24	1,22	0,058	22,43	13,74	7,05	1,43	
76	48,36	0,68	0,062	17,62	3,90	9,83	2,17	
77	46,39	1,16	0,124	19,98	5,92	7,47	2,45	
78	32,04	1,82	0,062	30,88	13,22	5,79	0,91	
79	53,61	1,26	0,013	15,20	5,81	7,95	1,82	
80	27,15	1,02	0,073	27,92	24,58	3,35	1,20	

Результаты анализов проб из зоны выщелоченных материнских пород

№ пробы	Содержание, %								Месторождение
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	13,11	3,91	0,42	0,019	36,00	32,66	1,88	1,22	I
2	14,05	0,10	1,33	0,027	38,77	28,54	2,16	0,49	
3	20,28	1,70	1,22	0,037	33,44	27,69	2,51	0,94	
4	21,37	0,19	1,12	0,039	34,15	26,74	1,77	1,12	
5	13,16	1,03	1,82	0,022	36,87	31,19	2,16	0,54	II
6	15,44	0,57	2,67	0,022	38,01	26,66	2,46	0,61	
7	11,10	1,34	1,57	0,019	41,59	30,05	1,83	0,42	
8	14,04	0,62	2,37	0,022	33,97	29,54	1,54	0,68	
9	18,02	—	1,22	0,043	34,60	29,20	2,04	0,88	
10	19,02	—	1,37	0,038	33,71	27,58	2,02	0,86	
11	11,73	0,93	1,81	0,020	38,69	30,35	3,23	0,40	III
12	15,86	1,64	1,33	0,027	35,24	30,17	2,45	0,95	
13	11,08	1,87	1,51	0,020	37,47	32,60	1,46	0,76	
14	12,18	2,04	1,34	0,025	38,48	26,64	6,65	0,64	
15	16,07	1,88	1,59	0,030	38,15	24,51	4,56	0,98	
16	22,71	0,93	1,16	0,036	36,69	21,61	2,58	1,25	
17	17,63	1,51	0,96	0,030	36,50	23,63	8,31	1,07	
18	16,16	0,93	1,12	0,024	36,67	28,60	2,48	0,47	
19	15,20	0,86	1,62	0,031	37,78	27,95	3,53	0,77	
20	23,03	2,44	0,97	0,040	31,39	24,40	4,60	1,31	
21	16,11	1,72	0,88	0,030	35,55	25,83	5,58	0,80	
22	10,51	0,02	1,83	0,019	37,40	32,32	1,82	0,63	
23	9,47	1,40	2,63	0,018	38,95	31,83	1,32	0,62	IV
24	12,81	1,03	2,90	0,032	35,01	31,43	2,37	0,53	
25	16,53	1,26	1,45	0,020	36,15	25,71	3,17	0,51	
26	16,54	2,43	0,78	0,032	22,94	30,42	2,22	0,93	

Результаты анализов проб из зоны дезинтегрированных материнских пород

№ пробы	Содержание, %								Месторождение
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
1	5,95	2,73	0,27	0,090	37,52	38,96	0,92	0,40	I
2	5,79	2,16	0,41	0,013	38,96	38,22	0,66	0,36	
3	6,24	2,78	0,44	0,015	41,30	37,28	0,66	0,28	
4	5,09	3,04	0,32	0,013	38,21	39,18	0,39	0,28	

Продолжение табл. 6

№ пробы	Содержание, %								Месторождение
	Fe ₂ O ₃	FeO	NiO	CoO	SiO ₂	MgO	Al ₂ O ₃	Cr ₂ O ₃	
5	7,22	1,49	0,87	0,013	40,23	35,14	1,04	0,45	II
6	7,23	1,60	1,95	0,012	39,84	35,67	0,85	0,47	
7	8,24	0,57	1,06	0,019	40,73	34,43	1,17	0,34	
8	9,77	1,32	0,41	0,020	35,88	34,19	1,40	0,39	
9	5,74	3,78	0,94	0,018	39,23	34,59	2,55	0,50	III
10	2,41	0,77	0,17	0,013	30,15	26,72	1,52	0,50	
11	12,73	2,46	0,81	0,026	36,35	33,13	1,37	0,81	
12	8,95	1,28	3,18	0,016	39,69	31,10	1,44	0,51	IV
13	7,66	3,26	0,94	0,016	38,40	35,18	2,89	0,50	
14	3,74	2,25	0,46	0,016	30,28	27,47	1,63	0,50	
15	9,41	2,15	0,75	0,024	30,29	24,98	1,41	0,50	
16	7,49	3,42	0,73	0,020	38,90	39,90	1,84	0,52	
17	6,29	4,07	0,48	0,022	37,97	38,53	1,06	0,05	
18	4,67	3,65	0,15	0,019	40,50	37,80	2,17	0,15	

ми" и построить по ним схематические диаграммы "ящик с усами". "Стеблем" числовой диаграммы являются повторяющиеся части чисел, а "листьями" — оставшиеся их части. Так, например, результаты анализов на CoO по зоне структурных окисленных руд в такой записи примут вид:

0,0 56, 85, 39, 76
 0,1 97
 0,2 92
 0,3 20.

В данном случае в качестве "стебля" приняты десятые доли процента, а в качестве "листьев" — сотые и тысячные. При решении вопроса о том, какую часть чисел выделить в "стебель", необходимо первоначально определить общий размах варьирования содержания этого элемента по всем зонам и месторождениям. По схематическим числовым диаграммам можно легко найти минимальное и максимальное значения, медиану и так называемые "сгибы", т.е. середины интервалов от медианы до минимального и максимального значений. Медиану находят путем отсчета от начала или конца "стебля" половины всего количества "листьев", а положение "сгибов" определяют путем отсчета от медианы в сторону минимального и максимального значений числа "листьев", равного 1/4 от их общего количества. Интервал между "сгибами" изображается

в виде прямоугольника ("ящика"), а интервалы от "сгибов" до максимального и минимального значения — в виде прямых линий ("усов"). Изображенные на одном графике в одинаковом масштабе схематические диаграммы для разных месторождений позволяют судить о сходстве или различии распределений содержаний данного элемента на этих объектах.

2. О различиях в химическом составе разных зон коры выветривания также можно судить по схематическим диаграммам. Для этого на один график следует поместить диаграммы, характеризующие различные зоны. Если распределения данного элемента в аналогичных зонах различных месторождений сходны, то выборки по этим месторождениям целесообразно объединить и сравнивать диаграммы, построенные по объединенным выборкам.

3. Схематические диаграммы можно использовать и для анализа поведения химических элементов в процессе породообразования. Уменьшение значения медианы при переходе от нижней зоны к верхней указывает на вынос данного элемента, а увеличение — на его малую подвижность и накопление в коре выветривания. Увеличение размаха варьирования (длины "усов") без заметного смещения медианы указывает на локальное перераспределение данного элемента в пределах зоны.

ЗАДАЧА 1.2

Определение доверительного интервала содержаний полезных компонентов при проведении аналитических работ

Для оконтуривания рудных тел при разведке месторождений полезных ископаемых, где оруденение не имеет четких геологических границ, используются данные рядового опробования керна колонковых скважин и бороздового опробования горных выработок. В контур рудного тела могут быть включены пробы с концентрацией полезного компонента выше заданного предела, т.е. оконтуривание проводится по так называемому "бортовому" содержанию. При этом значительная часть отобранных проб может характеризоваться относительно низкими содержаниями полезного ископаемого и не участвовать в подсчете запасов.

Содержания полезных компонентов в пробах обычно определяются на основании химических анализов. Для того чтобы не подвергать химическим анализам пробы с заведомо низкими содержаниями (ниже бортового лимита), из материала проб отбираются навески, которые предварительно изучаются с помощью полуквантитативного спектрального анализа. Последний является относительно дешевым и высокопроизводительным (экспрессным) методом определения концентраций химических элементов и широко используется при проведении геохимических исследований. Вместе с тем этот метод отличается невысокой точностью

и не позволяет надежно характеризовать содержания полезных компонентов в рудах.

В связи с этим данные спектрального анализа позволяют только приближенно оценить содержания компонентов и выделить (разбраковать) заведомо безрудные участки. Критерием для такого разделения проб является некоторый предел концентраций установленных спектральным методом, величина которого зависит от уровня бортового лимита и величины ошибок анализа.

Для оценки величины этих погрешностей спектральным методом многократно определяются содержания в пробах, "истинная" концентрация компонента в которых установлена более точными химическими анализами. Данные таких измерений по месторождениям разных видов полезного ископаемого и для различных уровней концентраций приведены в табл. 7. Представленные в ней выборки объемом 50 значений характеризуют пробу, составленную таким образом, что среднее содержание в ней, выявленное химическими анализами, полностью соответствует принятому уровню бортового содержания (C_B). Из табл. 7 видно, что данные определения содержаний спектральным анализом отличаются от истинного как в сторону завышения, так и в сторону занижения. Таким образом, на химический анализ необходимо направлять пробы, в которых установлены не только содержания, превышающие бортовые, но и имеющие более низкие значения, т.е. браковочный предел должен быть меньше бортового содержания.

Таблица 7

Данные определения содержаний (в %) элементов спектральным анализом.
 C_B – бортовое содержание элемента

№ п/п	$Cu, 10^{-2}$		$Pb, 10^{-2}$		$Sn, 10^{-3}$		$Mo, 10^{-3}$		$Zn, 10^{-1}$		$W, 10^{-2}$	
	C6-10	C6-30	C6-30	C6-50	C6-30	C6-50	C6-30	C6-50	C6-5	C6-10	C6-10	C6-20
1	8	37	30	18	35	37	26	45	6	10	7	20
2	5	22	38	47	18	18	10	32	3,5	8	4	12
3	7	11	18	40	17	13	24	55	5,5	10	6	22
4	9	30	7	45	39	44	38	38	4,5	7	8	15
5	6	15	21	53	32	45	27	20	5	9	9	20
6	12	26	26	38	45	25	23	54	7	5	6	25
7	10	20	37	59	28	53	33	43	34	7	10	6
8	3	42	19	40	3	37	17	48	3,5	11	13	17
9	9	18	23	54	29	44	38	64	5	12	8	8
10	11	28	39	48	23	53	4	17	4,5	9	11	18
11	7	39	31	28	12	23	32	54	5,5	5	4	19
12	9	34	18	54	33	74	23	38	5,5	12	13	15
13	6	55	48	46	38	34	35	43	2	10	9	20
14	8	21	27	55	30	70	13	52	6	9	1	17
15	10	35	38	35	12	40	27	64	5	8	11	18
16	4	28	25	50	27	57	30	32	2,5	5	15	13
17	9	32	17	48	40	15	18	44	7	11	9	30
18	8	23	22	62	50	53	8	64	4	10	7	20
19	10	48	33	37	32	78	35	49	6,5	7	5	25

№ п/п	$Cu, 10^{-2}$		$Pb, 10^{-2}$		$Sn, 10^{-3}$		$Mo, 10^{-3}$		$Zn, 10^{-1}$		$W, 10^{-2}$	
	C6-10	C6-30	C6-30	C6-50	C6-30	C6-50	C6-30	C6-50	C6-5	C6-10	C6-10	C6-20
20	9	33	24	72	15	36	35	35	5	12	11	18
21	12	40	25	55	36	42	20	55	6	6	2	22
22	5	27	32	85	28	62	8	45	3	15	10	20
23	16	36	56	27	20	68	48	42	5	10	7	19
24	11	13	37	58	27	40	25	80	4	8	14	23
25	8	28	28	53	8	60	38	25	6	10	3	30
26	12	22	65	45	33	35	13	68	5,5	8	11	10
27	6	29	32	50	25	53	70	50	4	11	9	20
28	11	30	17	40	48	28	34	74	6	9	20	17
29	14	26	33	62	28	54	43	37	6	12	7	22
30	8	19	20	48	34	48	21	65	5	6	12	28
31	10	27	40	30	14	80	50	48	4	9	5	15
32	18	37	26	67	25	58	26	58	5,5	12	14	25
33	10	29	33	54	17	19	37	30	4,5	12	9	20
34	7	22	13	42	26	48	15	52	6,5	8	10	19
35	12	27	27	35	21	55	40	44	4,5	9	13	23
36	6	32	44	62	65	88	28	57	5	10	3	15
37	8	17	27	55	32	22	33	28	3	7	12	35
38	13	31	34	54	42	59	59	60	7	11	7	13
39	10	23	21	30	26	38	17	40	4,5	17	10	28
40	11	44	35	45	17	58	42	33	3,5	9	8	10
41	8	34	26	42	30	28	34	52	3	10	5	21
42	5	16	42	65	35	47	22	48	5	7	12	18
43	13	36	29	33	45	68	28	35	4	11	9	15
44	9	24	22	60	22	38	15	59	5,5	8	6	12
45	7	60	26	55	27	61	44	48	3,5	9	10	20
46	13	31	31	44	37	30	32	90	5,5	7	8	18
47	9	38	14	48	10	46	19	28	5	11	11	18
48	11	21	30	38	30	50	28	68	8,5	9	6	25
49	7	25	15	67	22	32	30	33	4	8	12	10
50	9	32	23	44	15	40	22	46	4,5	11	8	18

Требуется:

- 1) по одной из выборок установить соответствие эмпирического распределения теоретическому и оценить его параметры;
- 2) оценить наличие систематической ошибки спектрального анализа и установить ее величину;
- 3) рассчитать значение предельного содержания для проб, направляемых на химический анализ.

Методические указания

Вычисление погрешностей анализов базируется на использовании определенной модели одномерного статистического распределения, выбор которой в данном случае предлагается осуществить с помощью

метода моментов. Чаще всего распределение эмпирических данных удовлетворительно описывается нормальным или логарифмическим нормальным (логнормальным) законом распределения, применительно к которому и предлагается производить проверку соответствия.

1. Для оценки соответствия распределения эмпирических данных нормальному закону данные определения содержания спектральным методом по одной из выборок заносят в графу 2 табл. 8. Среднее содержание компонента по выборке оценивается с помощью формулы

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n — объем (число данных) выборки; x_i — результат единичного i -ого определения содержания.

Таблица 8

Проверка соответствия распределения данных нормальному закону

№ п/п	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^4$
1					
.					
.					
.					
n					

Разность $x_i - \bar{x}$ заносят в графу 3 с учетом знака "+" или "-". В графу 4 записывают квадраты разностей $(x_i - \bar{x})^2$. Несмещенную оценку дисперсии вычисляют по формуле

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Выборочную оценку среднеквадратичного (стандартного) отклонения осуществляют по формуле $S = \sqrt{S^2}$.

Третий момент распределения m_3 и коэффициент асимметрии A определяют в графе 5:

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3; \quad A = \frac{m_3}{S^3}.$$

При вычислении третьего момента следует учитывать знаки отклонений. Оценку четвертого момента распределения m_4 и коэффициента эксцесса E помещают в графу 6, при этом

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4; \quad E = \frac{m_4}{S^4}.$$

При проведении расчетов величины в табл. 8 следует округлять таким образом, чтобы в каждой графе они имели одинаковое число знаков после запятой. Достаточная точность вычислений достигается в том случае, когда большая часть чисел в выборке имеет две-три значащие цифры.

Полученные значения A и E сравнивают с теоретическими, равными для нормального закона распределения соответственно 0 и 3. Если отношения $|A|/\sigma_A$ и $|E-3|/\sigma_E$ меньше 3 каждое, то гипотеза о соответствии эмпирического распределения теоретическому (нормальному) принимается. Среднеквадратичные отклонения σ_A и σ_E вычисляют следующим образом:

$$\sigma_A = 2,45/\sqrt{n}; \quad \sigma_E = 4,9/\sqrt{n}.$$

2. В случае принятия гипотезы о нормальном законе распределения оценивают наличие систематической ошибки ($\delta = \bar{x} - C_6$) анализа, ее величину и знак.

Существование систематической ошибки устанавливают проверкой гипотезы о равенстве среднего содержания по данным спектрального анализа истинному содержанию в исходной пробе ($H_0: \bar{x} = C_6$).

Гипотезу проверяют с помощью критерия Стьюдента:

$$t = \frac{(\bar{x} - C_6) \sqrt{n}}{S}.$$

Она принимается, если вычисленное значение t меньше табличного (см. прил. 1) для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$. В этом случае можно считать, что систематическая ошибка анализа отсутствует.

3. Величину доверительного интервала для значений признака в выборке определяют по формуле

$$\lambda = t_{\alpha, k} \bar{S},$$

где $t_{\alpha, k}$ — величина критерия Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$.

При выполнении задания рекомендуется принять уровень значимости равным 5%.

С учетом величины доверительного интервала λ устанавливается нижний предел содержания $C_{пр}$, определенный спектральным способом, для проб, которые следует направлять на химический анализ:

$$C_{пр} = C_6 + \delta - \lambda.$$

Систематическую ошибку δ учитывают в том случае, когда она статистически значима. В данных условиях вероятность "пропустить" пробы с бортовым содержанием полезного компонента (т.е. не направить их на химический анализ) не будет превышать величины $a/2$, т.е. при уровне значимости 5% она составит всего 2,5%.

4. В случае, когда гипотеза о нормальном законе распределения отвергается, необходимо проверить соответствие эмпирического распределения логнормальному закону. С этой целью исходные данные в выборке логарифмируют и заносят в табл. 9.

Таблица 9

Проверка соответствия распределения данных логнормальному закону

№ п/п	x_i	$\lg x_i$	$\lg x_i - \overline{\lg x}$	$(\lg x_i - \overline{\lg x})^2$	$(\lg x_i - \overline{\lg x})^3$	$(\lg x_i - \overline{\lg x})^4$
1	2	3	4	5	6	7
1						
.						
.						
.						
n						

Среднее значение логарифмов содержаний находят следующим образом:

$$\overline{\lg x} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \lg x_i \right).$$

Разности логарифмов $(\lg x_i - \overline{\lg x})$ и их квадраты заносят соответственно в графы 4 и 5.

Выборочную оценку дисперсии логарифмов вычисляют по формуле

$$S_{\lg}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^2.$$

Так же как при проверке соответствия нормальному закону оцениваются значения коэффициентов асимметрии (A_{\lg}) и эксцесса (E_{\lg}):

$$A_{\lg} = \frac{1}{n S_{\lg}^3} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^3;$$

$$E_{\lg} = \frac{1}{n S_{\lg}^4} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^4.$$

Вычисляют отношения $|A_{\lg}|/\sigma_A$ и $|E_{\lg} - 3|/\sigma_E$; если каждое из них меньше 3, гипотеза о соответствии эмпирического распределения логнормальному принимается.

5. Наличие систематической ошибки в спектральных анализах при логнормальном распределении также оценивают с помощью критерия Стьюдента:

$$t = \frac{1}{S_{\lg}} |\lg \bar{x} - \lg C_6| \sqrt{n}.$$

Гипотеза об отсутствии систематической ошибки принимается, если вычисленное значение t меньше табличного (см. прил. 1) для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы k .

6. Величину доверительного интервала для логарифмов содержаний вычисляют по формуле

$$\lambda = t_{\alpha, k} S_{\lg}.$$

В этом случае нижний предел содержаний в пробах, направляемых на химический анализ, находят из выражения

$$C_{\text{пр}} = 10^{\overline{\lg x} - \lambda}.$$

Так же, как и в случае нормального распределения, уровень значимости следует принять равным 5%.

ЗАДАЧА 1.3

Определение необходимого числа проб для оценки среднего содержания полезного компонента с заданной точностью

На месторождении меди обрабатывают руды двух технологических типов: первичные и окисленные. Переработку руд на обогатительной фабрике ведут по разным схемам. Для оценки содержаний полезного компонента в руде, поступающей на фабрику, осуществляют товарное опробование. Пробы отбирают с ленты транспортера через равные промежутки времени. Различия содержаний полезного компонента по отдельным пробам вызваны природной неоднородностью руд и случайным попаданием в пробу данной массы кусков с разной концентрацией полезных минералов. Выборки, составленные по данным опробования руд каждого технологического типа, приведены в табл. 10, 11.

Правильный учет количества полезного компонента, переработанного на фабрике, и точное определение коэффициента извлечения обеспечиваются ежесуточной оценкой среднего содержания полезного компонента в руде по данным опробования.

Данные опробования окисленных руд (содержание меди, %)

№ п/п	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,56	2,98	3,12	2,18	1,08	1,01	1,05	0,54	0,40	0,45
2	0,95	1,55	1,46	1,52	3,11	4,06	3,51	1,19	0,50	0,38
3	0,60	0,68	0,52	0,27	0,35	0,78	1,11	1,90	3,08	3,62
4	2,76	1,45	0,74	0,59	0,55	0,84	1,08	1,29	1,47	2,03
5	3,25	3,25	2,38	1,03	0,56	0,95	0,86	0,89	1,70	1,90
6	2,06	0,68	0,59	0,39	0,29	0,16	0,49	1,03	1,04	0,91
7	0,70	0,72	0,53	0,24	0,20	0,62	0,15	0,14	0,34	0,66
8	0,46	0,28	0,46	0,53	0,41	0,46	1,50	1,97	2,40	2,06
9	2,00	2,37	1,64	1,20	1,23	0,94	0,23	0,12	0,25	0,28
10	0,33	0,27	0,24	0,21	1,56	2,11	2,47	2,16	1,86	1,88
11	1,48	1,69	1,64	1,30	0,83	0,87	0,77	0,83	0,51	0,38
12	0,52	0,59	0,79	1,98	2,43	2,72	2,10	1,83	1,97	1,26
13	0,94	0,32	0,61	1,33	1,19	0,93	0,28	0,27	0,25	0,36
14	1,62	1,85	2,19	1,47	1,49	1,58	1,62	2,39	2,27	1,80
15	0,75	0,91	0,90	0,97	0,46	0,54	0,74	0,87	1,70	2,20
16	2,62	1,71	1,17	0,56	1,05	1,37	1,44	0,75	1,40	0,49
17	2,02	3,79	4,21	3,68	2,02	0,61	0,92	0,91	0,61	0,23
18	0,54	0,68	0,67	1,02	1,61	1,80	1,42	1,43	1,33	1,26
19	0,89	0,25	0,52	0,79	1,66	1,95	2,22	1,65	1,28	1,19
20	1,85	2,03	1,71	0,72	0,89	1,01	0,67	0,78	0,89	1,50
21	1,06	1,28	1,21	0,35	0,16	0,90	1,02	0,98	0,30	0,35
22	1,02	0,98	0,30	0,35	2,10	1,33	1,55	2,14	2,34	1,04
23	1,18	0,68	1,1	1,13	1,31	1,07	1,04	1,08	1,26	1,28
24	0,95	0,46	0,75	0,86	1,49	1,98	2,48	1,92	1,10	0,68
25	1,00	0,88	0,52	0,17	1,00	1,17	1,17	0,58	0,92	1,42
26	1,87	1,61	1,33	1,56	1,41	1,01	0,94	3,38	0,57	3,15
27	0,66	2,12	2,44	1,70	0,89	1,12	0,69	0,18	0,94	0,31
28	0,94	0,69	0,42	0,45	0,85	1,00	0,89	0,38	0,18	0,21
29	0,29	1,42	1,48	1,75	0,65	0,71	0,58	0,59	0,59	0,58
30	0,59	0,78	1,33	1,11	1,81	3,31	3,27	2,59	2,10	2,00
31	1,77	1,51	2,16	1,35	1,34	0,57	0,49	0,14	0,32	0,39
32	0,63	0,57	0,55	0,53	0,56	0,74	1,04	1,58	1,76	1,78
33	1,33	1,16	0,54	0,30	0,62	1,16	1,14	1,06	0,95	1,09
34	1,86	2,68	2,56	1,69	1,35	0,87	0,48	0,95	1,23	1,14
35	0,92	0,64	0,53	0,13	0,28	0,29	0,42	0,32	0,44	0,41
36	0,50	0,76	0,84	1,31	1,62	2,10	2,09	1,55	0,91	0,80

Таблица 11

Данные опробования первичных руд (содержание меди, %)

№ п/п	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,49	3,14	5,30	0,93	0,29	2,02	0,73	0,41	0,49	0,30
2	0,57	1,99	2,09	0,29	2,18	9,21	3,55	0,92	0,16	0,41

22

№ п/п	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,56	0,83	0,62	0,82	0,10	0,27	0,85	1,38	1,10	3,27
4	4,90	2,74	0,64	0,98	0,52	0,27	0,86	1,07	1,85	0,95
5	1,60	0,95	0,60	0,18	2,07	0,32	0,28	4,51	0,91	0,77
6	0,37	0,63	0,16	0,09	0,23	1,16	1,71	0,23	0,79	1,09
7	0,25	0,26	0,22	0,12	0,12	0,17	0,74	0,95	0,27	0,17
8	0,59	0,45	0,57	0,20	0,62	1,62	3,66	1,90	2,67	1,44
9	3,00	0,48	0,13	0,08	0,16	0,50	0,19	0,30	0,33	0,17
10	0,22	0,24	4,21	1,87	3,29	1,31	0,98	1,38	2,08	1,59
11	1,26	1,04	0,20	1,37	0,73	0,41	0,32	0,56	0,70	0,52
12	1,36	4,36	1,85	2,04	2,42	1,04	2,47	0,29	0,08	0,61
13	1,10	0,21	2,22	0,33	0,31	0,16	0,28	0,35	4,23	0,97
14	1,38	2,05	1,04	1,66	2,17	3,35	1,29	0,76	0,21	1,75
15	0,75	0,40	0,30	1,24	0,69	0,69	3,72	2,18	1,98	0,99
16	0,51	0,14	2,47	1,48	0,37	0,41	0,63	3,43	2,23	5,69
17	4,71	0,73	0,13	0,98	1,65	0,09	0,09	0,51	1,03	0,51
18	1,03	2,08	0,48	2,29	1,01	0,97	2,31	0,71	0,75	0,22
19	0,38	0,95	1,05	2,96	1,84	1,88	1,22	0,75	1,60	3,21
20	1,29	0,64	0,22	1,81	0,99	2,86	6,65	2,67	0,51	0,48
21	1,03	0,86	0,13	0,06	0,28	0,41	0,17	0,32	2,37	1,29
22	0,57	2,13	2,88	1,41	2,73	2,44	0,48	0,63	0,93	1,77
23	0,68	1,48	1,04	0,61	1,60	1,57	0,65	0,62	0,10	0,92
24	1,55	2,01	3,00	1,45	0,31	0,55	1,17	1,27	0,18	0,08
25	0,25	2,67	0,57	0,25	0,93	1,60	1,74	2,26	0,83	0,90
26	2,96	1,72	0,67	0,42	0,61	2,27	2,92	7,28	3,56	1,13
27	0,68	0,87	1,80	0,14	0,12	0,27	0,53	0,46	0,37	0,52
28	1,64	0,86	0,17	0,12	0,24	0,27	0,37	3,62	0,44	0,90
29	0,60	0,63	0,53	0,62	0,63	0,50	0,65	1,14	0,88	1,30
30	3,26	5,37	1,17	1,23	3,88	0,89	0,53	2,81	1,19	2,51
31	0,38	1,16	0,18	0,14	0,12	0,70	0,36	0,82	0,51	0,30
32	0,74	0,60	0,83	1,69	2,23	1,04	2,08	0,85	0,54	0,22
33	0,15	1,46	1,89	0,73	0,92	1,22	1,11	1,57	5,34	1,68
34	1,81	0,57	0,22	0,66	1,99	1,04	0,41	1,31	0,20	0,09
35	0,11	0,59	0,12	0,50	0,34	0,43	0,47	0,60	1,21	0,70
36	2,04	2,13	2,14	2,00	0,51	0,22	0,23	1,19	0,44	0,32

Требуется: определить число проб, необходимое при данном уровне изменчивости содержаний, для ежесуточной оценки среднего содержания полезного компонента в каждом типе руд с точностью 15 %. Задачу предлагается решить при доверительной вероятности 70, 90 и 95 %.

Методические указания

Процедура вычисления оценок среднего содержания по выборке и погрешности их определения основывается на знании закона распределения эмпирических данных. Проверку соответствия распределения

эмпирических данных теоретическому распределению при данном объеме выборки целесообразно проводить методом моментов. Предполагается, что распределение содержаний в окисленных рудах соответствует нормальному закону, а в первичных – логарифмически нормальному, в связи с чем статистическую обработку данных следует вести применительно к этим теоретическим распределениям.

1. При проверке соответствия распределения эмпирических данных нормальному закону исходные данные опробования x_i по одной из выборок заносят в графу 2 табл. 8. Среднее выборочное содержание полезного компонента \bar{x} оценивают по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n – объем (число данных) выборки.

2. Величины разности $x_i - \bar{x}$ заносят в графу 3 со знаком "+" или "-".

3. В графу 4 записывают квадраты разностей $(x_i - \bar{x})^2$ и затем вычисляют несмещенную оценку дисперсии S^2 :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Дают выборочную оценку среднего квадратичного (стандартного) отклонения: $S = \sqrt{S^2}$; вычисляют оценку коэффициента вариации:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 \%$$

4. Третий момент распределения (m_3) и коэффициент асимметрии (A) находят с помощью данных графы 5:

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3;$$

$$A = \frac{m_3}{S^3}.$$

При вычислении m_3 следует учитывать знаки отклонений.

5. С учетом данных графы 6 вычисляют оценку четвертого момента распределения (m_4) и коэффициент эксцесса (E):

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4;$$

$$E = \frac{m_4}{S^4} - 3.$$

При этом числа следует округлять таким образом, чтобы в каждой отдельной графе они имели одинаковый порядок. Достаточной точности вычислений достигают в том случае, когда большинство чисел в графе имеет две-три значащие цифры.

6. Полученные значения A и E сравнивают с теоретическими, равными для нормального закона распределения соответственно 0 и 3. Если отношения $|A|/\sigma_A$ и $|E|/\sigma_E$ меньше 3 каждое, то гипотеза о соответствии эмпирического распределения теоретическому (нормальному) принимается. Средние квадратичные отклонения σ_A и σ_E вычисляют следующим образом:

$$\sigma_A = 2,45/\sqrt{n}; \quad \sigma_E = 4,9/\sqrt{n}.$$

7. В случае принятия гипотезы о нормальном законе распределения эмпирических данных необходимое число проб (N) в общем определяют по формуле

$$N = \left(\frac{t_{\alpha, k} V}{\Delta} \right)^2,$$

где Δ – заданная точность оценки среднего; $t_{\alpha, k}$ – значение критерия Стьюдента для заданного уровня значимости α и данного числа степеней свободы k (см. прил. 1). Уровень значимости (α) и доверительная вероятность (P) соотносятся как $P = 1 - \alpha$.

Точное значение N можно определить последовательным приближением (итерациями), так как число степеней свободы k в свою очередь зависит от N ($k = N - 1$). Сначала вычисляют приближенное значение N при t с бесконечным числом степеней свободы $k = \infty$. Затем значение t уточняют в соответствии с приближенным значением N . Коррекцию значения N следует проводить до тех пор, пока округленное до целых число проб не перестанет изменяться.

8. В случае, когда гипотеза о нормальном законе распределения отвергается, проводят проверку соответствия распределения эмпирических данных логарифмически нормальному закону распределения. Для первичных руд статистическая обработка данных может быть начата сразу с этой проверки. Значение содержаний полезного компонента по выборке логарифмируют и заносят в графу 3 табл. 9.

9. Среднее значение логарифмов содержаний оценивают по формуле

$$\lg \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i.$$

Затем вычисляют разности логарифмов $\lg x_i - \lg \bar{x}$ (графа 4) и квадраты разностей $(\lg x_i - \lg \bar{x})^2$ (графа 5).

10. Выборочную оценку дисперсии логарифмов находят по формуле

$$S_{lg}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^2.$$

11. Аналогично пп. 4 и 5 вычисляют значения коэффициентов асимметрии A_{lg} и эксцесса E_{lg} :

$$A_{lg} = \frac{1}{nS_{lg}^3} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^3;$$

$$E_{lg} = \frac{1}{nS_{lg}^4} \sum_{i=1}^n (\lg x_i - \overline{\lg x})^4.$$

12. Проверка соответствия распределения эмпирических данных теоретическому (логнормальному) закону по значениям A_{lg} и E_{lg} осуществляют так же, как описано в п. 6.

13. В случае принятия гипотезы о логнормальном распределении среднее содержание полезного компонента в руде вычисляют как максимально правдоподобную оценку:

$$a = 10^{\overline{\lg x}} \psi_n(2,65 S_{lg}^2).$$

Значение функции $\psi_n(2,65 S_{lg}^2)$ определяют по таблицам прил. 2. Для приближенных расчетов может быть использована формула

$$a = 10^{\overline{\lg x} + 1,15 S_{lg}^2}.$$

14. Оценка коэффициента вариации в условиях логнормального распределения вычисляют по формуле

$$V = (e^{2,65 S_{lg}^2} - 1)^{0,5} \quad \text{или} \quad V = (10^{1,15 S_{lg}^2} - 1)^{0,5}.$$

15. Необходимое число проб через значение коэффициента вариации V устанавливают в соответствии с указаниями п. 7.

ЗАДАЧА 1.4

Графические приемы статистической обработки данных при проверке геологических гипотез

В районе, сложенном эффузивно-осадочными породами нижнего девона и толщей углисто-кремнистых сланцев нижнего карбона, широко развиты интрузии гранитов, сходных по составу и текстуре. Тол-

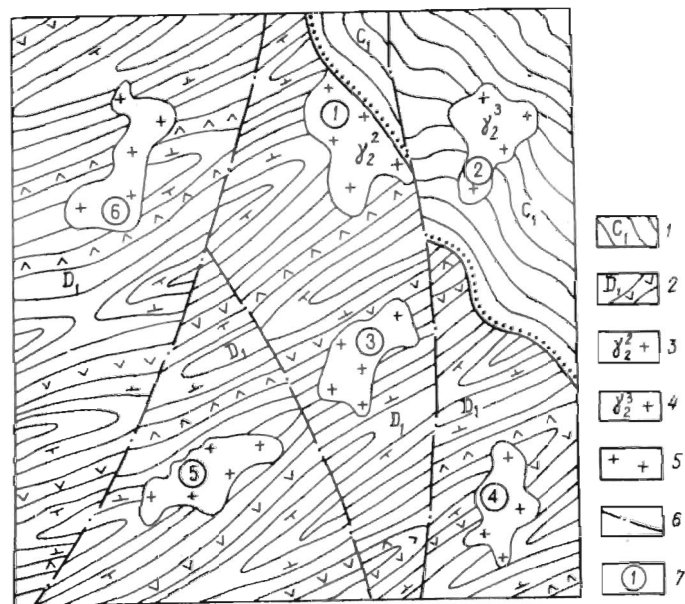


Рис. 1. Схематический геологический план участка
1 — углисто-кремнистые сланцы нижнего карбона; 2 — эффузивно-осадочные породы нижнего девона; 3 — гранитные интрузии среднего палеозоя; 4 — гранитные интрузии позднего палеозоя; 5 — палеозойские гранитные интрузии; 6 — тектонические нарушения; 7 — порядковый номер интрузии

ща углисто-кремнистых сланцев залегает на размытой поверхности нижнедевонских пород и гранитах интрузии 1, но прорывается интрузией 2 (рис. 1). Это позволяет предположить, что граниты района относятся, по крайней мере, к двум разновозрастным магматическим комплексам.

В северо-восточной части района детальными поисками в эндоконтакте среднепалеозойской интрузии 1 выявлены жилы редкометалльных пегматитов с промышленным содержанием тантала, олова, бериллия и лития. На выходах интрузии 2 проявлений редкометалльного оруденения не обнаружено. Для оценки возможной рудоносности интрузий 3, 4, 5 и 6 необходимо установить их возраст. Однако прямых геологических данных для решения этого вопроса нет.

По данным геохимического опробования интрузий 1 и 2 установлено, что среднепалеозойские граниты отличаются от более молодых нерудоносных гранитов (предположительно позднепалеозойских) повышенным содержанием Na_2O и Li_2O и пониженным содержанием K_2O (табл. 12). Эти различия могут быть использованы для оценки перспектив рудоносности интрузий 3, 4, 5 и 6 путем сравнения их химического состава (табл. 13) с интрузиями 1 и 2.

Статистические характеристики распределения содержаний оксидов в рудоносных и нерудоносных гранитах

Оксиды	Статистические характеристики	Рудоносные граниты (интрузия 1)	Нерудоносные граниты (интрузия 2)
Na ₂ O	$\frac{N}{x}$	80	80
	$\frac{x}{S}$	4,20	3,02
	S	0,95	1,15
	Закон распределения	Нормальный	Нормальный
K ₂ O	$\frac{N}{x}$	80	80
	$\frac{x}{S}$	2,93	3,65
	S	1,05	0,89
	Закон распределения	Нормальный	Нормальный
Li ₂ O	$\frac{N}{\lg x}$	80	80
	$\frac{x}{S_{\lg}}$	-1,10	-1,55
	S_{\lg}	0,85	0,97
	Закон распределения	Логнормальный	Логнормальный

Таблица 13

Содержания оксидов (в %) по данным опробования гранитоидных интрузий

№ п/п	Интрузия 3			Интрузия 4		
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
1	2,40	3,60	0,011	4,34	3,73	0,024
2	2,31	3,75	0,005	4,82	4,16	0,020
3	6,99	3,30	0,005	5,13	2,50	0,302
4	6,24	4,46	0,067	3,34	4,01	0,026
5	5,36	2,84	0,070	4,64	5,88	0,026
6	4,06	1,42	0,065	2,56	3,20	0,076
7	5,51	3,52	0,055	4,00	1,73	0,135
8	3,63	2,10	0,050	5,42	4,26	0,118
9	4,14	3,41	0,158	3,46	2,72	0,001
10	3,96	3,30	0,005	5,24	4,71	0,229
11	3,30	1,44	1,820	3,33	3,58	0,081
12	5,32	4,38	0,052	4,44	3,24	0,162
13	1,08	1,15	0,129	4,83	3,08	0,107
14	4,35	4,97	0,380	5,30	2,15	0,251
15	2,96	2,07	0,174	2,90	2,50	0,759
16	3,57	3,71	0,105	3,54	3,44	0,288
17	3,68	3,20	0,014	2,11	1,12	0,016
18	4,92	0,95	0,032	4,14	2,75	0,017
19	4,47	1,26	0,275	4,63	2,68	0,105

№ п/п	Интрузия 3				Интрузия 4	
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
20	5,00	3,86	0,001	4,69	3,86	1,175
21	2,68	2,79	0,055	4,29	2,74	0,550
22	4,74	4,42	0,038	3,95	0,17	0,046
23	3,08	2,88	0,724	3,04	3,95	0,065
24	3,01	2,75	0,069	3,92	2,03	0,512
25	3,34	1,37	0,001	4,02	1,31	0,011
26	4,26	2,88	0,891	3,90	2,44	0,331
27	3,16	1,86	0,011	5,30	2,37	0,002
28	3,35	1,67	0,003	3,86	1,89	0,054
29	4,21	1,60	0,002	4,04	1,27	0,091
30	4,14	2,87	0,024	3,16	3,52	0,295
31	2,04	2,90	0,007	4,86	2,43	0,020
32	3,69	3,42	0,028	4,08	3,47	0,037
33	5,30	3,60	0,331	3,16	2,69	0,035
34	3,00	3,24	0,027	4,80	3,60	0,132
35	3,94	4,22	2,295	5,22	2,78	0,058
36	3,46	2,54	0,049	4,69	3,74	0,013
37	3,23	4,29	0,407	3,00	0,98	0,010
38	3,32	3,54	0,060	2,08	2,36	0,210
39	4,41	1,34	0,550	5,00	2,30	0,117
40	2,79	3,66	0,001	2,64	3,48	0,363
41	4,32	3,36	0,001	5,00	1,81	0,019
42	2,91	3,01	0,120	2,98	4,30	0,031
43	4,90	3,11	0,052	4,09	1,81	0,002
44	5,03	4,30	0,851	3,24	2,34	0,091
45	2,70	2,43	0,009	4,12	4,19	0,186
46	3,34	1,82	0,302	4,48	3,41	0,603
47	5,31	2,48	0,129	2,51	3,16	0,036
48	3,57	3,84	0,087	4,06	2,37	0,013
49	4,01	3,58	0,050	4,25	3,75	0,006
50	1,49	2,57	0,026	3,62	2,78	0,033
51	3,55	2,86	0,005	4,35	1,47	1,585
52	3,67	2,27	0,004	3,71	1,02	0,0032
53	3,40	4,05	1,000	3,12	3,78	0,018
54	4,38	5,04	0,009	3,94	3,31	0,602
55	4,39	3,12	0,355	4,76	3,48	0,062
56	4,53	1,38	0,263	5,44	0,43	0,081
57	4,34	4,38	0,118	4,84	2,61	0,006
58	2,65	2,61	0,331	4,63	0,17	0,118
59	5,12	3,65	0,302	3,56	3,36	0,151
60	4,70	2,71	0,214	2,78	1,26	0,015
61	2,83	3,19	1,288	2,99	2,91	0,010
62	4,26	3,78	1,175	4,88	3,08	0,818
63	3,48	3,19	0,589	5,02	2,62	0,575
64	3,72	2,74	0,170	3,16	2,10	0,195
65	5,55	4,58	0,050	6,20	2,66	0,021
66	4,59	4,09	1,148	5,30	3,51	0,246
67	4,34	3,45	0,145	3,09	3,00	0,046

Продолжение табл. 13

№ п/п	Инtruзия 3				Инtruзия 4	
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
68	3,22	2,54	0,074	2,41	1,72	0,234
69	2,82	3,96	0,007	4,28	1,31	0,003
70	4,90	2,51	1,259	3,27	2,01	0,105
71	5,08	3,22	0,012	3,55	1,64	0,009
72	3,80	2,68	1,660	4,34	2,18	0,107
73	4,62	4,10	0,007	3,34	2,85	0,398
74	4,67	4,21	1,995	3,59	2,17	0,003
75	3,45	2,85	0,002	4,28	2,19	0,0054
76	4,91	1,30	0,051	4,90	1,66	0,794
77	3,22	1,96	0,012	4,80	3,50	0,003
78	4,31	4,62	0,035	4,84	2,68	2,188
79	5,16	4,05	0,324	2,84	2,57	0,056
80	3,34	3,09	0,020	2,78	4,05	0,044

Продолжение табл. 13

№ п/п	Инtruзия 5				Инtruзия 6	
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
1	3,12	3,78	0,460	1,25	4,25	0,005
2	2,76	3,34	0,045	2,70	4,36	0,910
3	2,13	4,71	0,005	2,02	3,55	0,034
4	1,98	5,15	0,001	2,55	4,79	0,001
5	3,42	4,16	0,018	3,51	3,92	0,003
6	3,06	3,46	0,032	2,30	4,62	0,023
7	3,56	4,18	0,001	3,28	4,20	0,001
8	0,64	4,97	0,004	2,49	5,04	0,010
9	4,96	4,02	0,036	1,22	4,93	0,004
10	2,72	5,14	0,006	2,96	4,70	0,001
11	3,93	2,62	0,017	3,29	2,87	0,011
12	1,97	3,14	0,620	3,99	3,59	0,022
13	3,48	5,09	0,081	2,51	4,20	0,723
14	5,71	3,60	0,002	2,77	2,18	0,673
15	2,94	4,18	0,037	1,78	4,45	0,038
16	2,70	2,42	0,001	2,52	4,22	0,026
17	2,61	3,82	0,004	4,00	3,37	0,154
18	1,95	3,87	0,005	0,50	3,54	0,378
19	1,65	2,80	0,006	2,26	5,16	0,005
20	4,00	4,02	0,012	1,78	4,20	0,005
21	1,98	3,78	0,128	2,79	2,82	0,079
22	3,55	4,89	0,030	2,91	2,70	0,025
23	3,42	3,91	0,002	4,78	2,57	0,154
24	3,07	3,56	0,011	3,07	3,77	0,012
25	3,52	2,56	0,030	3,18	2,85	0,001
26	3,48	4,01	0,059	2,19	5,07	0,009
27	3,83	2,09	0,021	1,99	3,18	0,124

Продолжение табл. 13

№ п/п	Инtruзия 5				Инtruзия 6	
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
28	4,11	2,65	0,077	4,45	0,51	0,016
29	4,27	2,31	0,066	3,76	3,36	0,105
30	3,23	3,68	0,260	3,29	3,04	0,001
31	2,70	3,41	0,009	2,33	2,29	0,212
32	4,06	2,63	0,071	3,39	1,50	0,047
33	3,16	2,76	0,113	2,60	4,90	0,380
34	2,87	3,91	0,002	0,97	4,92	0,001
35	1,80	3,37	0,007	1,80	1,10	0,008
36	4,70	3,13	0,065	3,99	2,92	0,006
37	2,09	3,50	0,037	1,94	3,39	0,060
38	4,22	2,82	0,085	3,03	4,16	0,908
39	1,35	3,92	0,074	3,60	2,96	0,298
40	4,30	4,29	0,004	1,40	6,00	0,009
41	2,73	2,29	0,051	1,07	2,95	0,165
42	3,90	3,84	0,002	3,71	3,68	0,173
43	1,57	4,32	0,057	3,34	3,05	0,009
44	4,33	4,63	0,084	2,41	3,37	0,007
45	2,75	2,84	0,021	1,47	4,85	0,042
46	2,60	4,14	0,694	3,36	3,92	0,021
47	3,34	2,06	0,008	2,43	2,12	0,038
48	3,82	3,50	0,785	1,19	3,63	0,002
49	4,38	4,92	0,685	4,53	1,14	0,054
50	2,64	2,96	0,017	1,99	2,42	0,165
51	3,08	4,74	0,013	3,76	2,46	0,312
52	3,13	2,83	1,478	3,79	3,29	0,004
53	2,76	3,94	0,002	2,42	3,24	0,108
54	2,12	4,33	0,150	2,67	4,16	0,001
55	3,47	4,80	0,287	2,63	3,58	0,045
56	3,04	2,43	0,011	3,04	3,31	0,657
57	4,42	3,04	0,034	4,32	3,12	0,007
58	1,97	1,61	0,022	1,74	6,00	0,212
59	4,81	3,64	0,017	4,70	3,93	0,005
60	2,42	3,96	0,002	3,63	3,46	0,071
61	3,44	4,19	0,058	3,07	2,48	0,164
62	2,15	3,79	0,005	7,69	2,66	0,125
63	3,49	3,45	0,001	3,43	4,14	0,002
64	3,68	2,54	0,012	2,48	3,77	0,003
65	1,78	4,42	0,012	2,22	3,36	0,001
66	3,89	3,52	0,022	4,98	3,11	0,037
67	2,22	3,41	0,058	3,34	3,38	0,072
68	2,81	4,80	0,005	4,61	3,75	0,125
69	2,07	3,36	0,287	1,81	2,53	0,050
70	1,42	3,53	0,388	1,55	3,99	0,002
71	3,08	2,66	0,067	3,10	4,32	0,008
72	4,60	3,66	0,921	4,62	3,07	0,208
73	0,10	3,56	0,017	3,18	3,74	0,026
74	4,15	4,72	0,757	5,50	2,68	0,021

№ п/п	Интрузия 5			Интрузия 6		
	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O	Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
75	4,21	4,19	0,036	2,15	3,74	0,498
76	4,17	2,50	0,165	2,97	3,38	0,018
77	3,28	1,58	0,009	2,05	1,93	0,026
78	3,04	4,14	0,001	4,02	4,43	0,004
79	3,11	3,34	0,233	2,56	2,67	0,036
80	3,20	1,26	0,034	4,79	3,46	0,028

Так как химический состав каждой интрузии определяется по совокупности геохимических проб (т.е. по выборочным данным), объективно вопрос о сходстве или различии интрузий может быть решен только с помощью статистических критериев. Для этого необходимо:

1) проверить гипотезу о соответствии распределения содержаний оксидов щелочных металлов в интрузиях 3, 4, 5 и 6 нормальному или логнормальному закону;

2) получить оценки средних значений и дисперсий, а в случае логнормального закона – оценки средних логарифмов и дисперсий логарифмов для содержания каждого оксида в интрузиях 3, 4, 5 и 6;

3) проверить гипотезу о равенстве средних значений и дисперсий содержаний оксидов в интрузиях 1 и 2 и исследуемых интрузиях 3, 4, 5 и 6, используя соответствующие статистические критерии;

4) оценить перспективность интрузий 3, 4, 5 и 6 на обнаружение в них редкометалльного оруденения.

Задачу решает бригада из 12 студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет пункты задания 1–3, оперируя результатами анализов на один из оксидов по одной из интрузий. Для выполнения п. 4 результаты, полученные каждым студентом, объединяются, и решение принимается с учетом всех данных.

Методические указания

1. Проверка гипотезы о соответствии распределения содержаний оксидов нормальному или логнормальному закону графическим методом. 1.1. Содержания оксидов по каждой интрузии, приведенные в табл. 13, целесообразно изобразить в виде "стебля с листьями". "Стебель" образуется начальными частями чисел, записанными в столбце в порядке возрастания. Для содержаний Na₂O и K₂O в качестве начальной части чисел удобно принять целую часть числа: т.е. целые проценты. В этом случае "стебель" будет представлять собой последовательный ряд чисел от 0 до 5 или 6. Для содержаний Li₂O "стебель" лучше записать в виде десятых долей процента. "Листьями" будут оставшиеся

части чисел, записанные в строку около соответствующих им начальных частей. В качестве примера приведем "стебли с листьями" для первых 10 проб по интрузии 5.

Na ₂ O	K ₂ O	Li ₂ O
0 64	0	0,0 45, 05, 01, 18,
1 98	1	32, 01, 04, 36, 06
2 76, 13, 72	2	0,1
3 12, 42, 06, 56	3 78, 34, 46	0,2
4 96	4 71, 16, 18,	0,3
	97, 02	
5	5 15, 14	0,4 60
6	6	0,5

1.2. При симметричном расположении "листьев" относительно середины "стебля" исходные данные группируются по равновеликим классам содержаний. Оптимальную ширину классового интервала (Δx) можно определить по формуле

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \lg N}$$

где x_{\max} и x_{\min} – соответственно, максимальное и минимальное значения параметров, а N – объем выборки. Если количество проб в крайних классах мало (меньше 5), ширину крайних классовых интервалов следует увеличить, объединяя соседние классы.

При резко асимметричном распределении "листьев" на "стебле" ширину классового интервала целесообразно принять переменной. Границы этих интервалов выбираются таким образом, чтобы в каждом классе содержалось по 10–15% всех проб. Это легко сделать, используя "стебель с листьями".

1.3. Для каждого класса группировки подсчитывается количество проб, т.е. частота (m_j), частость (P_j) и накопленная частость (h_j). Результаты заносятся в табл. 14.

1.4. Проверка гипотезы о законе распределения производится путем построения линий накопленных частостей (кумулят) на специальном вероятностном бланке (рис. 2). Для этого предварительно выбирают масштаб по горизонтальной оси в соответствии с размахом варьирования изучаемого признака. Масштаб должен быть таким, чтобы при построении графика вероятностный бланк использовался на всю ширину. Для проверки гипотезы о нормальном законе распределения используют обычную равномерную шкалу, расположенную в нижней части бланка, а для проверки гипотезы о логнормальном законе – специальную логарифмическую шкалу (рис. 3).

На вероятностный бланк в виде точек выносят значения накоплен-

Вычисление частот и накопленных частот по выборочным данным

Номер класса	Интервалы содержаний	Частота m_j	Частота m_j $P_j = \frac{m_j}{N} \cdot 100\%$	Накопленная частота h_j
1		m_1	P_1	$h_1 = P_1$
2		m_2	P_2	$h_2 = P_1 + P_2$
3		m_3	P_3	$h_3 = P_1 + P_2 + P_3$
...	
...	
k		m_k	P_k	$h_k = \sum_i P_i = 100\%$

ных частот, соответствующие верхним границам классов. Если точки располагаются по прямой линии или группируются вблизи нее, то эмпирическое распределение не противоречит проверяемому; если они значительно отклоняются от прямой, то эмпирическое распределение не отвечает проверяемому теоретическому.

Эту операцию необходимо повторить дважды, используя равномерную и логарифмическую шкалы.

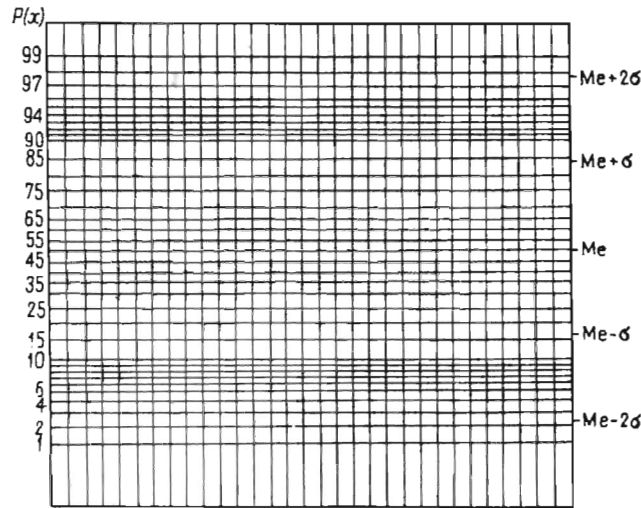


Рис. 2. Вероятностный бланк для проверки гипотезы о нормальном законе распределения

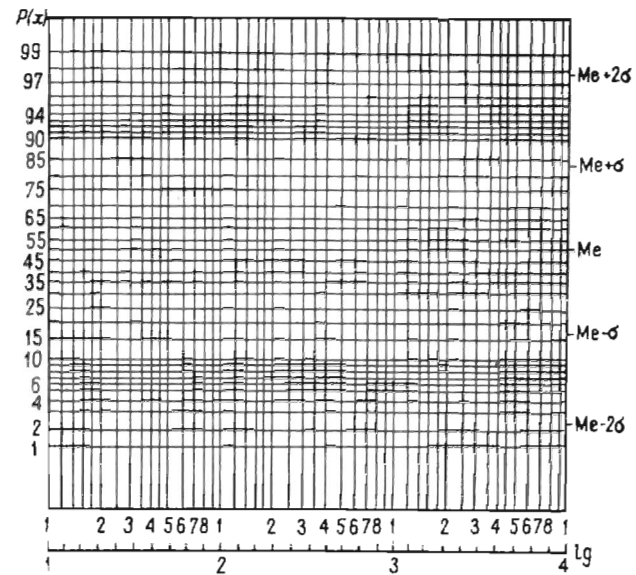


Рис. 3. Вероятностный бланк для проверки гипотезы о логнормальном законе распределения

2. *Определение параметров распределений.* 2.1. В случае принятия гипотезы о нормальном законе распределения среднее значение изучаемого признака (\bar{x}) находят по точке пересечения куммуляты, построенной по равномерной шкале, с линией 50%-ного накопления, а по точке пересечения с линией, соответствующей накопленной частоте 84,3%, находят величину $\bar{x} + S$. Оценку стандартного отклонения (S) рассчитывают по разности этих двух значений.

2.2. В случае принятия гипотезы о логнормальном законе распределения по точке пересечения куммуляты с линией, соответствующей 50% накопленной частоте, определяют число, логарифм которого равен выборочной оценке среднего логарифма ($\lg \bar{x}$). По точке пересечения куммуляты с линией, соответствующей 84,3% накопленной частоте находят число, логарифм которого равен сумме значений среднего логарифма ($\lg \bar{x}$) и оценки стандартного отклонения логарифма (S_{lg}). Величину стандартного отклонения логарифмов (S_{lg}) вычисляют как разность логарифма этого числа и среднего логарифма (см. рис. 3).

Для получения оценок параметров логнормального распределения можно воспользоваться также верхней горизонтальной шкалой бланка, на которой через равные интервалы отмечены значения логарифмов, соответствующие логарифмам чисел на оси абсцисс бланка. По такой

равномерной шкале логарифмов по тем же точкам можно сразу определить значения среднего логарифма и $\overline{\lg x} + S_{\lg}$.

3. Проверка гипотезы о равенстве средних и дисперсий. 3.1. Гипотезу о равенстве средних значений в условиях нормального закона распределения проверяют с помощью t -критерия Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}},$$

где \bar{x}_1 и \bar{x}_2 — средние значения параметров по сравниваемым объектам; S_1^2 и S_2^2 — оценки дисперсий; N_1 и N_2 — объемы выборок, по которым рассчитаны средние значения.

Значение t сравнивают с максимально допустимым значением t_α при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы $k = N_1 + N_2 - 2$ (см. прил. 1). Если значения $t < t_\alpha$, то гипотеза о равенстве средних не отвергается.

Объемы выборок по интрузиям 1 и 2 равны 80. Таблица значений критерия Стьюдента помещена в прил. 1. Уровень значимости α выбирают исходя из оценки возможного экономического ущерба от ошибок I и II рода.

3.2. В условиях логнормального закона распределения критерий Стьюдента заменяют критерием Родионова

$$Z = \frac{|\overline{\lg x}_1 - \overline{\lg x}_2| + 1,153(S_{\lg x_1}^2 - S_{\lg x_2}^2)}{\sqrt{\frac{S^2 \lg x_1}{N_1} + \frac{S^2 \lg x_2}{N_2} + 2,65\left(\frac{S_{\lg x_1}^4}{N_1 - 1} + \frac{S_{\lg x_2}^4}{N_2 - 1}\right)}},$$

где $\overline{\lg x}_1$ и $\overline{\lg x}_2$ — средние логарифмы; $S_{\lg x_1}^2$ и $S_{\lg x_2}^2$ — оценки дисперсий логарифмов по сравниваемым выборкам. Предельно допустимые значения Z для доверительной вероятности $P = 1 - \alpha/2$ находят в прил. 3.

3.3. Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий используют критерий Фишера:

$$F = S_1^2 / S_2^2,$$

где S_1^2 — большая; S_2^2 — меньшая из сравниваемых оценок дисперсии. Оценки дисперсий рассчитывают путем возведения в квадрат оценок средних квадратических отклонений, определенных графическим методом.

В случае логнормального закона распределения сравнивают дисперсии логарифмов.

Величину критерия Фишера сравнивают с допустимым значением F_α (см. прил. 4) при уровне значимости $\alpha = 5\%$ и степенях свободы $k_1 = N_1 - 1$ и $k_2 = N_2 - 1$.

Если значение F окажется меньше F_α , то расхождением между оценками дисперсий можно пренебречь как случайными. При $F > F_\alpha$ гипотеза о равенстве дисперсий отвергается.

ЗАДАЧА 1.5

Проверка геологических гипотез с помощью критерия Ван-дер-Вардена

Предварительная разведка россыпного месторождения золота проведена скважинами ударно-канатного бурения. Для заверки достоверности результатов опробования скважин на нескольких участках месторождения скважины частично заменены шурфами. Результаты опробования по шурфам и скважинам приведены в табл. 15.

Таблица 15

Результаты опробования шурфов и скважин на россыпном месторождении золота

Скважина (выборка А)			Шурфы (выборка Б)		
г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²	г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²
Участок I					
5,0	268	1340	5,0	501	2505
6,0	250	1500	5,8	293	1699
5,0	192	960	6,0	345	2070
5,0	38	190	2,0	132	264
5,0	366	1830	5,0	166	664
3,0	39	117	6,0	268	1608
5,5	414	2277	3,5	52	182
9,0	89	801	5,0	22	110
3,0	170	510	3,0	1	3
5,0	113	565	3,0	380	1140
4,0	188	752	3,0	136	408
4,0	2	8	3,0	131	393
3,0	66	198	6,0	6	36
5,0	266	1130	7,0	255	1785
6,0	237	1422	8,0	20	140
8,0	72	576	5,0	215	1075
4,5	197	887			
7,0	184	1288			
4,9	576	2822			
11,0	108	1188			

Скважина (выборка А)			Шурфы (выборка Б)		
г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²	г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²
<i>Участок 2</i>					
11,0	162	17,82	10,0	168	1680
14,0	58	812	15,0	151	2265
13,0	166	2158	14,0	214	2996
13,0	143	1859	10,0	203	2030
12,0	174	2088	9,5	233	2214
11,0	112	1232	10,0	221	2210
17,0	129	2193	10,0	240	2400
17,0	148	2516	11,0	211	2321
18,0	159	2862	13,0	196	2448
15,0	78	1170	11,0	234	2574
15,0	124	1860	13,0	76	988
17,0	182	3094	16,0	140	2240
20,0	80	1600	13,0	141	1833
15,0	91	1365	12,5	111	1388
12,0	71	852	11,4	108	1231
11,4	17	193			
14,0	68	952			
8,0	132	1056			
13,0	61	793			
13,0	82	1066			
7,0	206	1442			
<i>Участок 3</i>					
2,0	104	208	1,5	54	81
3,0	68	204	1,5	31	46
3,0	110	330	2,5	383	958
1,0	0	0	2,0	162	324
2,0	144	288	2,0	100	200
1,0	43	43	4,5	18	81
2,0	244	488	2,0	88	176
1,0	43	43	2,0	103	206
3,0	137	411	3,0	235	705
2,0	24	48	3,0	343	1029
5,0	311	1555	2,5	207	518
1,0	6	6	3,5	214	749
1,0	168	168	2,0	120	240
4,5	220	990	1,5	137	206
2,8	113	339	2,0	14	28
2,0	3	6	1,0	23	23
2,0	166	332	1,0	126	126
1,0	209	209			
2,0	458	916			
<i>Участок 4</i>					
1,3	51	66	1,0	9	9
1,0	306	306	1,0	51	51
1,5	177	266	1,0	56	56

Скважина (выборка А)			Шурфы (выборка Б)		
г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²	г, м	с, мг/м ³	тс, мг/м ²
1,2	39	47	1,0	70	70
2,0	344	688	1,0	0	0
4,0	127	508	3,5	53	186
2,9	153	444	1,0	79	79
4,0	154	614	3,0	539	1617
2,0	424	848	3,0	292	876
2,0	130	260	2,5	123	308
3,0	194	582	1,0	63	63
2,0	26	52	5,0	338	1690
1,0	0	0	5,0	150	750
2,0	131	262	5,0	323	1615
1,0	153	153	2,0	1	2
1,6	68	109	1,5	183	274
1,0	16	16	2,2	316	695
1,0	0	0	3,0	263	789
1,0	1331	1331			
2,0	458	916			
1,0	209	209			
2,0	166	332			
3,0	63	189			

Подтверждением достоверности результатов опробования скважин может служить равенство средних значений мощности россыпи (m), среднего содержания золота (c) и линейного запаса, т.е. произведения мощности на содержание ($тс$), рассчитанных отдельно по скважинам и шурфам в пределах опытных участков.

Требуется: проверить гипотезу о равенстве средних значений параметров россыпи по шурфам и скважинам по каждому участку и принять решение о возможности использования скважин в качестве основного технического средства детальной разведки данного месторождения.

Методические указания

Учитывая небольшое количество шурфов и скважин по каждому участку, для проверки гипотезы о равенстве средних значений целесообразно использовать непараметрический критерий Ван-дер-Вардена.

Значения оцениваемого параметра по скважинам (выработка А) и шурфам (выборка Б) объединяют, ранжируют, т.е. располагают в порядке возрастания, и заносят в табл. 16. При этом принадлежность каждого значения выборке А или Б отмечается в графе 3.

<i>i</i>	Содержание, мг/м ³	Выборка	$\frac{i}{n+1}$	$\psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$
1	2	3	4	5
1	1	Б	0,027	-1,93
2	2	А	—	—
3	6	Б	0,081	-1,40
4	20	Б	0,108	-1,24
5	22	Б	0,135	-1,10
6	38	А	—	—
7	39	А	—	—
.
.
.

$n = 36$

$$\sum_{i=1}^k \psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

Значение критерия Ван-дер-Вардена (X) рассчитывают по формуле

$$X = \sum_i^k \psi\left(\frac{i}{n+1}\right),$$

где n — общее количество значений по двум выборкам; k — число наблюдений в выборке B (меньшей по объему); i — порядковый номер каждого значения выборки B в общем ряду; $\psi(\dots)$ — функция, обратная функции нормального распределения.

Значения $\psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$ можно найти по обычной таблице функций нормального распределения (см. прил. 3), используя ее в обратном порядке, т.е. по величине вероятности $P = \frac{i}{n+1}$ находим значение функции

$$Z = \psi\left(\frac{i}{n+1}\right).$$

Пример определения функции $\psi\left(\frac{i}{n+1}\right)$ для первых четырех значений выборки B по участку 1 приведен в табл. 16.

Полученное значение критерия X сравнивается с табличным (см. прил. 5) для заданного уровня значимости (α), общего числа наблюдений (n) и разницы между объемами выборок A и B (m). Если расчетное значение критерия Ван-дер-Вардена не превышает табличного, то гипотеза о равенстве средних значений не отвергается, что указывает на достоверность результатов опробования скважин и возможность их

использования в качестве основного технического средства при проведении детальной разведки данного месторождения. Если гипотеза отвергается, это значит, что при определении средних параметров россыпи по скважинам допускается систематическая ошибка.

ЗАДАЧА 1.6

Определение оптимального объема шлиховых проб с использованием распределения Пуассона

Поиски коренных месторождений золота, алмазов, касситерита, тантало-ниобатов и других полезных ископаемых осуществляют по минералогическим ореолам рассеяния в рыхлых отложениях шлиховым методом. Шлихи представляют собой концентрат тяжелых минералов, полученный при промывке материала проб. Объем проб может изменяться от первых кубических дециметров до нескольких кубических метров. Опоискование пробами малого размера требует относительно небольших затрат времени, однако может приводить к "пропуску" ореола, особенно при низкой концентрации полезного минерала в опробуемых отложениях. Более надежны в этом смысле пробы большого объема, отбор и обработка которых, однако, требует повышенных затрат.

Для оценки зависимости между объемом пробы, концентрацией полезного минерала в ореоле и вероятностью попадания в пробу того или иного количества его зерен (кристаллов) проведено экспериментальное опробование, результаты которого представлены в табл. 17.

Таблица 17

Количество зерен монацита в экспериментальных пробах

№ п/п	Участки														
	1					2					3				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
	Объем проб, дм ³														
	2	5	10	2	5	10	2	5	10	2	5	10	2	5	10
1	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	0	2	0	2	3
2	0	0	0	0	0	3	0	0	2	1	2	0	3	1	2
3	0	0	0	1	0	0	2	2	0	0	1	1	0	4	4
4	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	2	2	1	2	5
5	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	3	3	4	3	7
6	0	1	0	0	1	0	0	2	1	1	0	4	2	4	1
7	0	0	2	0	0	1	1	0	1	0	1	5	0	3	4
8	1	0	1	0	0	1	0	1	2	0	3	2	2	0	6
9	0	1	1	0	1	0	0	1	2	0	2	2	0	2	8

Задание выполняется по данным опробования одного из участков развития минералогических ореолов.

Решение задачи начинается с выбора статистической модели, описывающей распределение дискретных величин. С этой целью может быть использовано распределение Пуассона, особенно в тех случаях, когда математическое ожидание случайной величины (λ) не превышает 13. Проверку закона распределения предлагается осуществить для данных опробования пробами одного объема.

1. Оценку математического ожидания вычисляют с учетом всех результатов опробования по конкретному участку. С этой целью в каждом столбце данных, характеризующих определенный участок, подсчитывают общее число зерен монацита; данные по столбцам суммируются и оценивается общее число зерен (Q), полученных при опробовании участка. Определяется суммарный объем проб по участку:

$$V_{\text{общ}} = 40 \cdot (2 + 5 + 10) = 680 \text{ дм}^3.$$

Вычисляется средняя концентрация (в шт/дм³) зерен монацита на участке: $q = Q/680$.

Математическое ожидание (λ) числа зерен в пробах определенного объема ($V_{\text{пр}}$) находят из выражения

$$\lambda = q V_{\text{пр}}.$$

Например, при изучении участка 1 получено 38 зерен полезного минерала. Их концентрация (в шт/дм³) $q = 38/680 = 0,056$. Величина λ по пробам объемом 2 дм³ составит 0,112 шт.

Для использования параметров теоретического распределения при обосновании объема шлиховых проб необходимо убедиться в соответствии эмпирических данных теоретической модели. Оно оценивается с помощью критерия χ^2 через сопоставления эмпирических и теоретических частот распределения в каждом i -ом классе случайной величины ($i = 0, 1, 2, \dots, x, \dots, m$).

Теоретическую вероятность попадания в пробу того или иного числа зерен минерала (x) находят следующим образом:

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Например, для первого участка вероятность "пропуска" ореола ($x = 0$) по пробам объемом 2 дм³ составляет

$$P(0) = e^{-0,112} \frac{0,112^0}{0!} = 0,894.$$

№ п/п	Участки														
	1			2			3			4			5		
	Объем проб, дм ³														
	2	5	10	2	5	10	2	5	10	2	5	10	2	5	10
10	0	0	1	0	0	1	0	0	4	4	0	3	0	1	4
11	0	1	0	0	0	2	0	2	1	1	1	5	1	3	3
12	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	3	0	2	6
13	0	0	1	0	2	1	0	1	0	1	2	1	1	1	7
14	2	0	0	1	0	0	0	1	2	0	5	3	1	3	8
15	0	0	0	1	0	2	0	0	4	0	2	5	0	3	5
16	0	0	2	0	0	1	3	0	1	2	3	2	1	3	7
17	0	0	0	0	1	2	0	0	2	1	2	1	0	1	6
18	0	0	1	0	0	1	1	2	1	0	6	2	2	2	0
19	1	0	1	0	1	2	0	0	2	2	3	0	0	2	5
20	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	2	2	0	4	4
21	0	2	0	0	0	1	1	1	2	2	0	4	0	1	3
22	0	1	1	1	0	1	0	3	0	1	1	1	1	3	5
23	0	0	0	0	2	0	0	1	2	0	1	4	0	2	6
24	0	0	0	0	0	5	1	0	3	0	2	5	4	0	7
25	1	0	1	0	1	0	0	3	0	1	0	2	0	5	4
26	0	0	1	0	0	2	0	0	4	2	0	1	1	1	5
27	0	0	1	0	2	1	0	1	1	2	1	3	3	4	10
28	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	3	5	0	5	2
29	0	1	0	0	1	0	1	1	3	0	1	4	1	1	4
30	0	1	2	2	0	1	1	4	1	0	3	0	0	7	3
31	1	0	0	0	1	0	0	1	2	2	0	4	1	2	5
32	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	2	1	4	6
33	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	11
34	0	3	0	0	0	3	1	1	2	0	2	3	1	2	4
35	1	0	0	0	3	0	0	2	5	0	0	8	1	1	4
36	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	3	2	1	2
37	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	1	0	4	3
38	0	0	1	1	0	1	2	2	3	1	0	4	0	3	5
39	0	0	0	0	1	1	1	0	2	0	1	6	1	5	6
40	0	0	1	0	1	3	0	1	3	0	1	2	4	4	2

Опробование пробами объемом 2, 5 и 10 дм³ проводилось на пяти участках, характеризующихся разной степенью концентрации полезного минерала в рыхлых отложениях. Пробы разного объема отбирались сериями по 40 шт. соосно (т.е. в одних и тех же точках). В пробах определялось число зерен минерала, что и отражено в табл. 17.

Требуется: для каждого уровня концентрации полезного минерала определить объем проб, гарантирующий обнаружение ореола единичной пробой с вероятностью 99 %.

Ожидаемую частоту встречи проб с x числом зерен минерала по выборке в N значений определяют по формуле

$$N_x = NP(x).$$

Эмпирическую частоту встречаемости проб с x числом зерен фиксируют по выборке; данные заносят в табл. 18.

Таблица 18

Эмпирическую частоту встречаемости проб с x числом зерен

Число зерен минерала в пробе, x	Число проб, N_x^3
0	
1	
2	
⋮	
⋮	
m	

Значение критерия χ^2 , используемого для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения теоретическому, вычисляют по формуле

$$\chi^2 = \sum_0^m \frac{(N_x - N_x^3)^2}{N_x},$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$ классы (значения) величины x .

В тех случаях, когда в отдельных классах число наблюдений (проб) меньше 5, их рекомендуется объединять, вычисляя суммарную теоретическую вероятность и частоту.

Вычисленное значение величины χ^2 сравнивают со значением, определяемым по таблице (см. прил. 6), для заданного уровня значимости и числа степеней свободы K . Число степеней свободы равно числу классов минус 2; за уровень значимости принимается 0,05.

Если вычисленное значение χ^2 меньше табличного, то гипотеза о соответствии распределения эмпирических данных закону Пуассона можно принять.

Принятие гипотезы позволяет использовать соотношение между вероятностью фиксации в пробе x числа зерен полезного минерала и величиной математического ожидания (λ) для определения оптимального объема пробы.

При заданной вероятности "пропуска" ореола ($x = 0$) можно вычислить соответствующую ей величину математического ожидания события. Если ореол должен быть зафиксирован с вероятностью 99 % (0,99), то вероятность его пропуска составит $1 - 0,99 = 0,01$.

Отсюда:

$$P(0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = 0,01, \text{ а}$$

$$\lambda = \frac{\lg 0,01}{-\lg e} = \frac{-2}{-0,4343} = 4,6.$$

Итак объем проб должен выбираться с таким расчетом, чтобы в него при данной концентрации полезного минерала попадало в среднем не менее 4,6 зерен. В зависимости от концентрации (c) объем проб $V = \lambda/c$.

Например, при $c = 0,1$ шт/дм³ и $\lambda = 4,6$ необходимо отбирать пробы объемом не менее 46 дм³.

Зависимость между степенью концентрации и объемом проб для заданной вероятности обнаружения ореола необходимо отобразить графически. Выбор достаточного объема проб осуществляется по графику через ожидаемый уровень концентрации полезного минерала в ореоле.

ЗАДАЧА 1.7

Оценка достоверности и представительности различных способов опробования с помощью критериев Вилкоксона и Сиджела – Тьюки

Штокверковое месторождение олова разведано скважинами колонкового бурения диаметрами 76 и 59 мм и ударно-вращательного бурения диаметрами 150 и 200 мм. На стадии предварительной разведки выход керна по скважинам колонкового бурения оказался довольно низким – 60–75 %. Это послужило причиной перехода на бурение ударно-вращательных скважин. На стадии детальной разведки за счет применения съемных керноприемников выход керна по колонковым скважинам удалось повысить до 85–100 %. Поэтому скважины ударно-вращательного бурения на этой стадии использовались лишь для отбора технологических проб. Длина интервалов опробования по скважинам – 2 м.

Для заверки результатов опробования скважин пройдена штольня и несколько соосных со скважинами восстающих. По стенкам восстающих отобраны бороздовые пробы длиной 2 м и сечением 10×5 см, а также валовые пробы массой 2 т, характеризующие двухметровые интервалы. Результаты основных и контрольных анализов приведены в табл. 19 и 20.

Требуется:

1) решить вопрос о достоверности результатов опробования скважин на разных стадиях разведки путем проверки гипотезы о равенстве средних содержаний олова, определенных по основным и контрольным пробам;

Таблица 19

Содержание олова (в тысячных долях %) по данным детальной разведки

Диаметр скв., мм	№ п/п	Пробы по скв.	Валовые пробы	Бороздовые пробы			
				СЗ стенка	СВ стенка	ЮВ стенка	ЮЗ стенка
59	1	102	75	75	70	57	48
	2	85	65	56	56	116	131
	3	100	91	62	167	73	87
	4	270	182	95	135	220	260
	5	57	101	126	53	28	105
	6	49	52	52	73	36	64
	7	95	60	66	62	43	51
	8	100	77	28	31	90	57
	9	185	143	240	180	105	76
	10	230	101	145	87	52	35
	11	87	81	67	85	102	65
	12	60	78	97	82	155	94
	13	50	82	110	96	330	34
	14	14	70	85	21	70	80
	15	75	93	90	87	95	75
	16	87	94	55	115	170	100
	17	145	110	170	95	90	100
	18	120	105	140	130	60	90
	19	86	65	87	60	50	29
	20	36	80	38	120	47	62
76	1	188	103	145	120	90	120
	2	47	89	77	64	61	55
	3	92	70	102	29	36	60
	4	115	107	128	90	85	165
	5	62	66	52	100	56	44
	6	50	84	52	170	55	49
	7	75	84	102	77	90	65
	8	115	67	155	10	85	56
	9	23	55	34	45	39	125
	10	46	66	56	43	65	82
	11	62	100	105	57	92	85
	12	185	142	190	105	90	87
	13	115	161	120	260	240	110
	14	135	124	130	105	113	180
	15	21	58	48	64	70	31
	16	132	62	83	23	53	62
	17	65	39	54	107	74	82
	18	33	63	43	52	52	43
	19	40	93	155	48	126	29
	20	145	153	200	100	49	300
	21	70	70	65	116	43	77
	22	49	77	66	87	54	53
	23	78	81	146	52	62	80
	24	82	66	46	74	65	57
	25	145	106	92	105	135	100

Продолжение табл. 19

Диаметр скв., мм	№ п/п	Пробы по скв.	Валовые пробы	Бороздовые пробы			
				СЗ стенка	СВ стенка	ЮВ стенка	ЮЗ стенка
200	1	89	86	146	73	72	44
	2	54	63	56	51	80	29
	3	91	74	75	50	57	77
	4	48	60	51	53	49	73
	5	84	70	50	77	137	53
	6	110	145	49	89	130	135
	7	235	180	240	200	190	185
	8	170	100	113	195	106	62
	9	42	64	70	53	56	55
	10	42	50	65	57	72	10
	11	88	87	92	95	85	77
	12	62	95	82	65	67	115
	13	94	92	85	84	72	87
	14	20	46	72	20	34	21
	15	120	65	70	125	42	60
	16	100	100	75	105	180	130
	17	120	91	56	100	114	32
	18	125	105	140	130	60	90
	19	57	82	42	98	77	29
	20	143	94	95	165	145	158
	21	84	70	60	97	110	95
	22	98	110	114	100	110	87
	23	106	73	47	101	125	41

Таблица 20

Содержание олова (в тысячных долях %) по данным предварительной разведки

Диаметр скв., мм	№ п/п	Пробы по скв.	Валовые пробы	Бороздовые пробы			
				СЗ стенка	СВ стенка	ЮВ стенка	ЮЗ стенка
59	1	40	68	60	38	52	56
	2	73	54	52	61	56	74
	3	56	69	52	80	66	81
	4	66	66	46	74	65	57
	5	44	98	115	48	155	89
	6	18	61	131	81	51	52
	7	64	72	57	57	50	48
	8	136	145	100	300	135	95
	9	154	72	49	82	83	26
	10	35	60	137	43	48	67
	11	176	137	130	29	130	150

Диаметр скв., мм	№ п/п	Пробы по скв.	Валовые пробы	Бороздовые пробы			
				СЗ стенка	СВ стенка	ЮВ стенка	ЮЗ стенка
	12	176	181	220	150	240	220
	13	74	86	28	67	28	195
	14	30	62	36	26	66	53
	15	46	112	81	185	145	82
	16	68	100	76	62	67	85
	17	168	76	90	95	97	95
	18	36	42	27	34	110	45
76	1	89	87	72	56	115	105
	2	104	102	67	65	70	95
	3	49	55	51	49	52	34
	4	121	105	70	95	140	117
	5	57	84	115	80	87	95
	6	83	90	39	34	245	98
	7	64	90	95	130	120	165
	8	76	99	245	70	95	64
	9	31	94	180	95	102	97
	10	140	121	90	117	128	100
	11	100	105	110	165	110	91
	12	37	71	85	95	67	90
	13	14	62	50	29	110	90
	14	28	84	61	158	38	75
	15	85	84	90	160	300	101
	16	34	93	155	48	126	29
	17	28	63	43	52	52	43
	18	55	89	54	107	74	82
	19	39	66	55	43	65	82
	20	53	100	105	57	92	85
	21	157	142	190	105	90	87
	22	42	84	52	170	55	49
150	1	75	75	75	70	57	48
	2	122	106	92	105	115	100
	3	100	65	56	56	131	116
	4	76	69	52	80	66	81
	5	110	72	49	82	83	26
	6	56	52	52	73	36	64
	7	56	60	137	43	48	67
	8	81	101	126	53	28	105
	9	185	137	130	29	130	150
	10	265	182	185	170	225	220
	11	70	112	210	180	27	91
	12	136	142	140	150	107	180
	13	85	100	72	67	87	150
	14	74	100	57	92	85	105

Диаметр скв., мм	№ п/п	Пробы по скв.	Валовые пробы	Бороздовые пробы			
				СЗ стенка	СВ стенка	ЮВ стенка	ЮЗ стенка
	15	64	66	50	90	27	42
	16	42	82	90	136	29	70
	17	74	55	38	29	115	52
	18	47	70	60	52	50	65
	19	105	87	72	56	105	115
	20	85	93	87	95	85	95
	21	108	102	67	70	75	95
	22	94	94	115	55	100	170
	23	92	110	114	87	110	100
	24	140	107	85	90	128	165
200	1	175	106	92	105	100	115
	2	151	143	49	135	130	89
	3	180	181	220	200	240	150
	4	146	142	190	87	90	105
	5	50	84	52	49	55	170
	6	53	66	52	44	56	100
	7	70	66	46	74	65	57
	8	72	70	50	77	137	53
	9	144	86	28	195	28	67
	10	74	100	105	85	92	57
	11	70	84	102	77	90	65
	12	130	105	70	95	140	117
	13	140	107	128	165	85	90
	14	94	91	62	87	73	167
	15	74	89	54	82	74	107
	16	97	62	83	62	53	23
	17	21	46	72	20	34	21
	18	88	65	70	60	42	125
	19	53	52	50	90	110	29

2) оценить представительность различных способов опробования путем сравнения выборочных оценок дисперсии содержаний олова.

Задание выполняется двумя бригадами студентов. Первая бригада, состоящая из девяти человек, анализирует результаты контроля опробования скважин предварительной разведки, а вторая, состоящая из семи человек, — скважин детальной разведки.

Один студент в каждой бригаде сопоставляет данные по валовому и бороздовому опробованию восстающих, а остальные анализируют результаты опробования скважин (отдельно по каждому диаметру), используя в качестве контрольных либо валовые, либо бороздовые пробы.

Каждый студент проверяет гипотезы о равенстве средних и равенстве дисперсий содержаний олова по двум сравниваемым совокупностям

проб. Общий вывод о достоверности и представительности результатов опробования формулируется совместно всеми членами бригады.

Методические указания

Поскольку основные и контрольные пробы существенно различаются по объему и массе, можно предположить, что статистические распределения оцененных по ним содержаний олова также будут заметно отличаться. Поэтому для проверки гипотез о равенстве средних и равенстве дисперсий целесообразно воспользоваться непараметрическими критериями, например, критерием Вилкоксона и Сиджела – Тьюки.

1.1. Для расчета критерия Вилкоксона значения содержаний олова по двум сравниваемым выборкам *A* и *B* объединяют в одну совокупность и ранжируют (табл. 21). Для упрощения операции ранжирования данные опробования по каждой выборке целесообразно записать в виде числовой диаграммы "стебель с листьями" (см. задачу 1.1). Критерий Вилкоксона *W* представляет собой сумму рангов рангов членов меньшей по объему выборки в объединенном ранжированном ряду:

$$W = \sum_{i=1}^{n_1} R_i \quad (n_1 \leq n_2),$$

где n_1 и n_2 – объемы сравниваемых выборок.

Таблица 21

Вычисление критериев Вилкоксона и Сиджела – Тьюки

№ п/п	Содержание олова в тысячных долях, %	Выборка	Ранг по критерию Вилкоксона	Ранг по критерию Сиджела – Тьюки
1	2	3	4	5
1	36	A	1	1
2	49	B	2,5	3
3	49	A	2,5	5
4	51	A	4	7
.
.
.
$N - 1 = 39$	182	A	39	4
$N = 40$	270	B	40	2

1.2. Если n_1 и n_2 меньше 25, то критические значения критерия Вилкоксона для уровня значимости $\alpha/2$ определяют с помощью специальных таблиц (см. прил. 6). В них приведены нижние критические значения W_1 и удвоенные математические ожидания статистики Вилкоксона $2M_W$.

Верхнее критическое значение W находят по формуле

$$W_2 = 2M_W - W_1.$$

В данном случае уровень значимости α уменьшается в два раза в связи с тем, что таблицы составлены для альтернативной гипотезы $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, в то время как по условию задачи нас интересует альтернатива $H_1: \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ или $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, нам важно убедиться в отсутствии систематического расхождения любого знака. При $W_2 < W$ или $W < W_1$ гипотеза о равенстве средних значений отвергается и расхождение между основным и контрольным способом опробования считается систематическим.

1.3. Если n_1 или n_2 больше 25, то критические значения критерия Вилкоксона определяют по следующим приближенным формулам:

$$W_1 \approx 0,5 [n_1(n_1 + n_2 + 1) - 1] - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)};$$

$$W_2 \approx n_1(n_1 + n_2 + 1) - W_1,$$

где $Z_{1-\alpha/2}$ – значение функции нормального распределения с параметрами 0,1 (см. прил. 3) для вероятности $1 - \alpha/2$. При наличии в объединенной выборке совпадающих значений им дается одинаковый ранг, равный среднему арифметическому из всех рангов, приходящихся на данную группу повторяющихся значений, а формула для расчета W_1 принимает следующий вид:

$$W_1 \approx 0,5 [n_1(n_1 + n_2 + 1) - 1] - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)} \times \left[1 - \frac{1}{(n_1 + n_2 + 1)(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \sum_{j=1}^k (t_j^3 - t_j) \right],$$

где k – количество групп из повторяющихся значений, принадлежащих разным выборкам; t_j – количество совпадающих значений в группе с номером j ($j = 1, 2, 3, \dots, k$). Группы, состоящие из повторяющихся значений только выборки *A* или *B*, при расчете поправки не учитываются.

2.1. Если гипотеза о равенстве средних значений по сравниваемым выборкам не отвергается, то при расчете критерия Сиджела – Тьюки используется объединенный ранжированный ряд, построенный ранее для расчета критерия Вилкоксона (см. табл. 21, графа 4). По нему строится новый ранжированный ряд (см. табл. 21, графа 5), в котором ранг $R' = 1$ приписывается наименьшему значению, ранг $R' = 2$ – наибольшему (т.е. имеющему ранг $R = N = n_1 + n_2$), ранг $R' = 3$ приписывается значению с рангом $R = 2$, ранг $R' = 4$ – значению с рангом $R = N - 1$ и т.д. Если число N нечетно, то медианному значению объединенного ряда ранг не присваивается.

В случае равенства дисперсий сравниваемых совокупностей сумм новых рангов R'_i , относящихся к меньшей по объему выборке, будет обладать свойствами рассмотренной выше статистики Вилкоксона W . Поэтому дальнейшие операции по проверке гипотезы о равенстве дисперсий сводятся к расчету статистики $W' = \sum_{i=1}^{n_1} R'_i$ по новому ранжированному ряду и нахождению критических значений W'_1 и W'_2 по формулам, приведенным в п. 1.2 или 1.3.

2.2. Критерий Сиджела – Тьюки построен исходя из предположения о равенстве центров распределений сравниваемых совокупностей. Поэтому при наличии систематического расхождения между результатами основного и контрольного опробования исходные данные по каждой выборке необходимо центрировать относительно их медиан, т. е. в исходном объединенном ряду (см. табл. 21, графа 2) необходимо ранжировать не значения содержаний (x_i), а их отклонения от медиан ($Me - x_i$). Медианные значения по каждой выборке можно легко определить по числовой диаграмме "стебель с листьями".

ЗАДАЧА 1.8

Использование интервальных оценок площадных коэффициентов рудоносности при планировании геологоразведочных работ

В пределах бокситоносного района, приуроченного к определенной части геосинклинального прогиба, поисково-оценочными работами было выявлено 26 перспективных площадей. На шести из них проведена предварительная разведка. Выявлено два месторождения и шесть рудопроявлений. Установлено, что бокситоносный пласт залегает на закарстованной поверхности рифогенных известняков и перекрыт битуминозными известняками и мергелями мощностью 25–30 м. Пластообразные залежи бокситов приурочены к карстовым полостям, невелики по площади, имеют сложную форму в плане. В контурах залежей отмечаются выступы и ксенолиты вмещающих известняков, а также участки некондиционных по качеству бокситоподобных пород. Наряду с промышленными залежами в пределах бокситоносного пласта имеются многочисленные мелкие скопления бокситов, приуроченные к карстовым карманам, воронкам и трещинам.

Добычу бокситов в данном районе предполагается вести открытым способом. Поэтому основным показателем, определяющим эффективность отработки, является площадной коэффициент рудоносности, т. е. отношение площади бокситовых залежей ко всей площади бокситоносного пласта в контуре проектного карьера. По различным участкам разведанных месторождений площадной коэффициент рудоносности ко-

леблется от 0,5 до 0,9. На рудопроявлениях, получивших отрицательную экономическую оценку, он составляет 0,1–0,4.

Требуется:

1) по участкам неразведанных перспективных площадей рассчитать интервальные оценки площадных коэффициентов рудоносности используя результаты поисково-оценочных работ (табл. 22);

Т а б л и ц а 22

Результаты поисково-оценочных работ

№ перспективной площади	№ участка	Количество скважин	
		общее, n	вскрывших бокситы, n_p
1	1	15	4
	2	22	10
	3	13	8
	4	15	4
2	1	12	3
	2	28	8
	3	19	16
	4	22	5
	5	31	6
3	1	19	4
	2	25	12
	3	21	5
	4	20	3
4	1	34	11
	2	22	4
	3	15	6
5	1	27	3
	2	31	9
	3	19	8
	4	15	14
6	1	18	4
	2	24	7
7	1	19	4
	2	33	7
	3	30	22
	4	17	4
	5	11	5

№ перспективной площади	№ участка	Количество скважин	
		общее, n	вскрывших бокситы, n_p
8	1	23	6
	2	21	8
	3	17	4
9	1	20	-
	2	25	3
	3	30	8
	4	15	3
	5	16	2
10	1	29	4
	2	22	6
	3	18	4
	4	20	12
11	1	31	7
	7	12	10
	3	16	2
12	1	21	3
	2	22	7
	3	17	9
	4	28	4
13	1	15	13
	2	21	6
	3	20	5
	4	31	7
14	1	32	5
	2	19	2
	3	21	3
	4	24	3
	5	31	8
15	1	29	3
	2	28	4
	3	16	2
	4	17	4

№ перспективной площади	№ участка	Количество скважин	
		общее, n	вскрывших бокситы, n_p
16	1	15	11
	2	19	4
	3	26	7
	4	27	5
17	1	19	7
	2	17	2
	3	19	4
18	1	23	2
	2	30	4
	3	31	8
	4	15	3
19	1	18	14
	2	31	6
	3	15	7
	4	16	2
20	1	18	3
	2	14	4
	3	31	3
	4	35	20

2) разделить участки на перспективные и неперспективные. Выделить участки для первоочередной постановки предварительной разведки.

Методические указания

1.1. При проведении поисково-оценочных работ на перспективных площадях скважины бурились по редкой, но довольно равномерной сети. Поэтому площадные коэффициенты рудоносности (K_p) по отдельным участкам можно оценить по отношению числа скважин, вскрывших бокситы (n_p), к их общему количеству (n): $K_p = n_p/n$.

1.2. Количество скважин по каждому участку различно, но всегда невелико. Поэтому полученные точечные оценки коэффициентов рудоносности могут существенно отличаться от истинных значений, и их нельзя использовать в качестве надежного критерия для определения перспективности каждого участка. Для этого необходимо рассчитать интер-

вальные оценки, учитывающие величину возможных ошибок. Распределения выборочных оценок коэффициентов рудоносности соответствуют биномиальному закону, поэтому для расчета границ доверительных интервалов можно воспользоваться формулой

$$K_p \pm \lambda = \frac{n}{Z_{1-\alpha/2}^2 + n} \left[K_p + \frac{Z_{1-\alpha/2}^2}{2n} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{K_p(1-K_p)}{n} + \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}}{2n}\right)^2} \right],$$

где $Z_{1-\alpha/2}$ — значение функции нормального распределения (см. прил. 3) для заданной доверительной вероятности $P = 1 - \alpha/2$.

1.3. При определении перспектив участков нежелательны ошибки I и II рода, поэтому при расчете интервальных оценок не следует задаваться слишком высокой доверительной вероятностью.

2. К неперспективным можно отнести участки, для которых верхняя граница интервальной оценки коэффициента рудоносности меньше 0,5.

Рекомендовать участок для первоочередного проведения предварительной разведки следует в том случае, когда нижняя граница интервальной оценки превышает 0,5.

Если верхняя граница доверительного интервала больше 0,5, а нижняя — меньше 0,5, участок можно считать перспективным, но не первоочередным для проведения предварительной разведки. При $K_p > 0,5$, но малом общем количестве скважин, на участках можно рекомендовать продолжение поисково-оценочных работ.

ЗАДАЧА 1.9

Статистический анализ угловых величин при изучении тектонической структуры рудопроявлений

В одном из перспективных на олово районов при вскрытии канавами геохимических аномалий выявлено три участка оловянной минерализации. Оруденение представлено маломощными жилами и прожилками кварца с касситеритом. В некоторых канавах отмечены также не содержащие касситерит кварц-флюоритовые жилы. Во вмещающих породах — мезозойских песчаниках и алевролитах — зафиксированы многочисленные неминерализованные трещины.

Для расшифровки тектонической структуры района и уточнения направления дальнейших геологоразведочных работ необходимо провести статистический анализ замеров элементов залегания вмещающих пород, трещин и жильных образований, приведенных в табл. 23.

Для этого требуется выполнить следующие расчеты и построения.

Замеры элементов залегания слоистости, жил и неминерализованных трещин

№ п/п	Азимуты падения, V_i			
	слоистости	кварцевых жил с касситеритом	кварцевых жил с флюоритом	неминерализованных трещин
Участок 1				
1	4	190	40	210
2	70	192	44	280
3	122	176	114	86
4	120	230	220	164
5	154	308	80	268
6	138	290	80	88
7	350	198	308	152
8	50	154	12	282
9	50	357	48	212
10	68	338	112	292
11	86	170	62	256
12	88	174	54	186
13	240	88	70	280
14	354	150	40	282
15	14	90	50	200
16	22	336	14	120
17	304	292	230	150
18	44	180	268	238
19	70	110	354	180
20	78	296	360	170
21	174	262	74	258
22	164	204	92	22
23	346	310	100	314
24	24	250	120	118
25	42	142	100	172
26	220	48	172	200
27	290	166	186	160
28	18	214	142	190
29	40	280	174	220
30	110	274	82	194
31	130	194	58	300
32	314	222	310	188
33	352	258	330	112
34	7	22	230	252
35	42	314	302	216
36	98	186	2	202
37	286	114	0	310
38	44	108	28	188
39	74	354	50	100
40	100	308	68	72

№ п/п	Азимуты падения, ν_i			
	слоистости	кварцевых жил с кас- ситеритом	кварцевых жил с флюоритом	неминерализован- ных грещин
<i>Участок 2</i>				
1	100	120	92	110
2	100	114	240	320
3	42	102	162	160
4	74	82	292	208
5	70	82	80	158
6	82	74	110	350
7	64	308	114	182
8	2	158	122	292
9	30	162	138	184
10	52	130	48	190
11	52	68	160	290
12	66	180	260	132
13	90	202	140	278
14	136	128	130	180
15	192	102	120	320
16	200	90	356	354
17	240	96	300	188
18	260	72	280	194
19	274	60	106	232
20	122	56	204	210
21	158	142	104	208
22	252	134	106	188
23	82	150	176	212
24	314	112	82	210
25	40	118	110	210
26	44	142	186	290
27	66	354	114	192
28	70	230	42	142
29	80	178	70	110
30	64	160	92	110
31	98	160	140	292
32	0	112	316	206
33	8	100	70	356
34	120	108	232	168
35	220	90	198	70
36	244	88	84	170
37	240	60	104	180
38	284	50	40	188
39	336	4	284	362
40	140	24	122	292
<i>Участок 3</i>				
1	316	308	158	100
2	352	202	182	120

№ п/п	Азимуты падения, ν_i			
	слоистости	кварцевых жил с кас- ситеритом	кварцевых жил с флюоритом	неминерализован- ных грещин
3	212	142	114	92
4	288	178	158	110
5	40	160	210	158
6	30	110	290	142
7	286	120	82	104
8	62	290	90	208
9	144	278	180	70
10	294	232	130	82
11	60	188	50	80
12	320	208	190	158
13	244	162	142	40
14	118	60	110	118
15	362	4	206	110
16	262	150	168	210
17	286	102	170	52
18	18	68	188	130
19	330	102	292	48
20	310	354	24	190
21	264	60	134	64
22	114	212	74	160
23	40	210	180	92
24	302	110	128	110
25	312	356	72	192
26	244	70	56	102
27	44	82	112	120
28	229	96	160	320
29	100	118	112	220
30	300	100	108	90
31	248	160	320	198
32	90	184	142	70
33	266	320	230	200
34	92	194	88	90
35	12	198	208	356
36	254	292	350	354
37	254	180	292	244
38	250	362	132	88
39	284	198	354	84
40	8	90	210	170

1. По каждой совокупности замеров:

- а) построить диаграмму розы наблюдений;
- б) рассчитать круговое среднее направление и круговую дисперсию;
- в) проверить гипотезу о равномерном распределении угловой величины;
- г) проверить гипотезу о соответствии распределения угловой величины закону Мизеса.

2. По каждому участку проверить гипотезу о равенстве круговых средних направлений:

- рудных жил и слоистости;
- рудных и кварц-флюоритовых жил;
- рудных жил и неминерализованных трещин;
- кварц-флюоритовых жил и слоистости;
- кварц-флюоритовых жил и неминерализованных трещин;
- слоистости и неминерализованных трещин.

3. По району в целом проверить гипотезы о равенстве круговых средних направлений азимутов падения аналогичных образований на разных участках.

По результатам статистического анализа необходимо сделать вывод о:

- характере складчатости в районе и на участках рудопроявлений;
- предполагаемой ориентировке рудоконтролирующих структур;
- соотношении осей складок, жил различного состава и неминерализованных трещин;
- стадийности гидротермальной деятельности;
- отличительных особенностях тектонической структуры каждого рудопроявления и района в целом.

Для выполнения задания студенты объединяются в три бригады по 4 чел. Первый пункт задания выполняется каждым студентом индивидуально по одной из совокупностей замеров. Второй пункт выполняется совместно студентами одной бригады, изучающей один из участков. Для выполнения третьего пункта и формулировки выводов используются результаты расчетов, проведенных студентами всех трех бригад.

Методические указания

1.1. Для построения розы-диаграммы наблюдений замеры угловой величины группируются в класс-интервалы. Учитывая, что количество замеров по каждому участку невелико, ширину интервала группирования целесообразно принять равной 10° . По каждому класс-интервалу подсчитывают частоты (n_j) и частости ($\frac{n_j}{n} \cdot 100\%$) и заносят в табл. 24.

На розе-диаграмме наблюдений каждый класс-интервал изображается в виде сектора с радиусом, равным соответствующей ему частоты. При большом разбросе значений угловой величины, когда в каждый класс-интервал попадает не более двух-трех замеров, ширину класс-интервала при построении диаграммы целесообразно увеличить до 20° .

1.2. Выборочное круговое среднее направление m определяют с помощью системы уравнений

$$\bar{C} = \bar{R} \cos m; \quad \bar{S} = \bar{R} \sin m,$$

Вычисление частот

Класс-интервал, градус	Частота, n_j	Частость, $\frac{n_j}{n} \cdot 100\%$
0-10		
10-20		
.		
.		
.		
350-360		

Таблица 25

Вычисление выборочного кругового среднего направления

θ_j	n_j	$\cos \theta_j$	$n_j \cos \theta_j$	$\sin \theta_j$	$n_j \sin \theta_j$
5					
15					
.					
.					
355					

где

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \cos \theta_j; \quad \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \sin \theta_j;$$

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2}$$

(θ_j – середина интервала группирования).

Для выполнения расчетов удобно воспользоваться табл. 25.

1.3. Выборочную круговую дисперсию направлений V рассчитывают по формуле

$$V = 1 - \bar{R}.$$

1.4. Чтобы убедиться в реальности установленных закономерностей в ориентировке изучаемых образований, необходимо проверить гипотезу о равномерном распределении их азимутов падения. Для этого можно воспользоваться критерием равномерности Релея (см. прил. 8). Если рассчитанное значение величины \bar{R} превышает критическое значение критерия Релея (\bar{R}_0) для данного объема выборки n и принятого уровня значимости α , то гипотеза о равномерном распределении угловой величины отвергается. В этом случае делают вывод о наличии в ориентировке изучаемых геологических объектов одного или нескольких преобладающих

Проверка гипотезы о соответствии выборочных данных распределению Мизеса

Класс-интервал в градусах, $v_j - v_{j+1}$	Частота, n_j	Объединенные класс-интервалы	Частоты по объединенным класс-интервалам, n_j	Класс-интервалы после центрирования, градусы	Теоретическая вероятность, ΔP_j	Теоретическая частота, n'_j	$\frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}$
·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
$(m-20) - 2$	·	·	·	·	·	·	·
$-(m+10)$	·	·	·	·	·	·	·
$(m-10) - 1$	·	$(m-20) - 3$	·	160-180	·	·	·
$-m$	·	$-m$	·	·	·	·	·
$m - (m+10)$	5	$m - (m+10)$	5	180-170	·	·	·
$(m+10) - 4$	·	$(m+10) - 4$	·	170-160	·	·	·
$-(m+20)$	·	$-(m+20)$	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·

щих направлений. Когда гипотеза о равномерном распределении не отвергается, нельзя делать вывод о каких-либо закономерностях в азимутах падения изучаемых объектов.

1.5. Для проверки гипотезы о равенстве средних угловых направлений можно использовать как параметрические, так и непараметрические критерии согласия. Поэтому для выбора наиболее мощного критерия необходимо проверить гипотезу о соответствии выборочных данных распределению Мизеса. Проверка этой гипотезы производится с помощью таблиц распределения Мизеса (см. прил. 9), составленных для случайных угловых величин со средним угловым направлением $\mu = 180^\circ$ и параметрами концентрации k равными 0; 0,2; ... 10. Поэтому при использовании таблиц необходимо выполнить следующие операции.

Исходные данные группируют в класс-интервалы таким образом, чтобы одна из границ класс-интервала совпала со значением выборочного кругового среднего направления m (табл. 26, графа 1). Для каждого класс-интервала подсчитываются частоты n_j (табл. 26, графа 2). Соседние класс-интервалы с частотами меньше 3 объединяются (табл. 26, графы 3, 4).

Затем класс-интервалов центрируются, т.е. сдвигаются на величину $m - 180^\circ$ или $180^\circ - m$ так, чтобы граница интервала, равная m , совпала с направлением 180° . Границы класс-интервалов после центрирования находят по формулам

$$|180^\circ + v_j - m| \text{ при } v_j < m;$$

$$|180^\circ - v_j + m| \text{ при } v_j > m.$$

Оценку \hat{k} параметра концентрации k находят по рассчитанной ранее величине \bar{R} с помощью специальных таблиц (см. прил. 10).

По таблицам распределения Мизеса (см. прил. 9) для соответствующего k находят теоретические вероятности попадания случайной угловой величины в каждый объединенный класс-интервал (см. табл. 26, графа 5). Они равны разнице между вероятностями, соответствующими верхней и нижней центрированной границам данного класс-интервала: $\Delta P_j = P_j - P_{j-1}$. Теоретические частоты попадания (n'_j) рассчитывают путем умножения ΔP_j на объем выборки n : $n'_j = \Delta P_j n$.

Проверка гипотезы о соответствии выборочных данных распределению Мизеса производится путем сравнения теоретических и фактических частот по критерию χ^2 Пирсона при числе степеней свободы, равном $K - 3$, где K — количество объединенных классов группирования. Значение критерия χ^2 рассчитывается по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - n'_j)^2}{n'_j}.$$

Если полученное значение критерия χ^2 превышает табличное для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $K - 3$ (см. прил. 6), то гипотеза о соответствии выборочных данных распределению Мизеса отвергается.

2.1. Когда обе сравниваемые совокупности замеров соответствуют распределению Мизеса, гипотеза о равенстве круговых средних направлений проверяется с помощью критерия Ватсона — Вильямса или F -критерия Фишера. Для выбора критерия необходимо вычислить среднюю общую результирующую длину:

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{(\bar{R}_1 n_1)^2 + (\bar{R}_2 n_2)^2 + 2 \bar{R}_1 n_1 \bar{R}_2 n_2 \cos(m_1 - m_2)}}{n_1 + n_2},$$

где \bar{R}_1 и \bar{R}_2 — рассчитанные ранее (п. 1.2) средние результирующие длины; m_1 и m_2 — оценки круговых средних направлений; n_1 и n_2 — объемы сравниваемых выборок.

Если $\bar{R} < 0,7$, а n_1 отличается от n_2 не более чем в два раза, гипотеза о равенстве круговых средних направлений проверяется с помощью критерия Ватсона — Вильямса, который вычисляют по формуле

$$\bar{R}' = \frac{\bar{R}_1 n_1 + \bar{R}_2 n_2}{n_1 + n_2}.$$

Критическое значение этого критерия $\bar{R}'_{кр}$ для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и общего количества замеров $n = n_1 + n_2$ определяют по специальной номограмме (см. прил. 11). Если $\bar{R}' > \bar{R}'_{кр}$, гипотеза о равенстве средних круговых направлений отвергается.

Если $\bar{R} > 0,7$, для проверки гипотезы о равенстве средних круговых направлений используют F -критерий Фишера.

В случае $0,7 < \bar{R} < 0,98$ эмпирическое значение F -критерия рассчитывают по формуле

$$F = \left(1 + \frac{3}{8k}\right) \frac{(n-2)(\bar{R}_1 n_1 + \bar{R}_2 n_2 - \bar{R}n)}{n - \bar{R}_1 n_1 - \bar{R}_2 n_2}$$

При $\bar{R} > 0,98$ для расчета F -критерия используют более простую формулу

$$F = \frac{(n-2)(\bar{R}_1 n_1 + \bar{R}_2 n_2 - \bar{R}n)}{n - \bar{R}_1 n_1 - \bar{R}_2 n_2}$$

Гипотеза о равенстве круговых средних направлений отвергается, если рассчитанное значение F превышает табличное значение критерия Фишера (см. прил. 4) для заданного уровня значимости α при степенях свободы $K_1 = 1$ и $K_2 = n - 2$.

2.2. Если гипотеза о соответствии выборочных данных распределению Мизеса отвергается, для проверки гипотезы о равенстве круговых средних направлений можно применить непараметрический критерий равномерных меток (критерий Вилера – Ватсона – Ходжеса).

Замеры по сравниваемым выборкам объединяют и ранжируют в порядке возрастания. Фактические замеры заменяются величинами $\beta_i = 360^\circ \cdot R_i / n$, где R_i – ранг, т.е. порядковый номер замера в общем ранжированном ряду, а n – объем объединенной выборки. Критерий равномерных меток рассчитывают по формуле

$$R^* = 2(n-1)R_1^2 / n_1 n_2,$$

где

$$R_1^2 = C_1^2 + S_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n_1} \cos \beta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n_1} \sin \beta_i\right)^2.$$

Для расчета критерия используют значения β_i , меньшей по объему выборки.

При $n > 20$ критическое значение критерия R^* для заданного уровня значимости α находят по таблицам распределения χ^2 – Пирсона (см. прил. 6) для числа степеней свободы $K = 2$.

При $n < 20$ используют специальные таблицы критических значений величины R_1^2 (см. прил. 12).

Если $R^* > R^*_{кр}$ или $R_1^2 > R_1^2(кр)$, то гипотеза о равенстве круговых средних направлений отвергается.

ЗАДАЧА 1.10

Оценка влияния ландшафтных условий на результаты геохимической съемки с использованием однофакторного дисперсионного анализа

При проведении геохимической съемки по вторичным ореолам рассеяния из рыхлых отложений отбирают пробы, которые изучают затем с помощью полуколичественного спектрального анализа для определения содержания ряда элементов (табл. 27). Предполагается, что содержания элементов в этих отложениях может зависеть не только от геологических условий (смена пород разного состава, наличие гидротермальных изменений и проявлений полезной минерализации), но и от ландшафтных условий изучаемой территории (от крутизны склонов, их экспозиции, характера растительности, мощности рыхлых отложений, обводненности и др.). Если влияние ландшафтных условий на данные геохимической съемки установлено, то может обсуждаться вопрос о введении "поправок за ландшафт" или отдельной обработки данных по каждому ландшафтному таксону.

Таблица 27

Данные геохимической съемки (%) по типам ландшафтов

№ п/п	Au, 10 ⁻⁸	Ag, 10 ⁻⁸	Pb, 10 ⁻⁴	Cu, 10 ⁻⁴	Zn, 10 ⁻⁴	As, 10 ⁻⁴	Sb, 10 ⁻⁶	Sn, 10 ⁻⁶	Bi, 10 ⁻⁶	Mo, 10 ⁻⁶	W, 10 ⁻⁶	V, 10 ⁻⁶
	Тун I											
1	30	300	7	7	1	3	30	30	2	10	10	10
2	10	300	5	5	7	3	20	20	3	20	40	30
3	50	200	10	10	5	2	10	20	3	1	10	10
4	20	500	1	0,5	7	5	5	10	2	30	40	30
5	40	300	7	5	10	1	30	40	0,2	5	20	50
6	30	100	5	7	5	3	20	20	2	10	30	70
7	5	50	3	1	1	5	10	5	1	2	5	30
8	30	300	12	7	10	2	30	30	3	50	50	50
9	20	200	7	5	7	3	20	20	1	10	20	100
10	30	300	1	3	3	2	30	20	2	2	5	50
11	40	300	5	3	7	3	30	20	0,5	5	10	30
12	30	200	7	5	5	3	10	10	2	2	1	50
13	20	400	7	10	12	2	20	30	3	10	40	50
14	30	500	5	5	7	3	40	20	2	30	50	30
15	30	300	7	7	5	2	10	30	1	10	30	50
16	40	150	3	3	5	3	30	30	1	10	20	10
17	20	300	10	7	10	1	20	10	3	20	30	5

№ п/п	Au, 10 ⁻⁸	Ag, 10 ⁻⁸	Pb, 10 ⁻⁴	Cu, 10 ⁻⁴	Zn, 10 ⁻⁴	As, 10 ⁻⁴	Sb, 10 ⁻⁶	Sn, 10 ⁻⁶	Bi, 10 ⁻⁶	Mo, 10 ⁻⁶	W, 10 ⁻⁶	V, 10 ⁻⁶
-------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------------	------------------------

18	30	400	3	5	5	3	40	20	2	10	30	30
19	50	150	7	3	7	3	30	30	5	10	20	10
20	30	300	5	7	3	0,5	30	40	3	20	40	30

Tun II

1	30	200	12	7	7	0,5	20	10	0,1	5	10	30
2	10	300	7	5	10	2	10	1	3	10	20	10
3	1	50	5	3	3	0,5	5	20	1	2	5	50
4	20	200	10	12	12	2	30	10	0,5	5	10	30
5	30	300	3	1	1	3	50	50	5	20	20	10
6	5	10	5	5	3	1	1	2	1	10	2	50
7	20	200	7	3	5	3	20	20	2	5	10	30
8	50	500	10	7	12	1	10	10	0,5	10	10	5
9	20	100	1	0,5	3	0,5	30	30	2	5	3	30
10	5	300	5	5	5	2	20	20	3	30	30	100
11	20	50	15	7	10	5	70	30	2	2	10	10
12	10	200	7	5	7	2	20	2	0,5	2	2	5
13	20	300	3	0,5	5	0,5	5	20	2	10	10	30
14	50	100	10	10	15	3	30	10	1	20	50	10
15	10	200	5	5	1	2	10	5	2	1	2	10
16	30	100	3	7	5	1	20	30	1	2	10	30
17	20	200	5	3	10	2	50	20	2	20	30	50
18	70	500	7	10	7	3	10	5	1	10	20	10
19	20	750	5	5	7	2	30	10	1	10	10	30
20	30	200	3	3	5	2	20	20	2	1	5	30

Tun III

1	10	200	5	7	5	0,5	10	20	1	20	3	30
2	30	300	1	3	1	3	5	1	2	50	10	10
3	20	200	3	0,5	1	3	5	1	1	30	2	10
4	10	10	7	5	5	7	20	50	0,1	40	20	30
5	40	100	1	0,5	3	1	2	10	2	1	5	5
6	1	20	10	5	7	1	10	5	0,2	20	10	10
7	20	300	3	7	3	3	20	10	1	40	20	50
8	20	20	3	3	3	3	10	30	0,2	30	1	5
9	10	100	5	3	7	5	5	20	5	2	10	10
10	50	400	3	3	3	2	10	5	0,5	40	30	2
11	10	10	10	7	15	5	20	30	1	5	5	10
12	5	200	3	1	3	3	10	10	0,5	40	10	100
13	10	50	3	3	5	2	5	2	1	10	1	5
14	30	100	7	10	10	3	30	10	3	10	2	50
15	10	50	1	1	3	3	10	10	0,5	20	2	10
16	5	100	5	3	1	2	5	20	1	30	20	30
17	30	500	3	5	5	5	50	30	2	20	5	2
18	10	50	7	3	7	3	10	10	1	50	10	10
19	40	100	1	3	1	3	5	2	3	30	5	5
20	20	300	3	1	3	2	20	20	1	40	10	10

№ п/п	Au, 10 ⁻⁸	Ag, 10 ⁻⁸	Pb, 10 ⁻⁴	Cu, 10 ⁻⁴	Zn, 10 ⁻⁴	As, 10 ⁻⁴	Sb, 10 ⁻⁶	Sn, 10 ⁻⁶	Bi, 10 ⁻⁶	Mo, 10 ⁻⁶	W, 10 ⁻⁶	V, 10 ⁻⁶
-------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	------------------------	------------------------

Tun IV

1	20	300	1	3	4	2	10	1	1	20	20	10
2	30	100	7	3	5	3	20	10	2	10	10	30
3	10	10	3	1	5	2	10	5	0,1	30	20	10
4	40	300	7	7	10	5	30	30	1	50	10	50
5	10	20	1	1	3	1	2	2	2	20	20	5
6	30	100	15	7	10	5	50	20	0,2	20	1	70
7	50	200	5	5	7	1	30	10	0,5	50	30	10
8	2	50	3	5	3	5	70	20	0,5	20	20	5
9	10	300	1	0,5	3	0,5	2	1	0,1	30	50	70
10	20	100	10	10	12	3	20	10	0,5	5	10	5
11	5	50	5	5	7	7	10	30	3	20	2	30
12	10	700	3	5	1	1	5	2	0,2	30	20	10
13	70	200	7	10	7	3	20	10	1	75	30	2
14	10	50	3	3	3	0,5	50	20	1	20	5	70
15	20	100	10	7	15	3	5	2	2	20	10	5
16	5	300	3	5	5	1	30	10	0,2	20	5	30
17	40	200	5	3	1	3	10	5	0,5	30	20	2
18	20	500	12	7	7	2	20	20	1	50	10	40
19	30	200	1	3	3	2	10	5	1	20	20	2
20	5	100	7	7	5	1	30	10	0,2	30	10	10

Tun V

1	10	100	12	7	7	3	40	40	4	20	20	10
2	40	300	3	1	1	4	50	20	3	40	40	70
3	20	200	5	10	3	3	30	1	2	20	5	50
4	50	500	7	5	5	4	40	40	3	30	20	10
5	40	200	3	12	3	2	50	30	3	20	30	70
6	10	10	10	5	12	3	20	10	2	10	10	50
7	30	300	7	10	10	1	5	10	0,5	20	20	100
8	5	50	5	7	5	0,5	30	20	5	30	30	30
9	30	400	7	5	10	7	20	5	0,2	20	30	5
10	20	100	12	12	15	2	10	10	2	10	5	70
11	40	500	7	5	7	5	20	30	5	20	20	30
12	70	100	10	15	12	3	30	10	2	30	50	5
13	40	750	3	3	3	0,5	20	50	4	5	10	100
14	30	100	10	10	7	5	70	40	1	30	20	50
15	20	400	10	7	10	2	20	20	4	10	10	70
16	20	200	3	3	5	4	40	50	1	20	20	30
17	40	300	7	7	10	2	30	10	4	10	30	10
18	50	400	5	3	5	3	10	20	4	30	30	70
19	30	400	10	10	7	4	30	30	1	5	10	50
20	20	200	7	1	3	4	40	30	3	30	20	50

Tun VI

1	60	400	10	10	12	3	30	50	5	10	40	10
2	30	500	3	0,5	3	1	20	40	2	20	30	50
3	30	600	5	3	7	5	50	30	4	30	20	100

шафта на результаты геохимической съемки считается незначительным. Величину доверительной вероятности для решения данной задачи можно принять равной 0,95, что соответствует уровню значимости 0,05. Число степеней свободы k_1 равно $n - p$, где n — объем выборки, а p — число групп; k_2 принимается равным $p - 1$.

Если гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, то делается вывод о необходимости раздельной оценки фоновых и минимально аномальных значений содержаний по каждому ландшафту.

ЗАДАЧА 1.11

Оценка условий концентрации полезных минералов в морских осадках с помощью двухфакторного дисперсионного анализа

При изучении условий формирования прибрежно-морских россыпных месторождений производится отбор проб донных морских осадков по профилям, ориентированным поперек берега. Станции, на которых осуществляется опробование, обычно намечаются в соответствии с глубинами моря (3, 4, 5, 6 м и т.д.). В точках опробования исследуется разрез донных отложений и содержания полезных компонентов, в число которых входят ильменит, рутил и циркон. Они могут определяться для слоев, залегающих на разном уровне относительно морского дна. При изучении разреза характеризуются также литологический состав осадков и содержание в них тяжелой фракции.

Для целенаправленного ведения поисковых работ и выбора наиболее перспективных участков необходимо изучить причины возникновения повышенных концентраций тяжелых минералов, в том числе представляющих промышленный интерес. Из теоретических предпосылок известно, что накопление таких минералов может происходить при изменении емкости вдольберегового потока наносов или под действием волнения, которое проявляется в поперечном относительно берега направлении. Таким образом, содержания минералов могут меняться в зависимости от положения профиля (I фактор) или от положения станции относительно берега, т.е. в зависимости от глубины моря (II фактор).

Исходными данными для выполнения работы являются результаты опробования отложений подводного склона на одном из участков побережья Балтийского моря (табл. 29). В качестве анализируемого признака могут рассматриваться содержания тяжелой фракции, ильменита, рутила или циркона по первому или второму слою, а также средние значения этих признаков в обоих слоях.

Требуется: изучить однородность статистической совокупности и оценить влияние на изменчивость содержаний тяжелых минералов в отложениях двух факторов — вдольберегового перемещения потока наносов и сортировки материала под воздействием волнения.

Данные опробования отложений подводного склона

№ п/п	№ профиля	№ станции	Глубина моря, м	№ слоя	Содержание, %				
					тяжелая фракция	ильменит	рутил	циркон	литологический состав
1	1	1125	4	1	1,5	0,28	0,16	0,13	Песок
				2	1,7	0,26	0,15	0,12	"
2	1	1126	5	1	2,1	0,41	0,18	0,14	"
				2	2,0	0,45	0,16	0,12	"
3	1	1127	6	1	6,0	0,67	0,67	0,51	"
				2	5,3	0,51	0,49	0,42	"
4	1	1128	7	1	6,6	0,73	0,99	0,82	"
				2	2,3	0,42	0,19	0,15	"
5	1	1129	8	1	1,8	0,22	0,21	0,18	"
				2	2,4	0,46	0,22	0,21	"
6	2	1131	4	1	1,8	0,34	0,29	0,26	"
				2	1,4	0,33	0,13	0,10	"
7	2	1132	5	1	6,0	0,87	0,67	0,55	"
				2	4,2	0,60	0,43	0,34	"
8	2	1133	6	1	11,7	1,72	1,36	1,23	"
				2	8,2	0,99	0,81	0,85	"
9	2	1134	7	1	3,4	0,43	0,42	0,32	"
				2	3,5	0,62	0,46	0,39	"
10	2	1135	8	1	10,0	1,30	1,36	1,13	"
				2	9,2	1,25	1,28	1,20	"
11	3	1138	4	1	1,8	0,22	0,25	0,21	Песок
				2	1,9	0,30	0,18	0,14	"
12	3	1139	5	1	0,5	0,10	0,07	0,01	"
				2	0,7	0,11	0,08	0,01	"
13	3	1140	6	1	7,9	0,92	0,66	0,46	"
				2	9,0	1,11	1,52	1,20	"
14	3	1141	7	1	8,0	1,11	0,70	0,55	"
				2	7,3	0,88	0,62	0,43	"
15	3	1142	8	1	0,2	0,02	—	—	Гравий
				2	0,2	0,01	—	—	"
16	4	1143	4	1	1,6	0,19	0,22	0,19	Песок
				2	1,9	0,25	0,21	0,20	"
17	4	1144	5	1	0,8	0,07	0,11	0,09	"
				2	0,5	0,06	0,09	0,06	"
18	4	1145	6	1	0,1	0,02	0,01	0,01	Гравий
				2	0,1	0,01	—	—	"
19	4	1146	7	1	—	—	—	—	Торф
				2	—	—	—	—	"
20	4	1147	8	1	—	—	—	—	"
				2	—	—	—	—	"
21	5	1148	4	1	8,8	1,55	1,83	1,64	Песок
				2	5,8	0,71	0,85	0,80	"
22	5	1149	5	1	4,9	0,65	0,56	0,40	"
				2	3,1	0,42	0,45	0,38	"

№ п/п	№ про- филя	№ станции	Глу- бина морья, м	№ слоя	Содержание, %				
					тяже- лая фрак- ция	ильме- нит	рутил	цар- кон	литологиче- ский состав
23	5	1150	6	1	3,3	0,47	0,35	0,26	"
				2	4,8	0,63	0,70	0,59	"
24	5	1151	7	1	1,09	0,16	0,12	0,10	Песок
				2	2,55	0,22	0,23	0,18	"
25	5	1152	8	1	0,5	0,07	0,09	0,08	"
				2	0,01	-	-	-	Гравий
26	6	1181	4	1	2,1	0,33	0,41	0,30	Песок
				2	1,0	0,06	0,03	0,02	"
27	6	1182	5	1	1,0	0,19	0,10	0,08	"
				2	1,1	0,18	0,19	0,16	"
28	6	1183	6	1	1,3	0,22	0,17	0,14	"
				2	1,2	0,25	0,16	0,12	"
29	6	1184	7	1	0,3	0,01	-	-	Песок, гравий
				2	0,2	0,01	-	-	"
30	6	1185	8	1	-	-	-	-	Суглинок
				2	-	-	-	-	"
31	7	1192	4	1	4,0	0,52	0,54	0,44	Песок
				2	5,5	0,61	0,68	0,53	"
32	7	1193	5	1	1,9	0,31	0,24	0,21	"
				2	2,3	0,35	0,32	0,24	"
33	7	1194	6	1	0,9	0,12	0,07	0,05	"
				2	0,6	0,04	0,11	0,09	"
34	7	1195	7	1	1,0	0,14	0,07	0,05	"
				2	1,0	0,08	0,07	0,06	"
35	7	1196	8	1	1,4	0,26	0,12	0,10	"
				2	1,5	0,16	0,17	0,14	"
36	8		4	1	0,9	0,16	0,14	0,11	Песок
				2	1,6	0,30	0,18	0,12	"
37	8		5	1	1,9	0,31	0,32	0,27	"
				2	2,2	0,22	0,19	0,18	"
38	8		6	1	2,3	0,51	0,23	0,18	"
				2	3,6	0,62	0,55	0,40	"
39	8		7	1	1,6	0,23	0,21	0,17	"
				2	1,8	0,25	0,31	0,27	"
40	8		8	1	4,6	0,57	0,36	0,30	"
				2	5,4	0,62	1,09	0,82	"
41	9		4	1	2,2	0,17	0,18	0,11	"
				2	0,9	0,14	0,03	0,02	"
42	9		5	1	0,6	0,08	0,05	0,02	"
				2	0,8	0,09	0,06	0,02	"
43	9		6	1	2,3	0,38	0,22	0,16	"
				2	4,5	0,87	0,83	0,70	"
44	9		7	1	2,3	0,38	0,22	0,16	"
				2	10,0	1,47	2,03	1,01	"
45	9		8	1	5,5	0,69	1,17	1,03	"
				2	5,4	0,62	1,09	0,82	"

Методические указания

Решение задачи отдельным исполнителем проводится по одному признаку - содержанию какого-либо минерала или тяжелой фракции по одному из слоев или их сумме. Всего для ее решения существует 12 вариантов заданий.

Расчеты рекомендуется проводить по схеме двухфакторного дисперсионного анализа. Данные для одного из вариантов задания заносят в табл. 30.

Обозначим номер строки буквой i , а номер столбца буквой j ; общее количество строк будет равно p , а столбцов - q . В данном случае i изменяется от 1 до 9, а j - от 1 до 5. Значение признака, принадлежащее строке i и столбцу j , обозначим как x_{ij} . Вычисляем среднее значение признака в каждой строке (\bar{x}_i) и в каждом столбце (\bar{x}_j):

$$\bar{x}_i = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q x_{ij}; \quad \bar{x}_j = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_{ij}.$$

Оцениваем общее среднее значение признака по выборке в целом:

$$\hat{x} = \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q x_{ij}.$$

Эта величина может быть вычислена также как среднее из средних по строкам или столбцам:

$$\hat{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{x}_i \quad \text{при} \quad \hat{x} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \bar{x}_j.$$

Компоненты дисперсии рассчитывают по строкам:

$$S_1^2 = \frac{q}{p-1} \sum_{i=1}^p (\bar{x}_i - \hat{x})^2,$$

по столбцам:

$$S_2^2 = \frac{p}{q-1} \sum_{j=1}^q (\bar{x}_j - \hat{x})^2,$$

и в целом по выборке:

$$S_3^2 = \frac{1}{(p-1)(q-1)} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \hat{x})^2.$$

Расчеты каждой компоненты дисперсии удобнее всего проводить в таблицах, аналогичных табл. 30.

Вывод о влиянии каждого из факторов на изменчивость содержания тяжелых минералов делается на основании проверки гипотезы о равен-

№ профиля	Содержания тяжелого минерала (фракций)					среднее по глубинам
	по глубинам моря, м					
	4	5	6	7	8	
1						
2						
...						
i						
...						
p						

Среднее по профилям

стве дисперсий ($H_0^I: S_1^2 = S_3^2$ и $H_0^{II}: S_2^2 = S_3^2$). Гипотезу проверяют с помощью критерия Фишера, вычисляемого как отношение большей дисперсии к меньшей:

$$F_I = S_1^2/S_3^2 \text{ и } F_{II} = S_2^2/S_3^2.$$

Если вычисленные значения F не превышают табличные (см. прил. 4) для принятого уровня значимости α и чисел степеней свободы k_1 и k_2 , то гипотезы о равенстве дисперсий принимаются и делается вывод о том, что указанные факторы не влияют на изменчивость и концентрации тяжелых минералов на подводном склоне. Если гипотезы отвергаются, то влияние данных факторов или одного из них считается установленным.

Гипотезы рекомендуется проверять для уровня значимости 5%. Число степеней свободы для F_I составит $k_1 = p - 1 = 8$ и $k_2 = (p - 1)(q - 1) = 32$; для F_{II} $k_1 = q - 1 = 4$ и $k_2 = (p - 1)(q - 1) = 32$.

ЗАДАЧА 1.12

Проверка гипотезы о влиянии степени метасоматического изменения вмещающих пород на их петрофизические свойства с помощью двухфакторного дисперсионного анализа

На редкометалльном месторождении отмечены процессы предрудного метасоматоза, выразившиеся в появлении новообразованного альбита, карбонатов и кварца.

Высказано предположение о том, что предрудный метасоматоз привел к изменению петрофизических свойств пород и явился благоприятным фактором для рудоотложения. В табл. 31 приведены результаты испытаний штуфных проб, отобранных из пород различного состава. По степени метасоматических изменений породы разделены на три класса: 1) слабо измененные; 2) средне измененные; 3) сильно измененные.

Проверка гипотезы о влиянии степени метасоматической проработки на петрофизические свойства пород затруднена ввиду разнообразия вмещающих пород, различия их исходных петрофизических свойств и малого количества проб по каждой разновидности пород. Решить эту задачу можно с помощью двухфакторного дисперсионного анализа. В качестве первого фактора в данной задаче выступает состав пород, а в качестве второго фактора — степень их метасоматического изменения.

Работа выполняется бригадой студентов из 5 чел. Каждый студент проверяет гипотезу для одного из петрофизических свойств: модуля Юнга, модуля сдвига, коэффициента Пуассона, объемной массы, или эффективной пористости.

Для выполнения задания можно воспользоваться методическими указаниями к задаче 1.11.

Таблица 31

Петрофизические свойства пород

Горные породы	Степень изменения	Количество проб	Модуль, 10^5 кг/см ²		Коэффициент Пуассона, м	Объемная масса, г/см ³	Эффективная пористость, %
			Юнга	сдвига			
Аргиллиты	1	4	7,85	3,49	0,130	2,808	0,488
	2	4	—	—	—	2,782	0,735
	3	4	5,70	2,46	0,161	2,771	1,120
Алевриты	1	5	7,89	3,25	0,240	2,766	0,412
	2	5	7,43	2,88	0,295	2,805	0,542
	3	6	6,51	2,69	0,295	2,808	0,827

Горные породы	Степень изменения	Количество проб	Модуль, 10^5 кг/см ²		Кoeffициент Пуассона, м	Объемная масса, г/см ³	Эффективная пористость, %
			Юнга	сдвига			
Песчаники	1	12	8,18	3,40	0,203	2,719	0,315
	2	5	8,12	3,32	0,220	2,737	0,532
	3	4	7,05	2,82	0,296	2,790	0,827
Переслаивание аргиллитов с песчаниками	1	5	8,06	3,46	0,159	2,736	0,437
	2	8	7,56	3,24	0,185	2,700	0,594
	3	10	6,87	2,69	0,257	2,761	1,318
Переслаивание алевролитов с песчаниками	1	3	8,65	3,43	0,245	2,788	0,239
	2	2	8,55	3,37	0,251	2,805	0,588
	3	3	6,46	2,52	0,310	2,792	1,012
Переслаивание аргиллитов, алевролитов, песчаников	1	3	9,03	3,53	0,258	2,783	0,402
	2	3	8,77	3,51	0,245	2,786	0,629
	3	2	7,08	3,10	0,356	2,774	0,743
Фельзиты	1	2	8,23	3,45	0,243	2,630	0,330
	2	5	7,52	3,33	0,131	2,682	1,029
	3	2	6,36	2,76	0,155	2,679	1,178
Микродиориты	1	4	8,12	3,29	0,246	2,812	0,449
	3	4	5,88	2,26	0,290	2,829	2,235
Спессартиты	1	1	10,10	4,96	0,085	2,812	0,150
	3	2	9,01	3,65	0,232	2,885	0,390
Кварцевые порфиры	1	2	8,14	3,51	0,169	2,740	0,486
	3	5	7,08	3,18	0,134	2,720	0,661
Кузелиты	1	3	9,12	3,75	0,210	2,827	0,308
	3	4	7,52	3,00	0,248	2,798	0,705

Раздел 2

ДВУМЕРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

ЗАДАЧА 2.1

Оценка содержаний попутных полезных компонентов в полиметаллических рудах с помощью уравнений регрессии

В рудах полиметаллического месторождения, кроме основных полезных компонентов — цинка, свинца и меди, содержатся попутные полезные компоненты — золото, серебро, кадмий, сурьма, барий и сульфидная сера, извлекаемые из руд в процессе переработки. При наличии корреляционной связи между концентрациями основных и попутных компонентов содержания последних по отдельным участкам месторождения могут оцениваться по присутствию основных компонентов, что позволяет существенно уменьшить затраты на анализы. Для решения вопроса о возможности применения корреляционного метода подсчета запасов попутных компонентов и расчета уравнений регрессии используются результаты анализов на основной и попутные компоненты по пробам (табл. 32—34).

Таблица 32

Содержание основных и попутных полезных компонентов в рудах полиметаллического месторождения (участок I)

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd, 10^{-4} %	Sb, 10^{-4} %	Ba, %	S _{сул.} , %
1	0,26	1,73	8,67	0,2	32,8	32	560	9,92	9,10
2	0,20	1,66	4,47	0,1	28,8	19	108	5,07	6,36
3	1,26	3,29	2,02	0,6	126,8	4	40	19,95	10,0
4	0,34	3,08	8,46	0,4	28,8	33	660	9,41	33,19
5	0,06	0,21	0,42	0,2	16,8	2	73	2,54	17,67
6	0,11	1,50	3,20	0,4	39,6	7	223	7,63	8,96
7	0,14	1,60	3,49	0,1	19,6	9	118	6,87	10,34
8	0,09	0,65	1,70	0,2	35,2	4	60	2,18	8,56
9	0,26	2,05	3,82	0,2	35,7	15	103	7,34	20,95
10	0,29	2,05	4,66	0,1	12,4	13	229	8,01	13,66
11	0,12	1,43	3,30	0,1	24,8	10	96	10,15	1,94
12	0,02	0,55	1,85	0,1	11,6	7	49	2,19	2,10
13	0,12	0,25	2,60	0,1	11,6	9	31	3,06	1,76
14	0,38	0,08	5,53	0,4	52,8	22	220	4,00	2,48
15	0,30	0,14	8,41	0,4	18,4	34	434	3,36	9,20
16	0,02	0,46	1,76	0,2	19,6	7	15	2,24	2,46
17	0,34	3,08	8,46	0,4	20,8	32	410	9,41	33,00
18	1,26	3,29	22,82	0,6	131,4	84	2200	10,95	30,04

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd, 10 ⁻⁴ %	Sb, 10 ⁻⁴ %	Ba, %	S _{суп} , %
19	2,22	0,66	15,88	0,1	106,6	62	464	0,92	17,60
20	0,75	0,78	4,20	0,1	91,2	16	55	2,56	4,60
21	4,64	0,37	13,48	0,4	63,2	51	684	6,29	13,0
22	3,64	0,85	35,97	0,8	94,4	160	3160	5,58	28,0
23	0,95	0,56	8,02	0,2	122,0	35	272	3,25	7,00
24	0,09	0,66	1,47	0,1	10,0	5	57	3,01	0,56
25	0,02	0,46	0,85	0,1	3,8	3	9	1,66	0,80
26	0,02	0,39	1,18	0,1	5,0	4	15	2,21	1,40
27	0,15	0,08	2,90	0,1	10,0	40	31	4,19	1,20
28	0,25	0,06	2,90	0,1	12,4	10	50	3,12	0,60
29	1,17	0,12	9,25	0,1	112,8	37	408	2,52	8,20
30	0,06	0,06	1,00	0,1	7,0	3	26	1,94	1,68
31	0,05	0,02	1,58	0,1	8,4	6	71	2,45	1,30
32	0,23	0,09	3,12	0,1	26,0	14	71	4,84	1,30
33	0,09	0,05	0,63	0,1	11,0	3	35	4,10	0,46
34	0,15	0,12	0,90	0,1	12,8	3	105	4,81	0,80
35	0,06	0,75	1,71	0,1	16,8	6	93	4,21	2,60
36	0,10	0,10	3,20	0,1	4,2	12	133	3,41	4,60
37	0,44	2,32	8,20	0,1	68,8	31	317	27,78	12,28
38	0,08	0,49	1,05	0,1	27,0	3	100	1,73	1,40
39	0,02	0,22	0,65	0,4	10,2	2	33	1,73	0,80
40	0,02	0,46	1,30	0,1	7,2	4	55	1,89	1,56
41	0,02	0,47	0,94	0,1	21,0	2	144	1,88	1,70
42	1,06	5,61	29,30	0,8	97,6	101	3100	23,82	30,47
43	0,58	4,51	18,28	2,2	119,2	62	2310	18,53	15,56
44	0,54	3,41	6,15	0,4	141,2	26	920	35,00	12,32
45	0,11	0,83	1,92	0,1	23,6	6	220	2,00	3,14
46	0,08	3,21	7,44	1,4	38,0	28	164	9,98	10,14
47	0,52	1,69	3,30	0,2	64,2	13	56	6,65	4,40
48	0,3	7,02	24,37	0,2	160,0	96	1980	19,92	29,20
49	0,26	1,69	2,60	0,4	33,0	10	164	7,76	3,60
50	0,37	5,61	11,34	0,4	90,4	38	638	9,00	14,00

Таблица 33

Содержание основных и попутных полезных компонентов
в рудах полиметаллического месторождения (участок 2)

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd, 10 ⁻⁴ %	Sb, 10 ⁻⁴ %	Ba, %	S _{суп} , %
1	0,02	0,69	1,40	0,05	0,05	5	5	0,05	1,16
2	0,58	8,40	7,79	0,08	80,4	3	80	16,10	8,26
3	0,10	0,89	1,78	0,03	0,05	5	1	0,14	1,43
4	0,11	1,13	1,63	0,03	0,05	5	1	0,12	1,46
5	0,18	0,48	1,78	0,48	5,20	5	1	0,15	1,35
6	0,16	1,29	1,73	0,06	12,80	5	1	0,10	2,35
7	0,21	0,55	0,91	0,04	8,00	4	1	0,10	3,67
8	0,02	0,19	0,45	0,03	0,05	2	52	0,12	2,09

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd, 10 ⁻⁴ %	Sb, 10 ⁻⁴ %	Ba, %	S _{суп} , %
9	0,22	2,85	3,13	0,30	100,00	12	620	6,10	3,02
10	0,02	0,72	1,54	0,01	0,05	4	5	0,24	3,40
11	0,13	1,02	1,73	0,03	0,05	6	5	0,20	1,44
12	0,06	0,53	1,18	0,03	0,05	4	1	0,14	1,03
13	0,07	0,26	1,54	0,20	4,80	5	5	0,12	2,98
14	0,05	0,64	2,30	0,04	4,00	5	5	0,05	6,97
15	0,27	1,69	6,75	0,10	10,00	32	125	10,05	4,90
16	0,02	0,44	1,29	0,80	17,20	3	5	0,05	2,82
17	0,08	2,56	8,57	0,40	120,00	31	45	23,00	16,11
18	0,15	0,52	2,82	0,40	21,60	11	5	2,16	3,71
19	0,09	0,52	1,26	0,10	10,80	4	5	0,16	1,78
20	0,14	1,74	5,52	1,00	50,00	12	40	8,05	6,85
21	0,09	0,39	0,93	0,20	0,05	2	20	0,23	2,07
22	0,12	1,06	2,60	0,10	30,00	7	20	2,23	6,07
23	0,02	2,00	5,30	0,10	20,20	18	30	15,08	11,88
24	0,02	0,83	1,90	0,05	10,00	7	20	0,40	3,04
25	0,11	1,64	5,40	0,10	104,80	13	250	5,40	10,56
26	0,06	1,37	3,50	0,10	0,02	11	30	9,84	9,54
27	0,37	1,76	5,00	0,10	10,80	14	30	10,25	4,34
28	0,06	0,56	1,52	0,05	2,00	4	1	0,10	2,37
29	0,06	0,78	1,68	0,10	5,60	4	20	0,15	2,00
30	0,08	1,09	2,07	0,05	5,20	4	20	0,48	3,42
31	0,34	8,00	18,39	0,10	53,20	67	15	20,05	12,98
32	0,10	5,70	8,53	6,60	133,20	29	80	19,11	6,48
33	0,02	0,72	2,50	0,10	29,20	7	20	1,06	9,94
34	0,08	0,70	1,78	0,05	15,20	7	50	0,12	1,62
35	0,08	0,86	2,00	0,60	11,6	6	10	2,12	3,54
36	0,09	2,55	6,95	0,80	112,00	23	100	19,50	12,69
37	0,02	1,20	3,20	0,20	29,20	10	80	5,42	8,93
38	0,70	0,02	3,73	0,05	10,80	7	112	4,38	12,43
39	0,43	4,30	11,49	0,40	58,00	43	50	18,1	8,76
40	0,18	0,96	2,80	0,10	12,00	7	2	0,27	3,52
41	0,11	1,00	1,52	0,05	9,20	7	10	0,23	1,79
42	1,13	5,98	12,58	0,10	56,80	50	80	19,22	10,74
43	0,16	0,82	2,62	0,80	0,02	60	1	0,26	2,95
44	0,26	2,20	4,90	0,01	63,6	18	130	8,14	4,19
45	0,82	7,63	13,10	0,10	59,60	56	50	17,05	8,86
46	0,09	2,48	2,23	0,10	44,00	5	10	0,20	2,70
47	0,18	0,48	3,02	0,01	0,02	11	20	5,14	3,53
48	0,22	0,91	3,10	0,05	6,40	10	1	0,34	2,82
49	0,07	0,74	1,93	0,05	2,80	4	5	0,13	1,65
50	0,02	0,75	1,51	0,05	3,60	5	1	0,26	1,77

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd _{10⁻⁴%}	Sb _{10⁻⁴%}	Ba, %	S _{сул.} %
1	0,02	0,08	0,30	0,1	4,0	2	34	0,20	2,54
2	0,02	0,43	1,25	0,2	22,2	4	15	1,12	2,18
3	0,24	0,43	9,68	0,4	30,4	40	103	25,24	9,41
4	0,48	1,43	30,52	1,2	80,4	114	408	1,66	35,58
5	0,05	0,25	0,58	0,1	22,0	4	10	3,50	1,73
6	0,05	0,35	1,16	0,1	24,2	5	64	0,62	1,88
7	0,18	1,48	2,50	0,1	42,4	13	49	3,40	7,63
8	0,07	0,53	1,54	0,1	5,8	7	31	2,60	2,45
9	0,15	1,51	4,25	0,3	25,6	17	73	3,80	5,07
10	0,06	0,60	1,28	0,1	6,0	6	55	0,74	2,24
11	0,23	0,69	2,55	0,1	11,4	13	108	0,25	3,36
12	0,44	0,35	30,17	1,00	46,0	117	418	0,82	4,81
13	0,21	0,65	6,02	0,4	23,2	26	100	0,78	7,34
14	0,15	0,13	2,55	0,1	14,0	10	96	0,98	4,00
15	0,02	0,21	0,55	0,1	2,6	4	57	0,28	1,73
16	0,02	0,05	0,59	0,1	1,8	7	9	1,02	1,89
17	0,30	0,40	3,80	0,4	25,2	19	223	1,27	6,87
18	0,02	0,28	0,48	0,1	3,0	6	15	0,24	1,94
19	0,20	3,42	21,19	0,4	54,8	80	31	10,26	19,95
20	0,33	4,10	15,47	0,4	52,8	54	50	11,30	23,82
21	0,36	2,77	6,47	0,2	50,0	22	316	0,28	9,41
22	0,08	1,90	5,51	0,1	14,8	16	26	1,58	4,21
23	0,63	3,65	13,55	0,2	56,0	51	408	13,43	17,78
24	0,42	7,16	19,58	0,4	90,4	61	371	14,05	25,98
25	0,12	2,20	4,33	0,2	38,4	10	-	0,39	7,76
26	0,89	8,50	21,70	3,2	124,40	83	684	6,24	26,65
27	0,10	1,00	2,10	0,1	2,8	5	71	1,2	3,25
28	0,38	2,62	7,63	0,2	40,0	3	272	34,05	8,01
29	0,09	0,57	1,62	0,1	4,0	7	93	1,78	2,19
30	0,15	1,60	2,25	0,1	34,0	9	33	1,94	3,12
31	0,38	5,73	14,51	0,2	73,6	55	220	6,00	18,22
32	0,02	0,08	0,20	0,1	1,0	1	33	1,12	2,00
33	0,53	1,45	8,65	0,1	61,2	4	100	15,80	9,92
34	0,24	1,05	3,67	0,1	15,2	17	105	1,32	4,84
35	0,88	10,82	14,00	0,7	42,8	50	560	13,25	18,53
36	0,44	11,55	17,85	1,0	156,0	79	228	5,10	26,29
37	0,02	0,17	1,38	0,1	12,8	1	17	2,18	4,10
38	1,12	4,10	31,00	1,0	118,8	100	2200	0,58	35,58
39	0,83	2,47	22,92	1,4	97,0	80	660	0,32	19,95
40	0,54	2,10	7,37	0,4	30,0	26	560	1,52	10,56
41	0,19	0,75	2,43	0,1	24,6	9	144	1,96	3,06
42	0,06	0,16	2,40	0,2	4,6	5	55	1,74	2,21
43	0,07	0,43	0,95	0,1	11,0	4	23	2,24	3,41
44	0,08	0,28	0,57	0,1	59,0	3	31	2,18	5,00
45	0,10	0,18	1,65	0,1	7,4	6	22	1,44	1,66

№ п/п	Cu, %	Pb, %	Zn, %	Au, г/т	Ag, г/т	Cd _{10⁻⁴%}	Sb _{10⁻⁴%}	Ba, %	S _{сул.} %
46	0,07	0,41	2,30	0,1	17,6	10	92	0,16	3,01
47	0,06	0,09	0,40	0,2	5,2	3	56	0,53	2,52
48	0,39	0,02	7,18	0,4	6,2	38	198	0,42	10,15
49	0,15	0,65	3,67	0,2	0,6	15	164	0,50	4,19
50	0,02	0,07	0,30	0,1	0,2	1	30	0,18	0,85

Требуется:

- 1) проверить гипотезу о наличии корреляционной связи между основными и попутными компонентами;
- 2) определить, с каким из основных компонентов наиболее тесно связан каждый попутный компонент, оценить вид, тип и крепость этой связи;
- 3) рассчитать уравнение (или систему уравнений) регрессии для оценки содержаний попутных компонентов по основным.

Работа выполняется бригадой студентов из 6 чел. Каждый студент решает задачу по одному из попутных компонентов. Пункты 1 и 2 целесообразно выполнить с помощью графических методов.

Методические указания

1. Для каждого попутного компонента необходимо построить точечные диаграммы (корреляционные поля точек), отмечая по оси абсцисс содержания основных компонентов (x), а по оси ординат – содержания попутных (y). Этот график позволяет оценить однородность исследуемой выборки и выявить аномальные значения. Аномальными признаются пары x и y, расположенные на значительном удалении от основной массы точек. Такие значения целесообразно исключить из выборки. Если на диаграмме отчетливо выделяется несколько разобщенных групп точек, данную выборку целесообразно разделить на соответствующее количество самостоятельных выборок и в дальнейшем анализировать каждую из них отдельно.

2. Для предварительной оценки силы связи на точечных диаграммах необходимо провести линии, соответствующие медианам значений x и y, разделив ими корреляционное поле на четыре квадранта. Приближенную оценку коэффициента корреляции рассчитывают по формуле

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

где n₁ – суммарное число точек в первом и третьем квадрантах; n₂ – суммарное число точек во втором и четвертом квадрантах.

Значимость эмпирической оценки коэффициента корреляции при доверительной вероятности 0,95 и объеме выборки (N), большем 50 пар, можно оценить путем сравнения с критическим значением (r_k), вычисляемым по формуле

$$r_k = (\sqrt{1/N}) \cdot 1,96.$$

Если $|r| > r_k$, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи отвергается.

3. Вид корреляционной зависимости (линейная, нелинейная, параболическая и т.п.) определяется по эмпирической линии регрессии. Для ее построения значения y группируются по классам значений x . По каждому классу рассчитывают пары средних значений x и y , которые выносят на точечную диаграмму и соединяют прямыми линиями. Длина интервалов группирования может быть различной. Разделение на классы целесообразно произвести так, чтобы в каждый класс попадало не менее пяти пар значений, а число классов при этом было не меньше 5.

4. При наличии значимой линейной корреляционной зависимости уравнение регрессии для оценки содержания попутных компонентов рассчитывают по основному компоненту, для которого коэффициент корреляции с данным попутным компонентом максимален. Коэффициенты уравнения регрессии вида $y = a + bx$ рассчитываются по следующим формулам:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}; \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

5. Значительные отклонения эмпирической линии регрессии от принятой указывают на возможное наличие нелинейной корреляционной связи, сила которой оценивается корреляционным отношением

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_j)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}},$$

где \bar{y}_j — среднее значение y в классах группирования по x (см. п. 3).

Значимость отличия корреляционного отношения от нуля проверяется с помощью критерия

$$\theta_y = \frac{\eta_{y/x}^2 (N - m - 2)}{(1 - \eta_{y/x}^2)(m - 2)} \sqrt{\frac{(m - 2)(N - m - 4)}{2(N - 4)}},$$

где m — количество классов группирования при вычислении значений \bar{y}_j .

Если расчетное значение критерия θ_y окажется больше критического, то гипотеза об отсутствии нелинейной корреляционной связи отвергается. Для доверительной вероятности 0,95 и при объеме выборки более 50 критическое значение критерия θ равно 1,96.

Нелинейная зависимость обычно преобразуется в линейную путем замены значений одного или обоих параметров их логарифмами или разделением исследуемой совокупности на несколько классов по значениям x , в пределах которых эмпирическая линия регрессии близка к прямой.

В первом случае содержание попутного компонента можно оценить по одному из следующих уравнений:

$$y = a + b \lg x; \quad \lg y = a + bx; \quad \lg y = a + b \lg x.$$

При разделении совокупности на классы расчет можно проводить по системе линейных уравнений.

6. Если для какого-либо попутного компонента связь ни с одним из основных компонентов не устанавливается, следует сделать вывод о том, что корреляционный способ подсчета запасов в данном случае применить нельзя.

ЗАДАЧА 2.2

Применение регрессионного анализа для оценки физических свойств апатит-нефелиновых руд

На месторождении апатит-нефелиновых руд основные минералы — концентраты полезных компонентов — апатит и нефелин являются главными породообразующими минералами. В качестве акцессорных минералов в рудах содержится титаномagnetит и титанит.

В результате изучения штучных проб установлено, что объемная масса руд колеблется в довольно широком диапазоне — от 2,86 до 3,47 т/м³. Так как этот параметр входит в формулу подсчета запасов руды и полезных компонентов, необходимы достаточно точные его оценки по каждому подсчетному блоку. В то же время количество проб, по которым определены физические свойства руд, по отдельным блокам невелико.

Высказано предположение о возможной зависимости объемной массы и других физических свойств руд от содержания в них основных полезных компонентов — P_2O_5 и Al_2O_3 , а также от содержания TiO_2 , входящего в состав наиболее распространенных тяжелых акциссорных минералов. При наличии такой зависимости надежные оценки средних значений физических свойств по блокам можно получить с помощью уравнений регрессии, используя результаты анализов многочисленных проб, отобранных для определения химического состава руд.

Требуется:

1) проверить гипотезу о наличии корреляционных связей между физическими свойствами и содержанием P_2O_5 , Al_2O_3 и TiO_2 ;

2) определить, с содержанием какого оксида наиболее тесно связано то или иное физическое свойство;

3) рассчитать уравнение или систему уравнений регрессии для оценки средних значений физических свойств руд.

Задание выполняется бригадой студентов из 13 чел. Каждый студент выполняет исследование по одному из вариантов соотношения — физическое свойство — содержание оксида или минерала. Результаты испытаний штучных проб и химических анализов по ним для двух участков месторождения приведены в табл. 35 и 36.

Для решения задачи можно воспользоваться методическими указаниями к задаче 2.1.

Таблица 35

Свойства апатит-нефелиновых руд (участок 1)

№ пробы	Объемная масса, т/м ³	Влажность, %	Пористость, %	Содержание, %		
				P_2O_5	TiO_2	Al_2O_3
1	3,07	0,060	1,44	30,39	0,52	6,96
2	3,12	0,080	1,90	25,55	1,92	8,79
3	3,07	0,040	1,22	21,06	2,15	7,35
4	3,07	0,030	1,44	26,17	1,31	9,44
5	3,01	0,090	1,76	23,08	1,21	12,13
6	3,01	0,150	2,13	18,68	1,75	13,32
7	3,04	0,070	1,55	14,92	2,79	13,40
8	3,11	0,050	1,14	32,30	0,83	5,63
9	3,00	0,100	1,47	24,30	0,39	10,87
10	3,13	0,040	1,24	25,17	1,66	8,69
11	3,07	0,030	0,91	30,34	0,49	7,69
12	2,97	0,050	0,78	19,97	1,55	13,75
13	2,98	0,070	1,11	22,91	0,71	13,29
14	3,00	0,050	0,77	14,51	1,73	15,74
15	3,21	0,050	1,17	39,06	0,25	1,36
16	3,19	0,070	1,76	36,11	0,83	2,40
17	3,21	0,050	1,92	34,56	0,46	1,91
18	3,21	0,090	1,63	34,46	0,73	2,64

№ пробы	Объемная масса, т/м ³	Влажность, %	Пористость, %	Содержание, %		
				P_2O_5	TiO_2	Al_2O_3
19	3,08	0,030	1,14	24,25	1,49	9,11
20	3,21	0,040	1,07	38,70	0,32	1,50
21	3,21	0,080	3,66	39,32	0,54	1,50
22	3,20	0,080	1,65	38,34	0,55	1,95
23	3,07	0,080	1,47	31,43	0,27	7,25
24	3,12	0,010	0,92	33,43	0,15	5,50
25	3,04	0,070	1,32	28,08	0,83	9,22
26	2,92	0,050	0,98	14,10	0,54	16,15
27	3,03	0,160	0,84	24,65	1,28	11,06
28	2,86	0,060	0,96	12,50	1,19	17,38
29	3,15	0,030	1,10	36,60	1,59	5,73
30	3,23	0,060	1,48	37,93	0,51	1,62
31	2,96	0,090	2,22	15,69	1,96	16,07
32	2,99	0,110	1,76	19,97	1,71	10,74
33	3,09	0,140	0,73	29,52	1,06	7,15
34	3,07	0,060	1,61	24,56	1,65	9,50
35	2,95	0,90	1,40	25,59	0,36	11,56
36	3,13	0,140	1,61	22,86	2,81	6,62
37	3,16	0,140	1,10	31,11	1,25	4,23
38	3,05	0,090	2,53	28,62	1,84	7,67
39	3,19	0,230	2,27	40,19	0,42	0,98
40	2,90	0,090	1,11	15,69	1,21	15,62

Таблица 36

Свойства апатит-нефелиновых руд (участок 2)

№ пробы	Объемная масса, т/м ³	Содержание, %			
		P_2O_5	TiO_2	Al_2O_3	Апатит
1	3,07	26,79	0,79	9,47	65,66
2	2,92	17,21	1,48	16,17	42,18
3	2,82	12,99	0,97	20,25	31,84
4	2,86	10,64	1,19	21,09	26,08
5	2,94	15,52	1,52	16,93	38,04
6	2,97	20,62	0,69	13,84	50,54
7	3,02	24,22	0,54	11,35	59,36
8	3,01	24,59	0,74	12,38	60,27
9	3,12	28,53	1,19	5,38	69,93
10	3,11	31,29	1,34	6,20	76,69
11	3,04	22,13	1,62	13,55	54,24
12	3,01	23,71	1,03	10,69	58,11
13	3,11	29,91	0,68	6,64	73,31
14	3,18	30,37	0,78	6,01	74,44
15	3,14	29,45	0,77	6,77	72,18
16	3,37	7,14	21,67	7,15	17,50

№ пробы	Объемная масса, т/м ³	Содержание, %			
		P ₂ O ₅	TiO ₂	Al ₂ O ₃	Апатит
17	3,36	6,45	23,08	6,28	15,81
18	3,36	6,68	22,68	6,14	17,37
19	3,34	8,65	19,34	7,27	21,20
20	3,34	7,47	23,02	5,01	18,31
21	2,96	16,92	0,89	17,18	41,47
22	3,11	11,02	8,40	11,86	27,01
23	3,08	6,03	11,74	14,47	14,78
24	3,30	7,82	9,45	9,29	19,17
25	3,19	6,32	8,64	12,74	15,49
26	3,19	6,55	11,51	11,60	16,05
27	3,15	8,21	10,29	13,27	20,12
28	2,98	6,11	6,11	18,12	14,98
29	3,11	8,71	9,25	12,83	21,35
30	3,32	7,01	9,08	9,35	17,18
31	3,22	10,31	9,62	11,08	25,27
32	3,10	9,69	10,63	13,39	23,51
33	3,50	6,53	17,89	6,65	16,01
34	3,18	11,28	6,01	11,57	27,65
35	3,22	15,85	6,75	9,23	38,85
36	3,25	13,21	6,88	9,10	32,38
37	3,36	13,69	7,33	7,53	33,55
38	3,19	7,89	7,09	11,88	19,34
39	3,32	10,10	10,53	9,48	24,76
40	3,33	1,99	6,31	12,52	4,88
41	3,47	9,14	14,61	7,78	22,40
42	3,20	6,21	10,09	10,08	15,22
43	3,20	5,70	7,49	12,58	14,14
44	2,97	2,10	3,68	19,63	5,15
45	3,02	3,12	4,99	16,67	7,87
46	3,38	8,61	11,41	7,72	21,10

ЗАДАЧА 2.3

Проверка гипотезы о наличии корреляционной связи между свойствами геологических объектов с помощью рангового коэффициента корреляции

В разрезе сохранившейся части древнего вулкана изучено 15 лавовых потоков в направлении от подошвы к кровле разреза. Каждый из них опробован на восемь химических элементов. Средние содержания элементов в лавах каждого потока приведены в табл. 37. Исследования проводились с целью выяснения закономерностей изменения содержания элементов в магматическом очаге за период деятельности вулкана по составу лавовых потоков, положение которых в разрезе соответству-

Среднее содержание оксида или химического элемента в потоке

№ п/п	MgO, %	Na ₂ O, %	CaO, %	K ₂ O, %	Ba, г/т	Ga, г/т	Sr, г/т	Se, г/т
1	3,66	2,57	9,05	2,31	130	15	39,2	39,1
2	2,71	2,03	7,49	1,51	170	19	37,5	37,7
3	3,13	2,33	8,86	2,12	200	21	35,8	36,0
4	3,48	2,74	7,60	1,54	350	20	34,2	32,5
5	4,20	2,51	7,70	2,16	180	18	32,5	33,2
6	7,35	2,78	7,52	1,92	60	30	36,0	30,7
7	4,03	2,75	6,70	1,87	80	25	36,4	28,5
8	5,83	3,26	7,12	1,90	90	28	33,7	27,6
9	4,39	2,89	6,93	1,74	180	17	41,6	27,6
10	3,5	3,25	6,81	1,66	120	23	38,2	27,5
11	4,6	3,10	6,13	1,33	160	21	37,1	24,6
12	3,66	3,27	5,99	1,37	70	16	41,8	28,0
13	3,24	3,37	5,88	1,60	195	18	42,5	28,0
14	3,40	2,67	6,92	1,25	170	29	33,8	25,1
15	3,39	3,29	6,62	1,52	170	31	39,1	26,0

ет очередности поступления на дневную поверхность вулканического материала.

Методические указания

В связи с малым числом наблюдений и относительным характером оценки возраста лавовых потоков для решения данной задачи целесообразно использовать ранговый коэффициент корреляции Спирмена.

Предварительные расчеты при сравнении содержаний пар элементов оформляются в виде табл. 38 в следующей последовательности.

1. В графы 2 и 4 записывают содержания сравниваемых элементов по каждому потоку в последовательности от более древнего к более молодому.

2. Значения содержаний по каждому элементу ранжируют в порядке возрастания. Минимальному содержанию для данного элемента присваивают ранг 1, а максимальному — ранг, равный общему количеству сравниваемых пар (N). Ранги записывают в графы 3 и 5. При встрече нескольких лавовых потоков с одинаковым содержанием элементов им присваивается один и тот же ранг, равный среднему арифметическому из соответствующих им рангов.

3. Для каждой пары рассчитывают разности рангов и квадрат разности, которые записывают в графы 6 и 7.

4. При проверке гипотезы о наличии корреляционной связи между содержанием какого-либо элемента и возрастом лавовых потоков количество операций уменьшается, а графы 4 и 5 сокращаются, так как в графе 1 уже записаны ранги возрастов лавовых потоков.

5. Выборочную оценку коэффициентов ранговой корреляции Спирмена можно рассчитать по формуле

Расчет рангового коэффициента корреляции

№ п/п	Элемент 1		Элемент 2		Разность рангов	Квадрат раз- ности рангов
	Содержа- ние	Ранг	Содержа- ние	Ранг		
1	2	3	4	5	6	7
1						
⋮						
⋮						
⋮						
N						

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^N d_i^2}{N(N^2 - 1)},$$

где $\sum_{i=1}^N d_i^2$ — сумма квадратов разностей рангов; N — число пар, участвующих в расчете.

При наличии нескольких потоков с одинаковыми содержаниями используется более сложная формула

$$r = 1 - \frac{6 \left(\sum_{i=1}^N d_i^2 + T_x + T_y \right)}{N(N^2 - 1)},$$

где T_x и T_y — поправки за счет повторяющихся значений по первому и второму элементам,

$$T_{x,y} = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^m (l_t^3 - l_t),$$

где l_t — число данных с повторяющимися содержаниями элемента; m — число групп с повторяющимися значениями.

6. Если оценка рангового коэффициента корреляции по абсолютной величине превысит критическое значение

$$r_d = \frac{\psi(1 - \alpha)}{\sqrt{N - 1}},$$

где $\psi(1 - \alpha)$ — функция, обратная функции нормального распределения; α — уровень значимости; N — число пар наблюдений, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи отвергается.

ЗАДАЧА 3.1

Выделение ассоциаций химических элементов иерархическим методом (кластер-анализ)

В одном из районов выявлено месторождение золота, приуроченное к зоне развития калиевых метасоматитов, а также ряд непромышленных по масштабу проявлений золоторудной и полиметаллической минерализации.

В рудах месторождения и окружающих их ореолах рассеяния золото тесно ассоциирует с оловом и мышьяком, а на верхних горизонтах также с серебром, свинцом и сурьмой. Для окружающих неизмененных пород характерна положительная корреляционная связь между калием, ураном и торием. Непосредственно вблизи рудных тел в результате калиевого метасоматоза эта связь нарушается.

Данные особенности месторождения могут быть использованы для разбраковки многочисленных геохимических аномалий, выявленных в этом районе при проведении металлотрической съемки.

К перспективным должны быть отнесены в первую очередь комплексные геохимические аномалии с характерными для месторождения ассоциациями элементов, пространственно совпадающие с участками проявления калиевого метасоматоза.

Парные коэффициенты корреляции химических элементов по аномальным участкам приведены в табл. 39.

Таблица 39

Коэффициенты корреляции содержаний химических элементов по аномальным участкам

Эле- менты	Участки												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K-U	-0,34	0,51	0,22	0,53	0,86	0,01	0,11	-0,25	0,43	0,40	0,63	0,65	0,78
K-Th	-0,17	0,62	0,37	0,79	0,04	0,32	0,62	0,15	0,08	0,00	0,73	0,84	0,35
K-Au	0,06	0,02	0,30	0,18	0,68	0,07	0,07	-0,01	0,04	0,26	0,59	0,16	0,26
K-Ag	0,67	0,25	0,38	0,02	0,18	0,74	0,34	0,69	0,61	0,19	0,77	0,80	0,50
K-Sn	0,34	0,12	0,48	0,24	0,39	0,07	0,05	0,15	0,04	0,01	0,30	0,51	0,30
K-As	0,13	0,30	0,29	0,13	0,35	0,29	0,33	0,01	0,45	0,03	0,21	0,42	0,37
K-Sb	0,22	0,31	0,04	0,20	0,68	0,27	0,35	0,23	0,51	0,14	0,23	0,33	0,68
K-Pb	0,33	0,51	0,15	0,44	0,04	0,81	0,09	0,22	0,03	0,17	0,65	0,84	0,11
U-Th	0,87	0,34	0,48	0,74	0,19	0,35	0,29	0,90	0,15	0,31	0,73	0,69	0,37

Элементы	Участки												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
U—Au	0,53	0,23	0,07	0,27	0,33	0,49	0,01	0,50	0,05	0,30	0,72	0,18	0,41
U—Ag	0,13	0,44	0,28	0,25	0,00	0,10	0,87	0,04	0,26	0,13	0,12	0,65	0,51
U—Sn	0,00	0,45	0,15	0,00	0,13	0,28	0,18	0,20	0,11	0,06	0,07	0,38	0,48
U—As	0,20	0,22	0,17	0,55	0,24	0,08	0,11	0,16	0,07	0,21	0,19	0,35	0,18
U—Sb	0,27	0,27	0,11	0,45	0,00	0,08	0,03	0,10	0,09	0,23	0,31	0,22	0,50
U—Pb	0,53	0,58	0,36	0,34	0,30	0,19	0,08	0,41	0,00	0,18	0,08	0,66	0,42
Th—Au	0,53	0,40	0,36	0,14	0,14	0,02	0,04	0,49	0,20	0,34	0,54	0,21	0,06
Th—Ag	0,03	0,22	0,21	0,04	0,36	0,13	0,61	0,01	0,10	0,34	0,41	0,69	0,52
Th—Sn	0,20	0,31	0,46	0,32	0,50	0,31	0,10	0,05	0,20	0,35	0,44	0,50	0,05
Th—As	0,30	0,35	0,05	0,32	0,50	0,51	0,00	0,22	0,20	0,64	0,35	0,42	0,67
Th—Sb	0,50	0,34	0,56	0,52	0,10	0,62	0,02	0,26	0,00	0,61	0,60	0,14	0,25
Th—Pb	0,78	0,33	0,61	0,44	0,45	0,11	0,34	0,46	0,13	0,63	0,34	0,75	0,38
Au—Ag	0,08	0,01	0,25	0,53	0,26	0,09	0,09	0,12	0,09	0,41	0,19	0,13	0,00
Au—Sn	0,04	0,52	0,23	0,70	0,19	0,01	0,22	0,27	0,07	0,26	0,18	0,06	0,47
Au—As	0,03	0,05	0,18	0,14	0,46	0,01	0,22	0,14	0,07	0,33	0,16	0,08	0,05
Au—Sb	0,43	0,55	0,28	0,09	0,58	0,03	0,62	0,35	0,03	0,15	0,02	0,22	0,17
Au—Pb	0,59	0,23	0,30	0,46	0,09	0,12	0,09	0,57	0,20	0,28	0,04	0,16	0,43
Ag—Sn	0,43	0,02	0,23	0,54	0,57	0,44	0,29	0,27	0,04	0,00	0,08	0,46	0,26
Ag—As	0,34	0,71	0,56	0,29	0,36	0,52	0,25	0,25	0,52	0,19	0,30	0,52	0,60
Ag—Sb	0,04	0,01	0,18	0,10	0,01	0,22	0,12	0,05	0,40	0,00	0,13	0,40	0,21
Ag—Pb	0,29	0,52	0,26	0,43	0,64	0,73	0,01	0,36	0,42	0,38	0,89	0,91	0,32
Sn—As	0,29	0,48	0,43	0,23	0,81	0,50	0,29	0,20	0,20	0,62	0,12	0,20	0,34
Sn—Sb	0,29	0,50	0,07	0,04	0,02	0,02	0,08	0,34	0,11	0,09	0,32	0,28	0,26
Sn—Pb	0,43	0,30	0,36	0,67	0,44	0,60	0,27	0,02	0,15	0,56	0,23	0,59	0,69
As—Sb	0,13	0,23	0,14	0,16	0,17	0,36	0,22	0,12	0,28	0,38	0,77	0,55	0,33
As—Pb	0,15	0,07	0,28	0,39	0,50	0,52	0,18	0,18	0,15	0,93	0,33	0,65	0,81
Sb—Pb	0,66	0,21	0,56	0,21	0,17	0,20	0,69	0,59	0,17	0,32	0,10	0,56	0,02

Требуется:

- 1) методом кластер-анализа выделить ассоциации химических элементов по одному из аномальных участков;
- 2) оценить перспективность данного участка, сопоставив выявленные ассоциации с ассоциациями, характерными для месторождения.

Методические указания

1. Для заданного аномального участка по данным табл. 39 составляется матрица ларных коэффициентов корреляции размерностью 9×9 . Объем выборки в каждом участке — 30 значений.

2. Теснота связи различных химических элементов между собой характеризуется дистанционным показателем d_T вычисляемым по формуле

$$d_T(x_K, x_L) = \arccos r(x_K, x_L),$$

где $r(x_K, x_L)$ — коэффициент корреляции между признаками x_K и x_L . Матрица коэффициентов корреляции трансформируется в матрицу дистанционных показателей (см. прил. 13).

3. Выделение геохимических ассоциаций осуществляется путем последовательного объединения элементов в группы по мере уменьшения тесноты связи входящих в них элементов. На каждом шаге группирования рассматриваются варианты объединения элементов. В ассоциации включаются признаки или группы признаков, характеризующиеся минимальными значениями d_T .

4. Для группы признаков, объединяющей в себе несколько элементов, дистанционный показатель вычисляют как среднее из всех дистанционных показателей в группе

$$\bar{d}_T(A_i) = \frac{\sum_{x_K, x_L \in A_i} d_T(x_K, x_L)}{0,5P_i(P_i - 1)},$$

где P_i — число элементов в группе A_i .

По его значению может быть определен обобщенный коэффициент корреляции элементов в группе

$$r(A_i) = \cos d_T(A_i).$$

При объединении в одну двух групп признаков A_i и A_j ее дистанционный показатель вычисляется как

$$\bar{d}_T(A_i, A_j) = \frac{\sum_{x_K, x_L \in A_i} d_T(x_K, x_L) + \sum_{x_n, x_m \in A_j} d_T(x_n, x_m) + \sum_{x_K \in A_i} \sum_{x_n \in A_j} d_T(x_K, x_n)}{0,5P_i(P_i - 1) + 0,5P_j(P_j - 1) + P_iP_j}$$

где x_K, x_L — элементы, входящие в группу A_i ; x_n, x_m — элементы, входящие в группу A_j , P_i и P_j — число элементов, входящих в группы A_i и A_j .

5. При присоединении к ранее выделенной ассоциации одного элемента или группы элементов мерой сходства (различия) между ними служит показатель h_T , который вычисляется как среднее значение всех дистанционных показателей связи элементов одной группы с каждым элементом другой группы:

$$h_T(A_i, A_j) = \frac{\sum_{x_K \in A_i} \sum_{x_n \in A_j} d(x_K, x_n)}{P_iP_j}$$

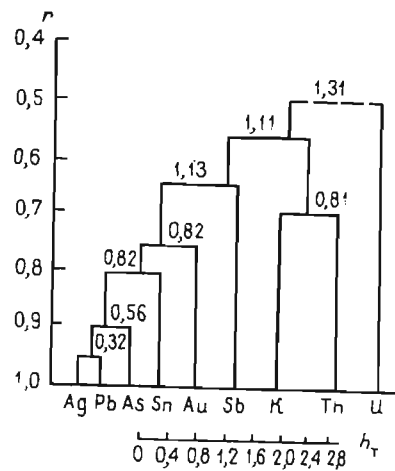


Рис. 4. Дендрограф взаимосвязей химических элементов на эталонном объекте

Матрица коэффициентов корреляции (\$r\$) и дистанционных показателей (\$d_T\$) по эталонному участку

Элементы	K	Th	U	Au	Ag	Sn	As	Sb	Pb
K		0,44	0,69	0,47	0,32	0,57	0,32	0,46	0,39
Th	1,12		0,06	0,36	0,08	0,64	0,09	0,05	0,29
U	0,81	0,51		0,53	0,36	0,45	0,46	0,45	0,49
Au	1,08	1,20	1,01		0,67	0,68	0,66	0,45	0,62
Ag	1,25	1,50	1,20	0,83		0,75	0,89	0,40	0,95
Sn	0,96	0,88	1,10	0,82	0,72		0,58	0,30	0,71
As	1,24	1,48	1,09	0,85	0,47	0,96		0,49	0,79
Sb	1,10	1,52	1,10	1,11	1,15	1,26	1,06		0,46
Pb	1,17	1,28	1,06	0,90	0,32	0,78	0,66	1,09	

6. Графически характер взаимосвязи различных элементов и их ассоциаций изображается в виде дендрографа, где для ассоциаций каждого уровня группирования по горизонтальной оси откладываются показатели \$h_T\$, а по вертикальной — дистанционный показатель \$d_T\$ (рис. 4).

7. Последовательность расчетов и формирования групп рассмотрим на примере данных по уже выявленному месторождению. В табл. 40 приведены значения парных коэффициентов корреляции (правый верхний угол) и соответствующие им значения \$d_T\$ (левый нижний угол).

Находим элементы, выделяемые в группу на первом шаге группирования по минимальному значению \$d_T = 0,32\$, которое соответствует паре Ag—Pb. Далее эти элементы рассматриваются как один признак (\$A_1\$).

8. Рассчитываем значения \$d_T\$ для вариантов объединения группы \$A_1\$ и остальных элементов. Например, показатель \$d_T(A_1, K)\$ вычисляется как:

$$d_T(A_1, K) = \frac{d_T(Ag - Pb) + d_T(Ag - K) + d_T(Pb - K)}{0,5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{0,32 + 1,25 + 1,17}{3} = 0,91.$$

Значения остальных дистанционных показателей вычисляют аналогично. Они приведены в табл. 41, где в числителе указаны суммы дистанционных показателей и их число в группе, а в знаменателе — среднее значение. Эти средние значения вводятся в матрицу размерностью \$8 \times 8\$. Остальные показатели заимствуют из исходной матрицы. В процессе группирования размерность матриц будет последовательно сокращаться.

9. Находим минимальное значение \$d_T\$ в матрице размерностью \$8 \times 8\$. Оно равно 0,48 и характеризует группу следующего иерархического

Таблица 41

Матрица дистанционных показателей после первого шага группирования

	Ag—Pb	K	U	Th	Au	Sn	As	Sb
Ag—Pb	$\frac{2,74}{3}$	$\frac{3,10}{3}$	$\frac{2,58}{3}$	$\frac{2,05}{3}$	$\frac{1,82}{3}$	$\frac{1,45}{3}$	$\frac{2,56}{3}$	
K	0,91		1,03	0,86	0,68	0,61	0,48	0,85
U
Th
Au
Sn
As
Sb	1,06

Таблица 42

Матрица дистанционных показателей после второго шага группирования

	K	U	Th	Au	Sn	Sb
Ag—Pb—As	$\frac{5,11}{6}$	$\frac{5,71}{6}$	$\frac{4,80}{6}$	$\frac{4,03}{6}$	$\frac{3,91}{6}$	$\frac{5,86}{6}$
K		0,85	0,95	0,80	0,67	0,98
U			0,81	1,12	1,08	1,10
Th		
Au			.		.	.
Sn			.	.		.
Sb			.	.	.	1,26

уровня A_2 (Ag - Pb - As). Вычисляем величину h_T , характеризующую связь As с группой A_1 :

$$h_T(A_L, As) = \frac{d_T(Ag - As) + d_T(Pb - As)}{2 \cdot 1} = \frac{0,47 + 0,66}{2} = 0,56.$$

10. Вычисляем значения d_T для вариантов объединения группы A_2 с другими элементами (табл. 42).

Эти значения выносятся в матрицу размерностью 7×7 , в которой определяется минимальное значение d_T . Оно равно 0,65 и характеризует группу A_3 , объединяющую группу A_2 и Sn. Величина h_T для группы A_2 и Sn вычисляется как

$$h_T(A_2, Sn) = \frac{d_T(Ag - As) + d_T(Pb - As) + d_T(As - Sn)}{3 \cdot 1} = \frac{0,72 + 0,78 + 0,96}{3} = 0,82.$$

11. Вычисляем дистанционные показатели для вариантов объединения группы A_3 с другими элементами (табл. 43).

Группа A_4 ($A_3 + Au$) выделяется по минимальному значению $d_T = 0,73$ в матрице размерностью 6×6 . Величина $h_T(A_3 - Au) = \frac{3,28}{4} = 0,82$.

Т а б л и ц а 43

Матрица дистанционных показателей после третьего шага группирования

	K	U	Th	Au	Sb
Ag-Pb-As-Sn	$\frac{8,53}{10}$	$\frac{9,05}{10}$	$\frac{8,36}{10}$	$\frac{7,31}{10}$	$\frac{8,47}{10}$
K	0,85	0,90	0,84	0,73	0,85
.....		0,81	1,12	1,08	1,10
Au					1,10

Т а б л и ц а 44

Матрица дистанционных показателей после четвертого шага группирования

	U	Th	Ag-Pb-As-Sn-Au	Sb
K	1,12	0,81	13,01/15-0,87	1,10
U		1,51	13,65/15-0,91	1,52
Th			12,77/15-0,85	1,10
Ag-Pb-As-Sn-Au				12,98/15-0,87

12. Вычисляем значения d_T , характеризующие связь группы A_4 с другими элементами, и заносим их в матрицу размерностью 5×5 (табл. 44). Из анализа матрицы следует, что минимальное значение d_T (0,81) в ней соответствует паре элементов K и Th, которые образуют группу A_5 .

13. Формируем матрицу размерностью 4×4 , для чего вычисляем дистанционные коэффициенты вариантов объединения группы A_5 с остальными элементами и группами. Значения d_T для группы A_5 и отдельных элементов вычисляются так же, как и в предыдущих случаях. Для варианта объединения групп A_5 и A_4 дистанционный показатель рассчитывается по формуле, приведенной в п. 4. Сумма дистанционных показателей для группы A_4 определена ранее (см. п. 11) и равна 7,31; для группы A_5 этот показатель равен 0,81. Третье слагаемое в формуле п. 4 включает в себя 10 дистанционных показателей (K-Ag, K-Pb, K-As, K-Sn, K-Au, Th-Ag, Th-Pb, Th-As, Th-Sn, Th-Au), сумма которых равна 11,16. Таким образом, величина $(A_4 - A_5)$ определится как

$$d_T(A_4 - A_5) = \frac{7,31 + 0,81 + 11,16}{10 + 1 + 10} = 0,92.$$

Минимальным в данной матрице будет значение $d_T = 0,87$, по которому выделена группа A_6 ($A_4 + Sb$). Величина $h_T(A_4, Sb)$ равна $5,67/5 = 1,13$.

14. Вычисляем дистанционные показатели для матрицы размерностью 3×3 . Вариант объединения группы A_6 и A_5 характеризуется дистанционным показателем

$$d_T(A_6 + A_5) = \frac{12,98 + 0,81 + 13,36}{15 + 1 + 12} = \frac{27,15}{28} = 0,97.$$

Для группы K-Th, U величина d_T равна 1,15; для группы A_6 показатель d_T равен 0,99. Таким образом, в группу A_7 объединяются все элементы, кроме U. Показатель h_T для групп A_6 и A_5 равен $13,36/12 = 1,11$.

15. Последняя группа объединяет все элементы, ее дистанционный показатель равен 1,05. Величина $h_T(A_7, U)$ равна 1,31.

16. Предельное значение коэффициента корреляции для доверительной вероятности 0,95 при данном объеме выборки составляет 0,42. Ему соответствует значение $d_T = 1,13$. Таким образом, связь ассоциации элементов Ag-Pb-As-Sn-Au-Sb-K-Th с ураном может считаться незначимой.

17. Графическое изображение выявленных ассоциаций и их взаимосвязей приведено на рис. 4. Для ассоциаций каждого иерархического уровня по вертикали откладываются значения d_T или соответствующие

им величины коэффициентов корреляции r ; по горизонтали в выбранном масштабе отрезками, соединяющими элементы или группы, указываются значения h_T . Для групп, состоящих из двух элементов, величины h_T и d_T равны.

Анализ данного дендрографа показывает, что наиболее сильными внутренними связями обладают ассоциации рудообразующих элементов Ag—Pb—As—Sn—Au—Sb, а также ассоциация K—Th. Относительно высокая связь золота как с оловом и мышьяком, так и с серебром, свинцом и сурьмой позволяет говорить о довольно неглубоком уровне эрозийного среза. Наличие корреляционной связи между рудными элементами и калием указывает на проявление процессов калиевого метасоматоза на объекте; об этом же свидетельствует отсутствие корреляционной связи с ураном тория и калия. Относительно невысокая теснота связи между рудными элементами, торием и калием объясняется более широким развитием ореолов измененных пород в сравнении с ореолами рудных элементов.

ЗАДАЧА 3.2

Выделение ассоциаций химических элементов при изучении зональности коры выветривания ультрамафитов

Месторождение никеля приурочено к латеритной коре выветривания ультрамафитов. По минеральному составу и текстурным особенностям в коре выветривания сверху вниз выделяется шесть зон:

1) зона железистых стяжений и конкреций (гиббсит-гематит-гетитовые руды);

2) зона бесструктурных охр (гетит-гиббситовые руды);

3) зона конечных структурных охр (гиббсит-лимонитовые руды);

4) зона начальных структурных охр (лимонит-серпентиновые руды);

5) зона выщелоченных пород (рыхлые серпентиновые руды);

6) зона трещиноватых (дезинтегрированных) пород (твердые серпентиновые руды).

Из каждой зоны отобраны пробы, по которым выполнены химические анализы на Fe_2O_3 , FeO, NiO, CoO, SiO_2 , MgO, Al_2O_3 , Cr_2O_3 . По результатам анализов рассчитаны парные коэффициенты корреляции для содержаний всех оксидов (табл. 45).

Требуется:

1) построить матрицы парных коэффициентов корреляции и выделить в них коэффициенты, сильно отличающиеся от нуля при доверительных вероятностях 0,99; 0,95 и 0,90;

2) построить графы корреляционных связей;

3) рассчитать и построить дендрограммы или дендрографы;

Коэффициенты корреляции содержаний химических элементов по различным зонам коры выветривания ультрамафитов

Оксиды	Номер зоны					
	I	II	III	IV	V	VI
Fe_2O_3-FeO	-0,185	-0,103	0,032	-0,158	-0,524	0,058
Fe_2O_3-NiO	0,148	-0,009	-0,218	0,064	0,166	0,345
Fe_2O_3-CoO	-0,028	0,387	0,198	0,449	0,830	0,068
$Fe_2O_3-SiO_2$	-0,079	-0,412	-0,861	-0,870	-0,318	0,247
Fe_2O_3-MgO	-0,069	-0,255	-0,775	-0,807	-0,651	0,203
Fe_2O_3-	-0,648	-0,400	-0,059	0,093	0,306	0,184
Al_2O_3						
Fe_2O_3-	0,170	0,335	0,086	0,561	0,671	0,340
Cr_2O_3						
FeO—NiO	-0,125	-0,210	-0,040	-0,419	-0,554	-0,032
FeO—CoO	-0,087	-0,235	-0,051	-0,056	-0,468	0,303
FeO— SiO_2	-0,031	-0,149	-0,057	-0,034	0,138	0,580
FeO—MgO	0,053	-0,076	0,050	0,058	0,454	0,657
FeO— Al_2O_3	0,258	0,055	-0,004	0,416	0,052	0,461
FeO— Cr_2O_3	-0,009	-0,046	-0,030	0,059	-0,133	0,472
NiO—CoO	0,157	0,339	-0,030	0,070	-0,097	-0,225
NiO— SiO_2	0,104	0,211	0,347	0,008	0,246	0,294
NiO—MgO	0,199	0,260	0,197	0,040	-0,096	0,159
NiO— Al_2O_3	-0,153	-0,263	-0,272	-0,305	-0,081	0,202
NiO— Cr_2O_3	0,163	0,123	-0,223	-0,099	0,024	0,378
CoO— SiO_2	0,082	0,008	-0,176	-0,442	0,419	0,183
CoO—MgO	0,278	0,116	-0,133	-0,325	-0,593	0,304
CoO— Al_2O_3	-0,144	-0,208	0,004	0,065	0,255	0,131
CoO— Cr_2O_3	-0,065	0,053	-0,008	0,288	0,509	0,180
SiO_2-MgO	0,051	0,596	0,723	0,639	0,405	0,970
$SiO_2-Al_2O_3$	0,146	-0,214	-0,232	-0,237	0,055	0,655
$SiO_2-Cr_2O_3$	-0,050	-0,129	-0,201	-0,521	-0,353	0,862
MgO— Al_2O_3	-0,097	-0,364	-0,160	-0,425	-0,178	0,568
MgO— Cr_2O_3	0,140	0,108	-0,213	-0,447	-0,212	0,819
Al_2O_3-	-0,170	-0,428	0,177	0,002	0,420	0,766
Cr_2O_3						

Количество проб: 66, 67, 65, 80, 29, 12

4) выделить геохимические ассоциации, свойственные для каждой зоны;

5) указать отличия выделенных визуально зон по характеру геохимических ассоциаций и высказать соображения о возможности объединения некоторых зон;

6) высказать соображения относительно поведения различных химических элементов в процессе формирования коры выветривания.

Задание выполняется бригадой из 6 студентов. Каждый студент самостоятельно выполняет пункты 1—4 по одной из зон. Пункты 5 и 6 выполняются совместно всеми членами бригады.

Для выполнения задания можно воспользоваться методическими указаниями к задаче 3.1.

ЗАДАЧА 3.3

Разделение геологических объектов с помощью линейной дискриминантной функции

При геологическом картировании района, в строении которого принимают участие вулканогенно-осадочные породы, выделены две свиты близкого петрографического состава, но занимающие различное стратиграфическое положение. Взаимоотношение свит надежно устанавливается в отдельных "ключевых" участках; в остальной части района обнаружение пород данного состава и облика не позволяет однозначно отнести их к той или иной свите.

Таблица 46

Данные анализов вулканогенно-осадочных пород верхней (А) и нижней (В) свит

№ п/п	А						В					
	Na ₂ O	K ₂ O	TiO ₂	MgO	CaO	FeO	Na ₂ O	K ₂ O	TiO ₂	MgO	CaO	FeO
1	3,27	3,39	1,45	3,72	5,82	4,18	4,49	3,72	1,68	3,95	6,68	5,22
2	4,44	2,64	1,10	3,14	4,68	3,56	4,13	3,55	1,56	4,38	6,20	5,60
3	3,20	2,50	1,14	2,83	4,83	3,50	4,00	3,21	1,37	3,34	5,55	4,52
4	3,71	3,68	1,22	4,15	5,62	3,59	3,48	2,93	1,22	3,94	4,72	3,81
5	5,02	3,00	0,98	3,32	4,75	2,97	3,15	2,32	0,87	3,87	3,20	3,31
6	4,40	3,47	0,83	4,06	4,83	3,00	2,79	2,28	0,92	4,18	3,81	2,62
7	4,72	2,81	1,15	3,22	4,55	3,60	3,08	2,47	1,10	5,17	4,82	3,95
8	3,81	3,07	1,09	3,45	5,31	3,21	3,37	2,96	1,15	4,21	4,31	3,37
9	2,22	3,42	1,22	3,97	5,86	3,62	3,65	2,79	1,03	3,20	4,01	3,00
10	3,58	3,05	1,38	3,49	5,49	4,02	3,84	3,34	1,32	3,92	5,02	4,51
11	3,75	2,73	1,33	3,04	5,12	4,38	3,61	2,52	1,17	3,81	4,95	4,04
12	3,84	3,14	1,48	3,32	5,30	4,31	3,96	3,24	1,45	4,09	5,92	5,07
13	3,80	3,80	1,11	4,95	5,92	3,60	3,78	3,07	1,31	3,23	4,45	3,32
14	3,80	3,15	1,22	3,73	5,32	4,00	3,36	2,49	0,73	3,80	3,14	2,27
15	3,48	3,09	1,34	3,58	5,58	4,11	4,01	3,52	1,53	3,84	5,82	4,78
16	3,42	3,13	1,45	3,48	5,43	4,4	4,40	4,14	1,82	2,38	6,92	4,90
17	3,38	3,58	1,63	4,22	5,80	5,35	4,82	3,87	1,55	3,27	6,40	5,51
18	3,56	2,67	1,72	3,12	5,13	4,50	4,21	3,42	1,48	4,00	6,08	4,63
19	4,12	4,12	1,22	4,31	5,75	3,91	4,16	3,18	1,30	3,50	5,01	4,12
20	4,58	3,27	0,75	3,52	5,40	3,10	3,17	3,41	1,52	4,08	6,12	4,72
21	4,20	3,11	0,72	3,85	5,03	2,62	3,56	2,75	1,12	3,79	4,20	3,00

№ п/п	Na ₂ O	K ₂ O	TiO ₂	MgO	CoO	FeO	Na ₂ O	K ₂ O	TiO ₂	MgO	CaO	FeO
22	4,38	2,16	0,81	2,38	4,48	3,30	2,97	2,16	0,64	3,38	2,92	2,93
23	3,87	2,70	1,06	3,52	5,02	3,57	2,62	2,33	0,68	4,89	2,70	1,65
24	3,28	3,20	1,10	3,66	5,61	3,65	2,37	1,75	0,85	4,22	3,10	2,40
25	2,87	3,21	1,55	3,83	5,72	4,73	2,90	2,04	0,93	4,17	4,05	3,12
26	2,84	3,39	1,22	3,72	5,79	4,21	3,00	2,61	1,25	3,52	5,40	4,65
27	3,23	2,86	1,77	3,02	5,22	5,54	3,61	2,97	1,34	3,98	4,70	3,30
28	3,72	3,35	1,14	4,21	5,39	4,18	4,12	3,31	1,50	3,40	6,03	5,10
29	4,39	3,76	0,63	3,98	5,90	3,32	4,88	3,82	1,72	3,06	5,52	4,50
30	3,71	2,92	0,58	3,01	5,24	3,38	4,31	3,22	1,41	3,38	5,90	5,30

Таблица 47

Содержания (в %) породообразующих оксидов

№ проб	Na ₂ O	K ₂ O	TiO ₂	MgO	CaO	FeO
35	3,60	2,92	1,26	4,51	5,15	4,26
36	3,62	3,10	1,20	3,12	4,83	3,75
37	3,20	3,51	1,46	3,75	5,66	4,31
38	3,98	3,76	1,38	3,56	5,60	4,30
39	3,54	2,95	1,32	4,40	5,03	4,10
40	3,00	3,71	1,52	4,21	6,02	4,72
41	4,31	3,00	0,87	3,36	5,16	3,56
42	4,43	3,30	0,73	3,72	5,21	3,52
43	3,31	2,42	1,01	3,85	4,12	3,20
44	3,09	2,27	0,96	4,53	3,61	2,01

Предполагается, что, несмотря на свое визуальное сходство, породы данных свит несколько различаются по содержаниям отдельных породообразующих оксидов и характеру их взаимосвязи. Для установления этих отличий в ключевых участках проведено определение концентраций оксидов в отдельных пробах. В табл. 46 данные опробования верхней свиты обозначены индексом А, а данные нижней свиты — индексом В.

Кроме ключевых участков определение содержаний породообразующих оксидов в сходных породах выполнено по отдельным искусственным обнажениям и скальным выходам в различных частях района, отделенных друг от друга тектоническими нарушениями, площадями с мощным покровом рыхлых отложений, в связи с чем определение их стратиграфического положения затруднено. Данные их изучения приведены в табл. 47.

Требуется: на основе данных о составе свит вычислить уравнение дискриминантной функции и определить принадлежность к каждой из свит пород аналогичного состава.

Методические указания

Дискриминантную функцию предлагается рассчитывать по сочетанию любых трех признаков из табл. 46, что позволяет получить 19 вариантов заданий. Для каждой выборки (A или B) значения признаков заносятся в табл. 48, где каждый из признаков условно обозначается индексом X, Y, Z. Расчеты могут проводиться по выборкам сокращенного объема (15–20 значений).

Линейная дискриминантная функция для трех переменных имеет вид

$$D = a_1x + a_2y + a_3z.$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 &= d_1; \\ s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + s_{23}a_3 &= d_2; \\ s_{31}a_1 + s_{32}a_2 + s_{33}a_3 &= d_3. \end{aligned}$$

Величины d_1, d_2 и d_3 представляют собой разности оценок средних значений признаков по выборкам A и B:

$$\begin{aligned} d_1 &= \bar{x}_A - \bar{x}_B; \\ d_2 &= \bar{y}_A - \bar{y}_B; \\ d_3 &= \bar{z}_A - \bar{z}_B. \end{aligned}$$

Если обозначить номер строки как i , а столбца как j , то величины s_{ij} можно записать в форме матрицы:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}.$$

Т а б л и ц а 48

Расчет коэффициентов дискриминантной функции

№ п/п	X	Y	Z	X ²	XY	XZ	Y ²	YZ	Z ²
-------	---	---	---	----------------	----	----	----------------	----	----------------

1
.
.
.
.
 $n_{A(B)}$

Значения s_{ij} соответствуют элементам ковариационной матрицы признаков X, Y, Z и вычисляются, как суммы квадратов отклонений или суммы смешанных произведений отклонений:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sum_1^{n_A} (x_{Ai} - \bar{x}_A)^2 + \sum_1^{n_B} (x_{Bi} - \bar{x}_B)^2; \\ s_{22} &= \sum_1^{n_A} (y_{Ai} - \bar{y}_A)^2 + \sum_1^{n_B} (y_{Bi} - \bar{y}_B)^2; \\ &\dots\dots\dots \\ s_{12(21)} &= \sum_1^{n_A} (x_{Ai} - \bar{x}_A)(y_{Ai} - \bar{y}_A) + \sum_1^{n_B} (x_{Bi} - \bar{x}_B)(y_{Bi} - \bar{y}_B); \\ s_{13(31)} &= \sum_1^{n_A} (x_{Ai} - \bar{x}_A)(z_{Ai} - \bar{z}_A) + \sum_1^{n_B} (x_{Bi} - \bar{x}_B)(z_{Bi} - \bar{z}_B); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Приведенные выше выражения для удобства расчетов могут быть заменены на эквивалентные выражения для сумм квадратов вида

$$s_{11} = \left(\sum_1^{n_A} x_{iA}^2 + \sum_1^{n_B} x_{iB}^2 \right) - \left[\frac{(\sum x_{iA})^2}{n_A} + \frac{(\sum x_{iB})^2}{n_B} \right] \quad (1)$$

и для сумм смешанных произведений вида

$$s_{12(21)} = \left(\sum_1^{n_A} x_{iA} y_{iA} + \sum_1^{n_B} x_{iB} y_{iB} \right) - \left(\frac{\sum_1^{n_A} x_{iA} \sum_1^{n_A} y_{iA}}{n_A} + \frac{\sum_1^{n_B} x_{iB} \sum_1^{n_B} y_{iB}}{n_B} \right), \quad (2)$$

где n_A и n_B – объем выборки для объекта A и B.

Суммы самих значений признаков по выборкам, их квадратов и различных сочетаний произведений вычисляются в табл. 47, куда заносятся исходные данные для определенного варианта задания.

Например, если взять в качестве признаков для построения дискриминантной функции Na₂O, K₂O, TiO₂, обозначив их, соответственно как X, Y и Z, и проводить расчеты по первым 15 значениям из совокупностей A и B, то окажется:

$$\begin{aligned} \sum x_{iA} &= 57,13; & \sum y_{iA} &= 46,94; & \sum z_{iA} &= 18,04; \\ \bar{x}_A &= 3,81; & \bar{y}_A &= 3,13; & \bar{z}_A &= 1,20; \\ \sum x_{iB} &= 54,90; & \sum y_{iB} &= 44,41; & \sum z_{iB} &= 18,41; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= 3,66; & \bar{y}_B &= 2,96; & \bar{z}_B &= 1,23; \\ \Sigma x_{iA}^2 &= 223,99; & \Sigma y_{iA}^2 &= 148,84; & \Sigma z_{iA}^2 &= 22,13; \\ \Sigma x_{iB}^2 &= 203,70; & \Sigma y_{iB}^2 &= 134,58; & \Sigma z_{iB}^2 &= 23,62; \\ \Sigma x_{iA} y_{iA} &= 178,04; & \Sigma x_{iA} z_{iA} &= 67,90; & \Sigma y_{iA} z_{iA} &= 56,42; \\ \Sigma x_{iB} y_{iB} &= 165,22; & \Sigma x_{iB} z_{iB} &= 68,85; & \Sigma y_{iB} z_{iB} &= 56,16. \end{aligned}$$

Вычислим по формулам (1) и (2) значения s_{ij} :

$$\begin{aligned} s_{11} &= 223,99 + 203,70 - \frac{57,13^2}{15} + \frac{54,90^2}{15} = 9,17; \\ s_{12(21)} &= 178,04 + 165,22 - \frac{57,13 \times 46,94}{15} + \frac{54,90 \times 44,41}{15} = 1,94; \\ s_{13(31)} &= 67,90 + 68,85 - \frac{57,13 \times 18,04}{15} + \frac{54,90 \times 18,41}{15} = 0,66; \\ s_{22} &= 148,84 + 134,58 - \frac{46,94^2}{15} + \frac{44,41^2}{15} = 5,05; \\ s_{23(32)} &= 56,42 + 56,16 - \frac{46,94 \times 18,04}{15} + \frac{44,41 \times 18,41}{15} = 1,63; \\ s_{33} &= 22,13 + 23,62 - \frac{18,04^2}{15} + \frac{18,41^2}{15} = 1,45. \end{aligned}$$

Вычислим также значения d для каждого признака:

$$\begin{aligned} d_1 &= 3,81 - 3,66 = 0,15; \\ d_2 &= 3,13 - 2,96 = 0,17; \\ d_3 &= 1,20 - 1,23 = -0,03. \end{aligned}$$

Подставляя значения s_{ij} и d , получили систему уравнений:

$$\begin{aligned} 9,17a_1 + 1,94a_2 + 0,66a_3 &= 0,15; \\ 1,94a_1 + 5,05a_2 + 1,63a_3 &= 0,17; \\ 0,66a_1 + 1,63a_2 + 1,45a_3 &= -0,03. \end{aligned}$$

Данная система уравнений может быть решена с помощью метода Гаусса подбором множителей, обеспечивающих равенство коэффициентов в уравнениях, что позволяет вычитанием (или сложением) одного уравнения из другого исключать один из неизвестных a_i и получать новую систему уравнений.

В более общем виде, удобном для создания алгоритма и проведения расчетов на ЭВМ, система уравнений решается через детерминанты по формулам Крамера:

$$a_1 = \Delta_{a_1} / \Delta; \quad a_2 = \Delta_{a_2} / \Delta; \quad a_3 = \Delta_{a_3} / \Delta.$$

Детерминант (определитель) Δ характеризует матрицу значений s_{ij} . Для матрицы размером 3×3 он вычисляется как

$$\Delta = s_{11}s_{22}s_{33} + s_{12}s_{23}s_{31} + s_{13}s_{21}s_{32} - s_{13}s_{22}s_{31} - s_{12}s_{21}s_{33} - s_{11}s_{23}s_{32}.$$

Матрицы для вычисления детерминантов Δ_{a_i} образуются заменой в матрице s_{ij} столбца, соответствующего положению коэффициента a_i вектором значений d_i , например:

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 0,15 & 1,94 & 0,66 \\ 0,17 & 5,05 & 1,63 \\ -0,03 & 1,63 & 1,45 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} 9,17 & 0,15 & 0,66 \\ 1,94 & 0,17 & 1,63 \\ 0,66 & -0,03 & 1,45 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{a_3} = \begin{vmatrix} 9,17 & 1,94 & 0,15 \\ 1,94 & 5,05 & 0,17 \\ 0,66 & 1,63 & -0,03 \end{vmatrix}.$$

Детерминанты вычисляются по указанному выше правилу.

Если размерность матрицы (и соответственно число признаков в уравнении дискриминантной функции) больше трех, то для вычисления определителя можно воспользоваться приемом разложения определителя по строке. Для матрицы значений n -го порядка он может быть записан в виде

$$\det \|s_{ij}\| = s_{11}|s_{11}| - s_{12}|s_{12}| + \dots + (-1)^{n-1} s_{1n}|s_{1n}|,$$

где через $|s_{ij}|$ обозначен определитель матрицы $n-1$ порядка, полученной из матрицы $\|s_{ij}\|$ вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

В рассматриваемом примере детерминанты составляют:

$$\Delta = 39,185; \quad \Delta_{a_1} = 0,409; \quad \Delta_{a_2} = 2,586; \quad \Delta_{a_3} = -3,625.$$

Соответственно получим следующие значения коэффициентов a :

$$a_1 = \frac{0,409}{39,185} = 0,010; \quad a_2 = \frac{2,586}{39,185} = 0,066; \quad a_3 = \frac{-3,625}{39,185} = -0,0925.$$

Таким образом, уравнение линейной дискриминантной функции в этом случае будет иметь вид

$$D = 0,010x + 0,066y - 0,0925z.$$

Далее необходимо вычислить значение функции D_0 , относительно которого можно сделать вывод о принадлежности нового неизвестного объекта к тому или иному классу (свите).

$$D_0 = \frac{1}{2} [a_1(\bar{x}_A + \bar{x}_B) + a_2(\bar{y}_A + \bar{y}_B) + a_3(\bar{z}_A + \bar{z}_B)] =$$

$$= \frac{1}{2} [0,01(3,81 + 3,66) + 0,066(3,13 + 2,96) + 0,0925(1,20 + 1,23)] =$$

$$= 0,126.$$

Породы сходного облика, данные опробования которых приведены в табл. 46, могут быть отнесены к верхней свите (объект класса А), если вычисленное значение D для них больше 0,126; в противном случае они должны относиться к нижней свите. Например, для объекта, характеризующегося пробой К-35 значение D составляет: $D = 0,010 \cdot 3,60 + 0,066 \times 2,92 - 0,0925 \cdot 1,26 = 0,113$ и, следовательно, он может быть отнесен к нижней свите (объект класса В). Аналогичные вычисления производятся по остальным пробам серии К.

ЗАДАЧА 3.4.

Использование уравнения множественной регрессии для оценки содержаний попутных полезных компонентов

В процессе разведки месторождений полезных ископаемых проводится отбор проб, по которым устанавливаются содержания основных ценных компонентов. Кроме них в рудах, как правило, присутствуют попутные полезные компоненты, извлечение и дальнейшее использование в народном хозяйстве которых повышает эффективность освоения месторождения. Эти компоненты подлежат учету и участвуют в подсчете запасов. В то же время определение содержания попутных компонентов в каждой отдельной пробе оказывается сложной и трудоемкой операцией в связи с высокой стоимостью анализов и их недостаточной чувствительностью при низких концентрациях.

Решение этой задачи возможно на основе применения корреляционных методов, использующих взаимосвязь содержаний компонентов руд. Для выявления этой взаимосвязи при разведке месторождений отбираются эталонные представительные пробы, в которых кроме содержаний основных компонентов, определяется весь комплекс попутных элементов.

На месторождении апатита выполнены анализы эталонных проб. Пробы характеризуют четыре природных типа руд, различающихся текстурно-структурными особенностями, минеральным составом, содержаниями компонентов руд и их взаимозависимостью. Проведена предварительная статистическая обработка результатов. Установлено, что распределения эмпирических данных по каждому компоненту и типу руд не противоречат нормальному закону. Средние содержания компонентов и выборочные оценки дисперсий по каждому типу руд приведены в табл. 49.

Параметры распределений содержаний (в %) компонентов по типам руд

Тип руд	Объем выборки	Параметры ($\frac{\text{среднее содержание}}{\text{дисперсия}}$)						
		P ₂ O ₅	Fe ₂ O ₃	ThO ₂	ΣTR ₂ O ₃	CeO	La ₂ O ₃	F
I	65	11,2	3,2	0,21	0,18	0,07	0,06	0,38
		105	8,3	0,038	0,023	0,0042	0,0033	0,152
II	50	8,2	2,9	0,15	0,16	0,06	0,05	0,30
		68	7,2	0,020	0,022	0,0032	0,0023	0,088
III	48	9,4	1,8	0,18	0,12	0,05	0,05	0,31
		80	30	0,029	0,013	0,0022	0,0020	0,092
IV	60	6,6	2,2	0,10	0,09	0,04	0,03	0,22
		38	41	0,009	0,007	0,0013	0,0008	0,043

Таблица 50

Оценки коэффициентов корреляции

Компоненты	Тип руд			
	I	II	III	IV
P ₂ O ₅ -Fe ₂ O ₃	0,68	0,46	0,58	0,41
P ₂ O ₅ -ThO ₂	0,91	0,52	0,70	0,06
P ₂ O ₅ -ΣTR ₂ O ₃	0,85	0,40	-0,32	0,16
P ₂ O ₅ -CeO ₂	0,82	0,43	-0,39	-0,04
P ₂ O ₅ -La ₂ O ₃	0,87	0,36	-0,49	0,18
P ₂ O ₅ -F	0,97	0,84	0,64	0,87
Fe ₂ O ₃ -ThO ₂	0,72	0,48	0,74	0,32
Fe ₂ O ₃ -ΣTR ₂ O ₃	0,53	0,15	0,05	0,17
Fe ₂ O ₃ -CeO ₂	0,52	0,19	-0,02	0,08
Fe ₂ O ₃ -La ₂ O ₃	0,55	0,10	-0,15	0,30
Fe ₂ O ₃ -F	0,70	0,68	0,94	0,55
ThO ₂ -ΣTR ₂ O ₃	0,77	0,19	-0,34	0,36
ThO ₂ -CeO ₂	0,76	0,23	-0,37	0,58
ThO ₂ -La ₂ O ₃	0,78	0,20	-0,50	0,39
ThO ₂ -F	0,94	0,69	0,76	0,29

Содержания и дисперсии компонентов указаны в процентах. Оксид фосфора является основным компонентом и при разведке месторождения определяется в каждой пробе. Сумма оксидов редких земель (ΣTR₂O₃), оксид церия (CeO₂), оксид лантана (La₂O₃) и фтор (F) рассматриваются как ценные попутные компоненты. Кроме того, в каждой пробе дешевыми и экспрессными методами можно установить содержание оксида железа (Fe₂O₃), присутствующего в составе магнетита и определяемого по данным каротажа магнитной восприимчивости (КМВ), и

оксида тория (ThO_2), определяемого по данным гамма-каротажа разведочных скважин.

Предварительно установлено также, что взаимосвязь компонентов руд может быть аппроксимирована как линейная. Оценки выборочных коэффициентов корреляции по типам руд между содержаниями компонентов приведены в табл. 50.

Требуется: оценить наличие многомерной корреляции между попутным и основными компонентами; рассчитать уравнение множественной линейной регрессии между попутным и основными компонентами.

Методические указания

Каждый исполнитель выполняет расчеты для оценки содержаний одного попутного компонента по одному из типов руд. В качестве основных компонентов, содержания которых предполагаются известными в каждом рудном интервале, используются P_2O_5 , Fe_2O_3 и ThO_2 .

Для полученного варианта задания составляется матрица коэффициентов корреляции. Попутный компонент, условно принимаемый за зависимую величину y , располагается в первом столбце и первом ряду. Основные компоненты рассматриваются как независимые величины и условно обозначаются x_1 , x_2 и x_3 . Например, для фтора по второму типу руд эта матрица будет выглядеть следующим образом:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0,84 & 0,68 & 0,69 \\ 0,84 & 1 & 0,46 & 0,52 \\ 0,68 & 0,46 & 1 & 0,48 \\ 0,69 & 0,52 & 0,48 & 1 \end{vmatrix}$$

Уравнение множественной линейной регрессии имеет вид

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

где y — зависимая переменная (содержание попутного компонента); x_1 , x_2 и x_3 — независимые переменные (содержания основных или легко определяемых компонентов); a_0 — свободный член уравнения.

Для оценки возможности использования уравнения множественной регрессии необходимо определить коэффициент множественной корреляции и проверить гипотезу о наличии такой связи. Коэффициент множественной корреляции

$$r_y \{x_1, x_2, x_3\} = \sqrt{1 - |R|/A_{yy}},$$

где $|R|$ — определитель матрицы парных коэффициентов корреляции; A_{yy} — алгебраическое дополнение для элемента матрицы R , соответствующего y .

Алгебраическое дополнение A_{yy} вычисляется как определитель матрицы, полученной из исходной матрицы R вычеркиванием первой строки и первого столбца. Для вычисления определителя матрицы может быть использован прием разложения по строке. При этом каждый элемент строки умножается на соответствующее алгебраическое дополнение. Знак произведения определяется множителем $(-1)^k$, где k — сумма номера строки и номера столбца. При вычислении алгебраических дополнений этот прием может повторяться. Для вычисления детерминантов (определителей) матриц размером 3×3 можно использовать правило "треугольников":

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

В рассматриваемом примере алгебраическое дополнение A_{yy} будет представлять собой детерминант матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,46 & 0,52 \\ 0,46 & 1 & 0,48 \\ 0,52 & 0,48 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,1148 + 0,1148 - 0,2704 - 0,2116 - 0,2304 = 0,5172.$$

Определитель матрицы R будет равен сумме произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} |R| &= \begin{vmatrix} 1 & 0,84 & 0,68 & 0,69 \\ 0,84 & 1 & 0,46 & 0,52 \\ 0,68 & 0,46 & 1 & 0,48 \\ 0,69 & 0,52 & 0,48 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0,46 & 0,52 \\ 0,46 & 1 & 0,48 \\ 0,52 & 0,48 & 1 \end{vmatrix} - 0,84 \times \\ &\times \begin{vmatrix} 0,84 & 0,46 & 0,52 \\ 0,68 & 1 & 0,48 \\ 0,69 & 0,48 & 1 \end{vmatrix} + 0,68 \cdot \begin{vmatrix} 0,84 & 1 & 0,52 \\ 0,68 & 0,46 & 0,48 \\ 0,69 & 0,52 & 1 \end{vmatrix} - 0,69 \cdot \begin{vmatrix} 0,84 & 1 & 0,46 \\ 0,68 & 0,46 & 1 \\ 0,69 & 0,52 & 0,48 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 0,5172 - 0,84 \cdot 0,297 + 0,68 \cdot (-0,1532) - 0,69 \cdot 0,129 = 0,0745. \end{aligned}$$

Отсюда коэффициент множественной корреляции для данного примера будет равен:

$$r_y \{x_1, x_2, x_3\} = \sqrt{1 - \frac{0,0745}{0,5172}} = 0,925.$$

Гипотеза о равенстве коэффициента множественной корреляции ну-

лю проверяется с помощью F -критерия Фишера:

$$F = \frac{(n - m) r_y^2 \{x_1, x_2, x_3\}}{(m - 1)(1 - r_y^2 \{x_1, x_2, x_3\})},$$

где n — объем выборки; m — число независимых переменных.

Для данного примера значение

$$F = \frac{(50 - 3) \cdot 0,856}{(3 - 1) \cdot 0,144} = \frac{40,23}{0,288} = 140.$$

Вычисленное значение сравнивается с табличным для 5 %-го уровня значимости при $n - m$ и $m - 1$ числе степеней свободы (см. прил. 4). Гипотеза принимается, если вычисленное значение критерия меньше табличного. В данном случае табличное значение критерия составляет 3,2 — гораздо меньше вычисленного. Таким образом, гипотеза о равенстве коэффициента корреляции нулю отвергается, что позволяет использовать уравнение множественной регрессии для решения поставленной задачи.

Коэффициенты множественной регрессии a_1 , a_2 и a_3 определяют по выражению

$$a_i = -(S_y / S_{x_i})(r_{yx_i}^{-1} / r_{yy}^{-1}),$$

где $r_{yx_i}^{-1}$ и r_{yy}^{-1} — элементы матрицы R^{-1} , обратной по отношению к исходной матрице R ; S_y и S_{x_i} — стандартные отклонения переменных y и x_i ; i — номер независимой переменной.

Элементы обратной матрицы (r_{ij}^{-1}) могут быть вычислены как транспонированные алгебраические дополнения исходной матрицы, деленные на ее детерминант. Поскольку матрица коэффициентов корреляции симметрична и алгебраические дополнения делятся на константу (детерминант), то коэффициенты a_i можно вычислить через отношения алгебраических дополнений в первой строке (столбце) обратной матрицы:

$$a_1 = -(S_y / S_{x_1})(A_{yx_1} / A_{yy}); \quad a_2 = -(S_y / S_{x_2})(A_{yx_2} / A_{yy}); \\ a_3 = -(S_y / S_{x_3})(A_{yx_3} / A_{yy}).$$

Значения стандартов для каждого признака вычисляют по данным табл. 48. Для рассматриваемого примера алгебраические дополнения получены нами при вычислении детерминанта матрицы R . Коэффициенты регрессии здесь будут следующие:

$$a_1 = -\frac{0,297}{8,25} \cdot \frac{-0,297}{0,5172} = 0,021; \quad a_2 = -\frac{0,297}{2,68} \cdot \frac{-0,153}{0,5172} = 0,033;$$

$$a_3 = -\frac{0,297}{0,14} \cdot \frac{-0,129}{0,5172} = 0,529.$$

Свободный член уравнения a_0 находят по формуле

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}_1 - a_2 \bar{x}_2 - a_3 \bar{x}_3,$$

где \bar{y} , \bar{x}_1 , \bar{x}_2 и \bar{x}_3 — средние выборочные значения переменных.

В данном случае его значение определяется следующим образом:

$$a_0 = 0,30 - 0,021 \cdot 8,1 + 0,033 \cdot 2,9 + 0,529 \cdot 0,15 = -0,0452.$$

Таким образом, уравнение множественной регрессии для данного примера приобретает вид

$$F = -0,0452 + 0,021 P_2O_5 + 0,033 Fe_2O_3 + 0,529 ThO_2.$$

Раздел 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

ЗАДАЧА 4.1

Выявление и количественное описание закономерностей пространственного изменения параметров геологических тел

Для целей поиска месторождений урана в пределах гранитоидного массива была проведена аэрогамма-спектрометрическая съемка масштаба 1:50 000. В результате этих работ были получены данные о пространственной изменчивости содержания урана, тория и калия (табл. 51 — 53). Требуется выделить перспективные участки на наличие уранового оруденения.

Месторождения урана предполагаемого промышленного типа характеризуются повышенными содержаниями урана и тория, а также пониженным содержанием калия. В связи с этим, перспективные площади определяются по местам совмещения положительных аномалий урана и тория с отрицательными аномалиями калия.

Для решения задачи необходимо выполнить следующие операции:

1) проверить гипотезу о наличии тренда в пространственной изменчивости содержания урана, тория и калия. Установить характер закономерных изменений содержания радиоактивных элементов по единичным профилям;

2) определить размер неоднородностей в распределении содержания урана, тория и калия;

3) выделить фоновую составляющую изменчивости рассмагнриваемых параметров;

4) выделить случайные составляющие изменчивости исследуемых характеристик;

5) оценить величину аномальных содержаний урана, тория и калия;

6) выделить аномальные участки содержаний радиоактивных элементов;

7) выделить перспективные участки.

Работу выполняет бригада из трех студентов. Каждый из студентов производит операции по одному из исследуемых параметров.

Таблица 51

Содержание (в %) калия

№ пи-кета	Профиль													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2,5	2,5	1,7	0,5	0,5	1,0	1,0	2,0	1,5	1,5	1,5	1,5	0,1	0,5
2	2,0	2,5	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	1,2	1,0	0,5	0,5
3	1,7	2,5	2,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,2	2,0	1,7	1,0	0,5	0,5	0,1
4	2,0	2,0	1,5	1,7	1,7	1,7	2,5	3,0	2,7	2,5	2,0	2,0	2,2	2,2
5	1,5	1,0	1,0	1,5	1,7	2,2	2,7	3,0	3,0	2,7	2,0	2,0	2,0	2,5
6	2,0	2,0	1,7	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5	2,0	1,7	1,7	2,0	1,7	1,5
7	2,2	2,5	2,2	2,0	1,7	2,0	2,7	2,5	2,2	2,0	1,7	1,7	1,7	1,5
8	2,3	2,2	2,5	2,7	2,5	2,5	2,5	2,0	1,5	1,5	1,5	1,5	1,0	1,0
9	2,5	2,0	1,5	2,5	2,5	2,2	2,0	2,0	1,5	1,5	1,5	2,0	1,7	1,7
10	2,7	2,5	2,5	2,0	1,7	2,0	2,5	3,0	2,2	1,7	1,7	2,0	1,5	1,7
11	2,2	3,0	2,5	2,5	2,7	3,0	2,5	2,5	2,5	2,2	1,5	2,0	2,0	1,7
12	2,0	2,0	2,5	2,5	2,0	2,0	2,2	2,5	2,8	2,8	1,7	1,5	1,5	1,7
13	2,7	2,0	2,0	2,5	2,5	2,2	2,5	2,5	1,7	1,5	1,5	1,0	0,5	1,0
14	3,0	2,5	2,5	2,2	2,2	2,5	2,5	2,5	2,0	1,7	1,5	1,2	1,0	1,0
15	2,5	2,5	2,7	2,0	1,5	2,7	2,0	2,5	2,0	1,7	1,0	0,5	1,0	0,5
16	2,5	3,2	3,0	2,5	2,0	2,5	2,2	2,2	1,5	1,0	0,5	0,5	0,5	1,0
17	2,2	3,0	3,2	2,2	3,5	3,0	2,2	1,5	1,5	1,0	1,0	1,2	1,0	1,2
18	2,0	3,0	2,7	2,5	2,5	2,0	2,5	1,0	1,0	0,5	1,0	1,2	1,2	1,0
19	2,5	2,7	3,0	2,5	2,5	2,0	2,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,2	1,2
20	2,7	3,2	3,2	3,2	2,2	1,5	0,5	0,5	0,5	1,2	1,7	1,5	1,5	1,7
21	2,5	2,0	2,0	2,5	2,7	1,5	0,5	0,5	1,0	1,5	1,7	1,5	2,0	1,7
22	1,7	2,0	1,7	2,0	2,5	1,5	0,5	0,5	0,5	1,0	2,0	2,0	2,0	1,7
23	3,5	2,0	1,7	1,7	2,0	1,7	0,5	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	1,5	1,7
24	3,0	2,2	2,0	3,0	2,2	1,7	0,5	1,0	1,3	1,5	1,7	1,7	1,5	2,0
25	2,5	2,2	2,5	2,5	2,5	2,7	3,0	3,0	1,5	1,0	1,7	1,5	1,7	1,5
26	2,7	3,0	1,5	1,5	1,7	1,2	1,2	1,7	2,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0
27	2,7	3,0	2,5	2,0	1,7	1,2	1,0	1,5	1,2	1,2	1,5	0,5	0,5	0,5
28	3,5	2,5	2,5	1,7	1,5	1,2	1,0	1,5	1,0	1,2	1,0	1,0	1,2	1,7
29	3,0	3,0	2,7	2,2	1,5	1,5	1,0	1,0	1,7	2,0	1,7	1,5	1,7	2,0
30	3,7	3,0	2,5	2,2	1,5	1,5	1,2	1,7	2,0	2,2	2,0	1,5	1,7	2,5
31	3,0	2,5	2,5	2,0	1,5	1,5	1,5	1,7	2,0	2,0	2,2	1,7	1,7	1,7
32	3,2	2,5	2,5	1,7	1,2	2,0	1,5	2,0	2,0	1,7	2,0	1,7	1,7	1,7

№ пи-кета	Профиль														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
33	3,5	3,5	2,5	1,7	1,5	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,5	1,5	1,5	1,5
34	3,5	2,5	2,5	2,7	2,5	2,0	1,7	1,7	1,5	2,0	2,0	1,5	1,7	1,5	
35	2,5	2,5	2,5	1,7	1,5	1,5	1,5	1,7	1,5	1,7	1,2	1,5	1,7	2,0	
36	2,7	2,2	2,0	1,5	1,2	1,0	1,5	1,5	2,2	2,0	1,5	1,5	1,5	1,7	
37	2,7	2,0	1,0	0,5	1,0	1,2	1,2	1,2	1,5	1,5	1,5	1,7	1,5	1,7	
38	2,5	1,5	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,2	1,2	1,5	1,7	1,5	1,5	
39	2,0	1,7	1,5	1,2	0,5	1,0	1,5	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,2	1,5	
40	2,2	2,0	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,5	1,2	1,0	1,0	1,2	1,5	

Продолжение табл. 51

№ пи-кета	Профиль														
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25				
1	0,5	0,5	1,2	1,5	1,7	1,5	1,5	2,0	1,5	1,7	2,2				
2	0,5	1,2	1,5	1,5	1,5	1,5	2,2	2,5	2,5	2,0	2,2				
3	1,0	1,0	1,5	1,7	1,5	1,7	2,7	2,5	1,5	2,5	1,2				
4	1,5	1,5	1,5	1,7	1,5	1,5	2,0	2,5	2,7	2,7	1,7				
5	1,7	1,7	1,7	2,0	2,0	2,0	2,5	2,5	2,7	2,5	1,7				
6	1,5	1,7	1,5	2,0	2,5	2,5	2,5	2,2	2,5	2,0	1,5				
7	1,5	1,5	1,5	2,0	2,2	2,0	2,5	2,2	2,5	1,7	1,5				
8	1,2	1,0	1,2	1,5	2,0	2,0	1,7	2,0	1,7	1,2	1,2				
9	2,0	1,7	1,0	1,2	1,7	1,5	2,2	2,0	1,5	1,0	1,2				
10	1,7	1,5	1,5	1,5	1,0	1,5	2,0	2,2	1,0	1,0	2,0				
11	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,7	0,5	1,2	1,0	1,5	2,5				
12	1,5	1,7	2,2	1,7	1,5	1,5	2,2	2,2	2,5	1,5	2,0				
13	1,0	1,7	2,0	0,5	1,2	2,0	2,5	2,5	1,7	2,2	2,0				
14	1,0	0,5	0,5	1,0	2,0	2,0	2,5	2,7	2,0	2,5	2,5				
15	1,0	0,5	0,5	1,5	2,5	2,5	2,7	2,0	2,0	2,2	2,5				
16	1,5	1,0	1,0	2,0	2,0	2,5	2,5	2,7	1,7	2,5	2,5				
17	2,0	1,5	1,0	1,7	2,5	2,2	2,7	2,7	2,0	2,0	2,2				
18	1,0	1,5	2,2	2,5	2,5	2,5	3,2	2,5	1,5	1,5					
19	1,0	1,0	2,0	2,5	2,5	2,5	2,2	2,5	2,5	2,0	2,0				
20	1,5	1,2	1,5	2,5	2,5	2,5	2,2	2,5	2,0	2,2	2,2				
21	1,7	1,5	1,0	2,2	2,5	2,5	2,0	2,2	2,2	2,0	2,0				
22	1,7	2,2	1,5	2,0	2,5	2,7	2,2	2,5	2,5	2,5	2,0				
23	2,0	1,7	1,7	2,2	2,5	3,0	2,5	2,7	2,7	2,5	2,5				
24	2,0	2,0	2,2	2,2	2,5	3,0	2,0	1,7	2,2	2,5	2,5				
25	2,0	2,0	1,5	1,7	2,0	2,2	1,0	1,2	1,7	2,0	2,0				
26	1,5	1,2	1,0	0,5	1,0	1,2	2,0	2,5	2,5	2,2	2,5				
27	0,5	1,2	2,0	1,5	2,0	2,0	2,7	2,5	2,5	2,2	2,5				
28	2,2	1,7	1,7	1,7	2,2	2,7	3,0	2,5	2,5	2,5	2,5				
29	2,0	1,7	1,7	2,2	2,7	2,7	2,5	2,5	2,7	2,5	2,7				
30	2,5	1,7	2,5	3,0	3,0	2,5	2,5	2,7	3,5	3,5	3,5				
31	2,0	2,0	2,7	2,5	2,5	2,5	2,5	2,7	3,2	3,0	2,7				
32	1,5	1,7	2,5	2,5	2,5	2,7	2,7	2,7	2,5	2,5	2,5				
33	1,5	2,0	2,5	2,5	2,7	2,7	2,7	2,5	2,5	2,7	2,5				

№ пи-кета	Профиль										
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
34	1,7	1,5	1,7	2,7	2,5	2,7	2,7	3,0	2,5	2,0	1,0
35	1,5	1,7	1,7	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,0	1,5	1,2
36	1,7	1,7	2,5	2,7	2,7	2,5	2,7	2,0	1,5	1,5	1,5
37	2,0	1,7	2,2	2,5	3,0	2,5	3,0	1,5	1,5	1,5	1,5
38	2,0	2,0	2,2	2,2	2,2	2,0	2,0	1,5	1,5	1,5	1,5
39	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,7	1,2	0,5	1,0	1,5	1,5
40	1,2	1,0	0,5	0,5	1,2	1,2	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5

Таблица 52

Содержание (в 10⁻⁴%) тория

№ пи-кета	Профиль												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	10	13	7	6	6	6	10	13	10	10	9	9	7
2	12	13	10	6	6	8	10	14	11	9	7	7	6
3	14	12	12	6	6	11	11	13	15	11	8	8	8
4	15	8	12	8	12	12	13	20	18	13	10	10	11
5	8	10	10	9	10	10	15	20	18	14	11	10	11
6	10	12	10	9	9	10	14	12	10	10	11	10	10
7	12	14	11	10	11	13	14	12	10	10	9	10	12
8	14	13	14	12	12	12	10	10	10	11	12	10	8
9	16	13	12	13	13	12	12	12	13	10	11	12	11
10	15	15	14	11	12	12	16	14	14	10	12	10	8
11	16	16	13	15	16	15	15	14	12	12	10	11	10
12	16	15	14	14	14	15	14	14	14	13	11	11	10
13	16	14	14	16	16	15	13	12	13	13	13	12	10
14	17	14	13	13	9	13	11	10	13	11	12	13	11
15	13	16	13	14	11	15	14	11	10	8	7	7	8
16	20	16	12	12	14	15	14	11	7	6	4	4	9
17	15	19	17	18	17	14	13	7	6	6	6	6	8
18	12	14	17	13	13	15	12	6	6	6	7	7	8
19	13	14	18	14	12	10	6	5	4	4	8	8	8
20	12	15	17	15	10	4	4	4	4	6	6	6	8
21	12	11	12	15	12	4	3	6	5	5	5	7	9
22	12	11	11	12	11	4	3	5	5	6	7	10	9
23	16	11	12	12	11	7	6	5	5	6	7	9	7
24	12	11	15	14	13	8	7	7	6	6	6	7	6
25	12	11	14	14	13	12	13	11	9	9	10	9	9
26	15	14	15	12	10	9	9	10	9	7	7	10	7
27	14	12	12	13	10	7	4	6	7	9	10	8	7
28	16	14	12	10	10	8	7	6	7	9	9	9	7
29	16	15	15	11	10	9	8	7	6	8	10	10	8
30	12	14	12	12	9	8	9	8	8	12	10	9	10
31	11	12	12	8	7	8	7	6	8	7	10	8	8
32	11	13	11	8	6	8	6	8	10	10	9	9	10
33	16	14	11	8	8	7	8	8	9	8	10	9	10

№ пи-кета	Профиль												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
34	20	14	13	12	12	7	8	8	9	8	8	8	10
35	13	15	14	6	6	6	8	8	8	9	10	11	10
36	18	16	12	8	8	9	9	10	10	12	11	10	10
37	15	13	12	10	8	9	11	10	10	11	11	9	10
38	14	17	8	8	8	8	8	7	8	12	12	8	10
39	14	14	10	7	6	8	9	8	10	8	8	9	11
40	11	12	8	8	8	7	7	7	9	7	6	5	8

Продолжение табл. 52

№ пи-кета	Профиль												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
1	7	8	8	9	10	10	8	12	11	8	16	15	
2	7	10	11	10	10	10	7	11	12	11	16	12	
3	8	10	10	11	17	11	14	16	17	19	20	11	
4	11	10	10	14	13	14	16	15	20	16	21	13	
5	11	9	11	19	13	14	15	18	17	18	16	14	
6	9	11	10	11	12	14	15	17	16	17	14	15	
7	10	10	10	12	12	14	14	15	15	14	13	14	
8	9	10	12	14	14	14	15	17	15	13	13	12	
9	11	8	10	13	12	16	10	17	16	12	10	10	
10	11	10	12	14	11	15	17	16	14	10	9	9	
11	10	10	12	14	14	17	12	9	9	9	9	10	
12	10	10	13	15	14	11	16	17	11	13	11	14	
13	7	7	12	11	11	14	16	14	15	17	19	20	
14	8	4	6	9	15	20	22	24	28	21	24	21	
15	8	9	8	12	16	24	29	24	16	21	25	23	
16	10	12	10	16	20	22	29	25	21	19	19	18	
17	9	11	12	16	20	21	28	30	24	24	23	20	
18	9	12	16	20	22	22	24	29	25	20	16	18	
19	9	9	12	16	16	20	29	28	23	22	23	22	
20	7	6	9	17	21	24	28	22	18	16	16	18	
21	9	9	9	10	23	28	25	20	29	16	18	16	
22	7	9	10	15	22	24	22	29	18	17	21	22	
23	6	8	11	15	16	20	24	26	24	22	22	21	
24	6	10	13	20	20	28	22	22	22	20	20	21	
25	12	13	14	14	15	16	12	14	16	16	17	16	
26	10	9	8	9	12	14	20	27	27	24	24	20	
27	8	8	8	12	17	20	24	29	26	23	23	20	
28	11	17	13	14	18	21	27	24	22	25	22	18	
29	9	11	10	17	15	22	24	23	24	27	29	27	
30	11	10	12	17	20	29	30	30	27	32	29	27	
31	10	10	12	17	22	28	32	30	32	33	28	23	
32	10	9	20	18	26	30	33	34	34	33	24	20	
33	10	14	20	24	28	30	30	28	28	28	19	18	
34	12	12	14	20	22	28	28	28	28	27	22	20	

№ пи- кета	Профиль												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
35	11	13	15	18	19	23	26	22	24	19	20	15	
36	10	10	12	15	23	24	30	29	23	20	25	25	
37	10	12	13	15	22	24	25	24	29	17	12	13	
38	10	13	13	18	23	24	24	21	17	16	12	16	
39	11	11	11	17	23	23	23	29	17	19	13	17	
40	11	12	11	17	21	23	24	27	11	12	14	16	

Таблица 53

Содержание (в 10⁻⁴%) урана

№ пи- кета	Профиль												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	3,5	3	2	1,5	2	3	3,5	3	3	2,5	2,5	2,5
2	3,5	2,5	3	2	2	2,5	3	3	3	2,5	2	2	1,5
3	4	3,5	3	2,5	2	2,5	2,5	2,5	4	4	3	2,5	3
4	4	3	2,5	3	2	3	3,5	4	4	3	3	2,5	3
5	2	3,5	3,5	3,5	3	3	3	3,5	3	4	3,5	2,5	3
6	4	4	5,5	4,5	3	4	4	4,5	4	4	4,5	4,5	4
7	3	4,5	4,5	4	3	3,5	3,5	4	3,5	4	4	4	3,5
8	2,5	5	4	3	4	3	4	3	3	3,5	4	4	3,5
9	2,5	5	4	2,5	3	3,5	3	3	3	3	3	3,5	3
10	3,5	3,5	3,5	3	4,5	3,5	3	3	3,5	3,5	3	3	3
11	3	3	4	4,5	4	4	4	3,5	3,5	3	3	3	3
12	3,5	4	3,5	3	3,5	3	3	3	3,5	3,5	3	3	3
13	4	3,5	3,5	3,5	4	3,5	3,5	4	3,5	3,5	3	3	3
14	4	3,5	3,0	3,5	3,5	3,5	3	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3
15	3	3	3,0	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3	2,5	2,5	2	3
16	3	3,5	3,5	3	4	3	3,5	2,5	2	1	1	1	1
17	3,5	3,5	3	3	4,5	3	3	?	1	1	1,5	1,5	1,5
18	2	3	3,5	3	3,5	3	3,5	2	1,5	:	1	1,5	2
19	2,5	3	2,5	3,5	3	2,5	2,5	1,5	1	1	1	1	2
20	3,5	3,5	3,5	3	3	2	1	1	1	1	1	2	3
21	3	3	3	3	3	2	1	1	1	1,5	1	2	3
22	2,5	3	2,5	2,5	3	2	1	1	1,5	1,5	1,5	2,5	2,5
23	3,5	3,5	2,5	3	2,5	2,5	1,5	1	1,5	1,5	2	2,5	2,5
24	3	3	3	4	2,5	2	2	1,5	1,5	2	2,5	2,5	2
25	3,5	3	3,5	3,5	2,5	3	2,5	3	3	1	2	2,5	2
26	3	3	3	3	2	2	2	2	2,5	2	1	1,5	1,5
27	3,5	3,5	3	3	2	2	1,5	1	1,5	2	2	1	2
28	3	3,5	3	2,5	2	1	1	1	1,5	1	1,5	1	2
29	3,5	3,5	3	2,5	3	2	1,5	1	2	2	2,5	2	2
30	3,5	3,5	3,5	3	3	2,5	4	2	2	2,5	3	2	2,5
31	3,5	3,5	3	2,5	1,5	2,5	2	2	2	3	3	2,5	2
32	3,5	3,5	2,5	2	1,5	2	1	2	2,5	2	2,5	2,5	2,5

№ пи- кета	Профиль												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
33	3,5	3,5	2,5	2	2	2,5	2	2	2,5	1,5	2,5	2,5	2
34	4,5	3,5	2,5	2	2	2	2,5	2,5	2	2	2,5	2	2,5
35	3,5	3,5	4	2	3	3	3	3	2,5	3	3	3	3
36	4,5	3,5	3,5	2,5	2,5	2,5	3	3,5	3,5	4	3	3,5	3,5
37	3,5	3,5	2,5	2	2	2,5	2,5	2,5	3	3	3,5	3,5	2,5
38	2,5	4	3,5	2,5	2	3	2,5	2	3	3	3	3,5	2,5
39	2,5	3,5	3	2	2	2	2,5	2	2,5	2	2	2,5	3
40	3	3,5	2	2	2	2	1,5	2	2	2	1,5	1,5	2

Продолжение табл. 53

№ пи- кета	Профиль												
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
1	2	2	2,5	3	3	3	3	3	3	4,5	3,5	4,5	
2	1	2	3	3	2,5	3	3,5	3,5	3,5	4	4	4,5	
3	2,5	2,5	2,5	2,5	3	2,5	3	4	4,5	4,5	4	4,5	
4	3	2,5	2	2,5	3	3	3,5	3,5	4	4,5	4,5	4,5	
5	3	3	3	3	3,5	3,5	3,5	4	4	5	4	3,5	
6	4	4	5	4	4,5	5	5	5	5	6	6,5	4,5	
7	4,5	3,5	4	4	4,5	6	5	5	5	5	4	4	
8	3,5	3,5	2,5	3	4	4	4,5	5	4	3,5	3,5	3,5	
9	3	3,5	3	3	3	3,5	3,5	4	4	4	3	3	
10	3	3	3	3	3,5	3	3,5	4,5	5	3,5	3	3,5	
11	3	3	3	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	4	4,5	4	
12	3,5	3	4	4,5	3,5	3	3,5	7,5	5	5	4	4	
13	3	3	3	3,5	3,5	4,5	4	5,0	5,5	5	4,5	4,5	
14	3	2,5	3	3	4	4,5	4,5	4,5	5	5,5	6	6	
15	2,5	3	3	3	4	4,5	6	6	5	5	7,5	6	
16	2	3	2	2	3	4	4	4,5	5	4	4	4	
17	2	3	2	2	4	4	4,5	4	4,5	4,5	5	5	
18	2	2	2,5	4	4,5	3,5	5	4	4,5	4	4	4,5	
19	1,5	2	2,5	3	3	4	4	5	5	5	7	4,5	
20	2	2	3	3	3,5	4,5	4	4,5	6	5	5	6	
21	2,5	2	3,5	3	4	5	5	5	7,5	7,5	5,5	5,5	
22	2,5	2,5	3	3	4	4	5,5	6	9	8	8	6	
23	2,5	2,5	3	3	3,5	4	5	5,5	7	7,5	6,5	8,5	
24	2,5	3	3	3,5	3,5	4	5	5	6	8	6	5,5	
25	2,5	3,5	3	3	3,5	3	3	3	4	4	4,5	5	
26	2	2,0	2	2	2	3	3,5	4	5	5	6	6	
27	2	2,5	3,5	2,5	3	4	5	5,5	5,5	6,0	6	5	
28	2	2	2	2	3	5	5	4,5	5,5	6,0	5	4,5	
29	3	3	2,5	3,5	3,5	4	3,5	4	4	5	6	5	
30	3	2,5	2,5	4	3,5	4,5	3,5	4	5	6	5,5	4,5	
31	2	2,5	2	4	3,5	5	5,5	4,5	7,0	6	6	4	
32	2	2,5	2,5	3,5	4	5,5	5	6	6,5	5,5	6,5	4,5	

№ пикета	Профиль											
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
33	2	2,5	4	4,5	4	4,5	4,5	4,5	4	4,5	5	5
34	2,5	2,5	3,5	4,5	4	4	4,5	4,5	5	4	4	4
35	3	3,5	3,5	4,5	5,5	5	4,5	5,5	6,5	6	5	3,5
36	3,5	3,5	3	5	7,5	5	6	6	6,5	5,5	5	2
37	2,5	3	3	3	4,5	4,5	5	5,5	5	4	3	2,5
38	3,5	2,5	3	3,5	5	4,5	4,5	5	4	3,5	3	3
39	2,5	2,5	3	3,5	4,5	4	4	4,5	3	3	3,5	2,5
40	2,5	3	3	4	4	4,5	4,5	4	2,5	3	4,5	2,5

Методические указания

Для выделения участков с аномальными значениями содержаний радиоактивных элементов в качестве геолого-математической модели предлагается использовать модель типа случайных функций. Из существа предлагаемой модели наблюдаемая изменчивость свойств геологических объектов рассматривается как совокупность закономерной и случайной составляющих изменчивости. При этом, в рамках поставленной задачи закономерную составляющую изменчивости следует рассматривать как фоновую, а случайную составляющую изменчивости — как аномальную. Отсюда для решения задачи необходимо из наблюдаемой изменчивости содержаний радиоактивных элементов выделить случайные составляющие и по ним определить участки с аномальными значениями параметров.

1. При выяснении вопроса о наличии закономерной (трендовой) составляющей в изменчивости параметров применяются следующие способы проверки гипотез о наличии тренда: а) способ подсчета количества точек "смены знака", б) способ подсчета количества "скачков".

Способ проверки гипотезы о наличии тренда по количеству точек "смены знака". Точкой "смены знака" в упорядоченной последовательности называется такой элемент последовательности, в котором знак приращения меняется на противоположный. На графиках в точках "смены знака" происходит перегиб.

Число точек "смены знака" в случайной последовательности зависит от общего количества значений в последовательности (N). Для случайных последовательностей, где количество значений более 10, статистическое распределение числа точек "смены знака" близко к нормальному с математическим ожиданием $E(t) = (2N - 4)/3$ и дисперсией $\sigma^2(t) = (16N - 29)/90$.

Проверка гипотезы основана на сравнении теоретического значения числа точек "смены знака" [$E(t)$] с фактическим числом точек перегиба

в исследуемой последовательности (t). Для этих целей рассчитывается критерий $Z = |[t - E(t)]/\sigma(t)|$. Полученное значение критерия Z позволяет с помощью таблицы нормального распределения (см. прил. 3) определить вероятность полученного отклонения фактического значения от теоретического в случайной последовательности. Если вероятность такого отклонения мала (например 0,05), то гипотезу о случайном характере последовательности отвергают и считают, что изучаемая последовательность имеет тренд. Вероятность 0,05 соответствует $Z \approx 1,7$.

Способ проверки гипотезы о наличии тренда по количеству "скачков". Этот способ используется, когда упорядоченная последовательность состоит из двух типов элементов, которые условно можно обозначить знаками (+) и (-). "Скачком" называется интервал последовательности, включающий один или более одинаковых элементов.

При изучении параметров геологических объектов "скачки" могут быть получены путем разделения всех значений параметра на две группы по их отношению к медианному значению. Все значения больше медианного обозначаются знаком (+), а все значения меньше медианного — знаком (-). Например, последовательность $(++-+-+----++++-)$ может быть разделена на шесть "скачков" $(++)-(++)-----(++++)----$. Число скачков в случайных последовательностях зависит от количества элементов со знаком (+) — (N_1) и знаком (-) — (N_2). Статистическое распределение количества "скачков" в случайных последовательностях асимптотически близко к нормальному с математическим ожиданием

$$E(u) = \left[\frac{2N_1N_2}{(N_1 + N_2)} \right] + 1 \text{ и дисперсией } \sigma^2(u) = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)}.$$

Как и в предыдущем способе, теоретическое значение числа "скачков" $E(u)$ сравнивается с фактическим по исследуемому ряду (u) по критерию

$$Z = \left| \frac{[u - E(u)]}{\sigma(u)} \right|.$$

С помощью таблиц нормального распределения определяют вероятность полученного отклонения в случайной последовательности. Если эта вероятность мала, то гипотезу о том, что исследуемая последовательность случайна, отвергают и считают, что исследуемый ряд обладает трендом.

Каждый из двух рассмотренных способов наиболее чувствителен к закономерностям определенного типа, поэтому для принятия гипотезы о наличии тренда достаточно, чтобы она подтверждалась хотя бы одним из них.

Если в наблюдаемой изменчивости гипотеза о наличии тренда не подтверждается, то изменчивость в распределении содержаний следует определять как случайную и в дальнейшем все операции проводить как со случайной составляющей.

При подтверждении гипотезы о наличии тренда необходимо описать характер имеющейся закономерности в пространственной изменчивости радиоактивных элементов (линейный тренд, периодичность в изменчивости и т. д.).

2. Убедившись в наличии закономерных составляющих, следует определить размеры этих неоднородностей.

Для этих целей по взаимно перпендикулярным профилям рассчитываются эмпирические нормированные автокорреляционные функции по формуле

$$\rho_x(r) = \frac{[\sum_{i=1}^{N-r} (x_i - \bar{x})(x_{i+r} - \bar{x})]}{(N-r)S^2}.$$

По полученным данным строятся графики автокорреляционных функций. Размер интервала автокорреляции позволяет оценить размер имеющейся в наблюдаемой изменчивости неоднородности пространственного распределения содержаний радиоактивных элементов.

Размеры интервалов корреляции по двум взаимно перпендикулярным профилям позволяют оценить также анизотропию каждого из признаков.

3. Наиболее простым преобразованием исходных данных, позволяющим выделить в наблюдаемой изменчивости закономерную составляющую, является сглаживание способом "скользящего окна". Этот способ заключается в том, что каждое наблюдаемое значение на профиле или плоскости заменяется средним арифметическим из всех значений, попадающих в определяемую область (статическое "окно"), центром которой является сглаживаемое значение.

Размер "окна" сглаживания выбирается исходя из величины интервала автокорреляции. При этом, если сглаживание производится по профилю, то статистическое "окно" соответствует отрезку профиля, равному интервалу автокорреляции. При двумерном анализе статистическое "окно" соответствует площадке со сторонами, равными интервалам автокорреляций по взаимно перпендикулярным профилям.

Ориентировка площадок сглаживания соответствует ориентировкам двумерных интервалов автокорреляций. В итоге проведенных расчетов получаем значения сглаженных содержаний радиоактивных элементов в точках исходной сети наблюдений. Это позволит построить карты изобилий фоновых составляющих наличия урана, тория и калия исследуемой территории.

4. Случайные составляющие полей содержаний радиоактивных элементов определяются как разность исходных и сглаженных значений присутствия урана, тория и калия. В итоге получается карта значений разности исходных и сглаженных содержаний указанных элементов в точках наблюдения исходных данных

5. Для оценки аномальных значений случайной составляющей измен-

чивости можно использовать свойство нормального закона распределения. Одно из его свойств позволяет оценить аномальные значения случайной составляющей изменчивости по следующей формуле:

$$\Delta x_{ан} \geq t_{\alpha} S_{сл},$$

где $\Delta x_{ан}$ — аномальное значение случайной изменчивости параметра; t — критическое значение критерия Стьюдента при заданном уровне значимости α и степени свободы $K = N - 1$; $S_{сл}$ — среднее квадратичное отклонение случайной составляющей изменчивости параметра; N — число точек наблюдений.

Каждый член бригады рассчитывает дисперсию случайной составляющей изменчивости содержаний какого-либо радиоактивного элемента. Затем, задавшись уровнем значимости $\alpha = 5\%$ и определив степень свободы, находит критическое значение критерия Стьюдента по таблице прил. 1.

6. Найдя аномальные значения случайных составляющих, бригада приступает к выделению аномальных участков. Для этого на картах случайных составляющих изменчивости содержаний радиоактивных элементов проводятся изолинии аномальных значений ($\Delta x_{ан}$). При этом для решения поставленной задачи проводятся изолинии положительных аномальных значений содержаний урана, тория и изолинии отрицательных аномальных значений содержания калия.

7. Площади перспективных участков выделяются по совпадению положительных аномалий содержаний урана, тория и отрицательных аномалий калия.

ЗАДАЧА 4.2

Выявление и количественное описание закономерностей пространственного изменения параметров рудной залежи на месторождении никеля

Месторождение никеля связано с площадной латеритной корой выветривания дацитов и гарибургитов. Кора выветривания имеет сложное строение. На месторождении выделяется два технологических типа руд. Верхняя часть рудной залежи (зона охристых руд) сложена гиббсит-гит-лимонитовыми рудами, а нижняя (зона полуохристых руд) — лимонит-серпентиновыми рудами. Полезными компонентами являются никель, железо и кобальт. При оценке технологических свойств руд учитывается содержание в них Cr_2O_3 , SiO_2 , Al_2O_3 и MgO . В табл. 54–65 приведены характеристики качества руды по зонам охристых и полуохристых руд, а также мощности этих зон по одному из участков месторождения, разведанному скважинами по сети 100×100 м.

Мощность зоны охристых руд в метрах

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2,7	3,3	2,7	4,0	1,0	4,0	2,9	1,0	2,0	4,0	4,5	4,3	3,0	4,3	6,3	1,0
2	1,5	1,0	3,6	4,3	5,0	4,4	2,7	2,2	3,7	4,4	3,3	4,9	1,2	1,0	5,2	4,4
3	1,0	3,0	4,0	5,0	4,2	5,2	1,5	2,0	7,0	1,5	4,0	8,5	6,0	4,0	2,0	1,0
4	1,0	2,0	5,1	3,4	3,7	7,2	4,7	3,8	2,0	1,5	1,6	6,0	2,0	4,3	2,0	6,0
5	4,1	1,0	4,4	4,4	8,5	6,7	5,4	5,1	5,3	4,3	1,1	2,9	4,3	3,3	5,3	1,6
6	5,0	4,3	7,3	4,3	10,2	8,7	9,1	9,6	6,6	1,0	3,6	1,0	3,7	4,3	2,9	2,7
7	7,0	10,9	9,6	4,5	10,8	10,6	9,5	9,9	7,7	3,6	1,3	1,5	2,7	1,1	2,2	1,5
8	2,5	2,7	12,1	8,0	8,2	7,2	9,7	9,9	9,3	3,7	8,2	4,0	3,8	2,0	1,2	2,0
9	2,0	5,1	11,1	8,0	11,5	14,5	13,2	12,5	8,6	6,5	5,5	5,2	2,0	4,0	1,5	1,2
10	1,5	5,2	5,1	7,7	11,7	21,8	15,5	9,1	7,0	5,0	2,7	4,5	2,7	5,1	2,5	1,0
11	1,0	3,0	5,8	6,1	15,8	6,3	6,7	8,5	6,0	4,9	5,1	4,0	2,0	4,0	3,7	4,0
12	4,3	4,2	1,0	8,0	3,4	7,2	8,5	5,4	4,7	2,0	4,5	4,3	3,8	4,4	1,3	1,5

Таблица 55

Содержание (в %) никеля в зоне охристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1,05	1,14	1,25	0,83	1,17	0,97	1,10	0,91	1,05	1,19	1,43	1,38	1,32	1,46	1,32	1,29
2	1,20	1,28	1,29	1,33	1,18	1,22	1,19	1,12	1,18	1,19	1,13	1,28	1,43	1,66	1,39	1,36
3	1,32	1,47	1,31	1,35	1,23	1,39	1,08	1,08	1,15	1,19	1,22	1,39	1,37	1,03	1,21	1,23
4	1,38	1,44	1,35	1,31	1,53	1,36	1,27	1,23	1,18	1,44	1,42	1,42	1,10	1,67	1,75	0,83
5	1,14	1,05	1,18	1,32	1,30	1,29	1,20	1,41	1,63	1,33	1,12	1,38	1,38	1,35	1,32	0,90
6	0,77	0,81	1,33	1,28	1,28	1,21	1,23	1,40	1,47	1,04	1,40	1,30	1,32	1,31	1,28	1,27
7	0,87	1,44	1,29	1,32	1,34	1,27	1,27	1,30	1,33	1,30	1,11	1,11	1,31	1,27	1,23	1,40
8	1,04	1,22	1,38	1,46	1,17	1,14	1,23	1,32	1,32	1,21	1,40	1,14	1,27	1,25	1,18	1,47
9	1,22	1,30	1,47	1,30	1,25	1,29	1,25	1,31	1,23	1,22	1,16	1,19	1,03	1,08	1,23	1,43
10	1,11	1,28	1,30	1,32	1,28	1,31	1,29	1,27	1,29	1,10	1,12	1,15	1,21	1,19	1,21	1,04
11	0,91	1,15	1,11	1,11	1,41	1,27	1,43	1,41	1,43	1,41	1,08	1,12	1,15	1,30	1,22	0,90
12	1,10	1,34	1,53	1,75	1,32	1,30	1,29	1,27	1,23	1,30	1,27	1,18	1,19	0,82	1,13	1,05

Таблица 56

Содержание (в %) железа в зоне охристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	44,2	44,6	45,88	44,8	42,6	43,0	45,1	45,3	40,7	46,6	43,1	45,6	46,1	45,2	44,5	44,9
2	44,8	45,7	46,8	47,2	44,3	41,4	40,5	38,6	43,4	42,1	41,1	45,6	46,8	44,3	42,6	45,3
3	45,3	42,0	42,3	43,0	47,6	42,6	36,6	40,0	41,8	38,9	43,0	43,7	41,6	48,0	44,4	46,2
4	45,4	43,7	41,2	42,8	43,2	45,7	43,8	40,5	42,2	41,6	37,5	42,0	42,1	42,9	41,3	45,5
5	41,3	46,0	46,1	44,4	43,2	44,6	44,8	43,8	41,0	40,9	40,5	43,0	41,9	41,2	46,1	47,3
6	44,5	45,8	42,9	46,2	43,5	44,2	44,7	44,4	44,3	41,7	41,4	40,5	35,1	40,8	40,5	40,0
7	45,5	43,8	44,9	47,5	45,5	44,8	44,3	45,4	45,0	45,0	42,3	45,6	43,4	41,8	42,2	38,6
8	47,3	46,3	45,6	45,3	42,8	43,0	45,8	47,5	46,0	45,0	45,4	43,8	41,6	4,07	41,0	36,6
9	46,1	46,4	45,2	46,7	47,0	46,5	47,6	47,2	46,3	45,1	44,9	42,5	41,4	41,6	38,9	36,2
10	47,5	44,9	48,0	48,2	48,9	47,5	47,6	46,1	46,8	42,8	44,8	44,3	42,9	40,9	40,4	42,8
11	36,2	49,9	49,6	47,9	47,2	48,5	45,3	45,4	44,8	43,8	43,2	45,0	42,1	41,7	43,8	43,5
12	45,1	45,6	45,6	49,3	47,2	47,0	46,3	44,4	43,8	42,5	42,8	45,1	45,0	45,0	42,8	46,0

Содержание (в л·10⁻³ %) кобальта в зоне охристых руд

№ про- филя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	70	60	70	50	120	40	90	35	80	70	130	130	150	90	45	70
2	80	30	100	65	70	100	65	50	90	80	100	120	160	70	120	45
3	45	60	110	80	90	80	80	70	130	120	100	120	90	120	90	110
4	50	40	120	70	110	140	120	100	100	150	90	70	110	110	110	140
5	60	70	130	120	110	120	120	100	80	80	80	80	100	80	90	100
6	45	140	120	100	140	120	106	110	100	100	110	90	80	70	80	45
7	55	120	120	130	130	110	110	100	120	120	120	100	140	100	70	65
8	100	90	130	90	150	110	110	120	130	130	130	120	90	65	40	45
9	80	100	118	100	110	120	110	110	130	140	150	120	120	100	90	80
10	100	110	110	120	160	110	120	130	120	160	120	140	130	80	70	55
11	65	105	90	120	133	133	133	113	100	40	120	130	120	110	80	50
12	85	110	120	90	190	150	130	120	100	100	70	60	80	120	80	30

Таблица 58

Содержание SiO₂ (в %) в зоне охристых руд

№ про- филя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	7,3	6,6	2,5	9,7	11,3	12,7	12,2	15,9	19,2	18,1	13,4	11,0	10,4	8,3	8,4	9,7
2	12,0	13,3	13,4	9,3	11,7	13,3	12,2	12,0	10,6	2,5	12,0	9,7	9,2	8,1	7,2	17,8
3	17,1	17,4	8,3	7,6	7,2	1,9	17,8	15,7	12,2	13,3	17,8	10,4	7,1	7,3	9,5	16,0
4	16,0	11,7	9,3	7,6	11,3	15,7	8,1	8,3	6,3	11,7	13,4	16,0	12,7	7,2	5,4	8,8
5	8,7	11,0	12,1	9,3	12,0	12,1	11,0	12,1	10,4	16,0	7,2	7,3	12,5	6,6	3,0	5,3
6	3,0	7,2	2,9	12,5	6,6	7,3	12,2	6,3	11,3	12,2	12,0	9,5	5,3	2,5	3,7	3,0
7	5,4	8,1	16,0	17,8	8,7	9,2	10,6	3,0	7,1	12,5	8,4	6,3	3,7	2,3	2,2	4,6
8	1,9	2,3	6,3	2,3	2,1	2,2	2,1	5,3	2,5	12,7	8,8	9,5	7,2	2,9	2,5	2,1
9	8,8	6,6	3,0	5,4	4,5	2,3	2,2	3,7	2,9	4,6	10,4	7,2	7,9	7,2	2,1	2,2
10	12,0	9,3	4,6	6,3	8,8	3,0	4,6	4,5	3,0	2,5	3,0	5,3	4,6	6,3	2,2	2,3
11	12,5	16,0	8,7	7,6	3,0	2,3	2,2	6,3	2,1	2,2	8,1	4,5	6,6	2,3	1,9	2,1
12	11,3	12,1	9,4	2,1	1,9	2,1	7,3	7,6	15,7	9,2	8,3	6,3	3,0	2,2	2,3	3,0

Таблица 59

Содержание Al₂O₃ (в %) в зоне охристых руд

№ про- филя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	8,5	9,4	4,6	13,2	6,8	7,0	8,4	9,5	5,8	7,7	7,9	7,5	8,5	8,7	8,4	8,6
2	8,6	9,7	11,3	7,2	7,5	6,3	6,5	12,0	13,2	20,2	8,3	6,8	7,2	8,2	9,0	8,8
3	7,6	7,4	8,3	8,2	7,9	7,5	9,0	7,9	11,3	13,1	8,5	8,3	7,9	7,9	11,3	9,4
4	7,9	8,9	8,1	8,1	8,4	7,0	7,1	6,5	6,9	7,7	9,2	7,0	6,6	5,9	7,2	8,5
5	8,2	8,8	7,9	8,4	9,2	9,0	6,9	6,8	6,6	6,8	9,7	8,6	7,5	5,8	7,6	8,9
6	8,4	7,9	9,0	9,4	5,8	8,1	5,9	8,6	7,9	7,5	7,7	7,6	7,4	5,9	8,8	8,6
7	7,9	8,1	8,2	9,2	9,7	13,2	6,8	7,7	7,5	7,1	6,6	6,3	7,6	7,7	8,6	10,6
8	10,6	11,3	7,2	9,4	—	8,5	8,9	7,6	10,6	7,2	7,5	8,8	8,3	6,8	9,2	9,7
9	7,7	7,9	7,0	9,0	8,6	7,6	7,4	9,7	12,0	8,4	7,0	7,2	6,6	5,8	6,6	6,5
10	6,6	7,2	7,6	8,8	3,8	8,1	8,8	9,4	10,6	9,7	8,1	6,6	5,8	6,6	4,0	8,9
11	8,1	7,5	7,2	7,5	8,3	8,5	8,4	12,1	9,4	8,8	7,5	7,0	3,8	6,8	8,1	8,9
12	8,6	5,9	7,6	7,7	8,1	8,5	9,7	15,1	9,0	8,1	7,1	6,9	5,9	7,5	7,4	8,8

Мощность (в м) зоны полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2,0	1,0	1,5	1,0	2,7	1,0	3,8	3,5	2,3	2,2	3,1	2,9	2,6	3,5	5,2	3,4
2	2,5	3,1	1,9	2,0	4,0	2,0	4,1	4,9	3,5	3,5	4,1	3,3	2,7	5,4	4,1	3,5
3	2,8	2,5	2,2	2,4	2,0	4,2	5,2	4,2	2,2	5,1	4,0	2,7	2,0	8,0	5,1	4,2
4	3,9	3,7	2,9	2,2	2,0	2,4	3,9	3,7	3,8	3,5	4,1	1,0	2,0	4,9	4,0	3,8
5	4,2	6,0	4,3	3,2	3,8	2,8	2,8	3,0	4,6	5,9	3,4	1,8	3,7	2,7	3,1	2,9
6	2,5	1,9	3,5	4,5	2,8	3,8	2,7	2,9	3,5	10,0	2,4	1,0	3,3	2,7	2,2	2,4
7	2,5	3,6	3,4	2,8	3,1	3,8	2,9	2,6	2,9	2,7	1,4	3,0	2,2	2,0	1,0	2,7
8	1,0	3,1	4,7	4,0	3,2	4,9	2,6	4,5	2,5	1,5	2,5	3,5	3,1	2,3	2,0	2,5
9	2,0	2,8	3,8	6,7	4,3	3,1	2,9	5,6	4,8	2,4	1,0	2,7	1,2	3,4	2,9	2,8
10	3,8	2,9	4,5	3,8	2,3	2,9	2,7	4,3	4,2	4,0	6,0	5,4	1,0	3,6	2,9	2,7
11	3,1	3,2	3,5	1,0	2,6	3,0	2,4	4,2	6,0	3,7	5,9	4,6	4,3	2,8	1,8	1,0
12	2,6	2,7	2,8	1,4	2,5	2,8	3,0	3,8	4,7	3,0	3,8	3,2	3,5	2,4	1,2	2,3

Таблица 61

Содержание (в %) никеля в зоне полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1,03	1,01	1,37	0,56	1,37	1,25	1,15	1,03	1,07	2,30	1,23	1,28	1,23	1,44	1,56	1,48
2	1,32	1,40	1,44	1,60	1,38	1,27	1,03	1,15	1,56	1,27	1,16	1,66	1,42	1,68	1,66	1,58
3	1,31	1,61	1,62	1,68	2,06	1,56	1,13	1,37	1,33	1,27	1,40	1,60	1,15	1,67	1,51	1,47
4	1,50	1,44	1,78	1,50	1,64	1,62	1,44	1,26	1,31	1,33	1,32	1,35	2,30	1,68	1,58	0,51
5	1,54	1,25	1,37	1,25	1,51	1,50	1,58	1,85	1,54	1,38	1,46	1,57	1,74	1,72	1,40	0,47
6	0,57	1,75	1,79	1,32	1,54	1,56	1,51	1,57	1,62	1,53	1,72	2,00	1,58	1,68	1,67	1,40
7	0,87	1,61	1,66	1,75	1,64	1,67	1,47	1,48	1,44	1,29	1,27	1,03	1,66	1,42	1,07	1,27
8	0,93	1,70	1,95	1,97	1,46	1,37	1,40	1,74	1,61	1,06	1,44	1,28	1,16	1,15	1,33	1,13
9	1,32	1,92	1,96	1,65	1,68	1,83	1,68	1,60	1,38	1,42	1,17	1,16	1,01	1,06	1,17	0,99
10	1,67	2,30	1,74	1,79	0,52	1,77	1,58	1,38	1,35	1,57	0,99	1,15	1,80	1,33	1,27	1,07
11	2,00	2,30	1,53	1,03	1,62	1,82	1,47	1,40	1,32	1,46	1,38	1,16	1,33	1,31	1,23	0,75
12	1,85	1,74	1,60	1,57	1,57	1,80	1,42	1,37	1,38	1,42	1,29	1,26	1,50	1,25	1,27	1,16

Таблица 62

Содержание (в %) железа в зоне полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	20,5	17,2	20,2	22,4	21,2	18,4	20,4	22,3	24,5	25,8	26,8	24,7	22,5	20,7	18,7	23,4
2	21,2	19,6	21,6	21,3	12,8	20,3	21,4	22,9	21,0	21,4	25,3	19,5	17,1	18,4	18,1	18,0
3	21,6	21,7	23,2	23,4	21,6	19,8	18,5	21,8	23,4	24,7	26,0	23,3	28,5	13,8	22,8	18,5
4	23,1	17,1	17,4	18,5	24,1	21,9	20,1	21,6	22,8	20,3	22,8	22,0	21,4	24,9	23,2	22,9
5	24,5	24,6	18,2	18,7	19,8	21,8	20,6	23,2	24,8	22,3	21,5	21,4	22,0	19,5	20,1	20,6
6	21,0	21,4	20,9	20,5	22,4	21,6	22,5	20,2	20,7	20,4	21,5	18,1	19,9	20,3	19,8	21,6
7	18,4	20,3	20,5	19,8	17,2	20,7	23,6	21,3	20,6	12,3	25,4	24,9	22,0	21,7	21,8	23,6
8	19,4	17,8	17,6	20,8	21,2	20,0	23,1	21,6	18,8	19,8	21,0	20,8	21,4	21,8	21,9	23,2
9	22,1	17,2	20,5	18,0	21,9	20,2	20,8	21,2	17,7	21,7	25,2	23,2	22,6	22,6	20,2	20,8
10	26,0	24,9	22,6	23,4	16,2	20,8	21,7	18,4	18,1	20,3	19,9	24,8	19,6	20,7	20,0	19,5
11	28,5	26,0	25,2	25,6	22,3	20,7	23,2	22,8	21,5	20,7	19,8	24,1	18,8	17,7	21,9	1,7
12	26,6	25,3	25,4	23,3	22,0	21,5	21,4	20,8	21,0	20,6	20,8	21,6	12,3	19,8	18,5	

Содержание (в $\mu \cdot 10^{-3}$ %) кобальта в зоне полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	50	45	48	30	37	33	43	46	53	55	103	66	35	37	43	44
2	53	60	53	49	39	37	40	42	48	57	58	43	30	30	52	38
3	61	47	84	45	46	44	38	36	57	69	64	58	39	61	50	36
4	46	48	54	34	47	59	54	50	54	35	50	47	42	49	47	50
5	48	50	53	46	42	40	57	52	52	54	43	45	50	37	42	49
6	43	48	64	55	63	66	60	56	44	48	48	45	40	35	36	48
7	38	34	35	48	36	37	45	53	45	42	53	62	58	57	52	45
8	45	47	43	33	39	46	48	46	50	38	43	47	40	54	45	42
9	43	44	37	43	42	45	46	47	43	39	46	84	45	43	40	39
10	50	54	59	58	63	30	49	60	48	55	45	66	50	45	42	34
11	55	56	66	64	82	53	61	51	57	109	58	53	46	43	37	40
12	58	62	60	63	80	45	55	48	64	66	51	46	48	40	38	52

Таблица 64

Содержание (в %) Al_2O_3 в зоне полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2,2	1,8	2,0	2,4	2,6	2,4	3,4	4,1	3,3	4,6	3,0	2,6	1,8	3,0	1,8	2,2
2	2,6	2,5	3,1	4,7	4,2	3,3	10,4	5,8	7,4	5,6	4,7	3,4	3,3	3,4	2,2	2,4
3	3,1	2,4	3,4	4,0	3,4	4,7	16,4	8,8	8,1	10,2	3,4	4,7	4,1	5,2	4,1	2,6
4	8,2	8,8	4,4	4,1	8,1	16,1	2,6	3,4	7,3	7,4	8,1	7,3	5,8	4,7	4,0	1,8
5		8,2	8,1	4,1	10,4	4,7	1,8	4,6	4,7	4,1	2,8	8,2	5,6	4,6	3,1	2,5
6	3,1	2,2	8,3	8,8	2,4	4,4	4,0	4,7	5,8	4,2	6,6	7,4	7,3	4,2	3,3	2,6
7	4,7	4,6	5,9	9,6	2,6	3,3	4,4	4,6	3,4	2,6	2,4	5,9	3,3	2,8	3,4	3,0
8	3,1	2,4	2,4	6,6	3,1	2,0	1,8	2,5	8,2	9,6	8,1	6,6	5,6	4,5	2,2	2,3
9	2,5	2,2	3,4	3,1	2,6	3,1	2,2	3,1	8,1	9,6	8,3	5,9	4,6	8,8	4,1	2,4
10	4,7	4,6	3,1	2,0	2,2	8,3	5,2	4,6	8,3	5,2	5,2	6,6	-	16,1	4,7	4,2
11	6,1	5,6	3,4	2,4	2,8	4,6	5,6	4,7	7,3	6,6	5,3	5,8	4,7	8,2	4,6	2,6
12	4,3	4,7	3,1	2,9	3,1	2,5	3,1	2,5	4,6	4,7	3,3	3,4	2,8	3,4	3,0	3,1

Таблица 65

Содержание (в %) SiO_2 в зоне полухристых руд

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	38,7	27,9	28,4	27,0	31,4	35,2	38,7	40,0	46,7	35,1	29,5	27,3	28,3	31,0	28,3	30,6
2	40,0	33,2	31,1	30,6	31,1	28,4	33,2	35,2	32,7	28,3	30,6	29,5	28,4	29,6	33,7	31,4
3	24,0	26,2	28,4	27,3	22,0	23,4	38,7	46,5	28,4	27,9	28,4	18,7	23,0	28,3	27,3	27,0
4	23,0	25,4	26,3	26,2	35,2	33,9	31,1	22,0	24,6	27,3	23,1	18,8	18,1	26,5	26,2	27,0
5	23,2	28,8	24,2	27,0	18,8	27,8	33,2	32,7	46,7	35,2	31,0	18,8	22,8	24,2	24,0	26,2
6	28,6	30,8	24,0	15,2	32,7	25,4	28,8	40,0	28,4	26,5	18,9	15,9	18,1	33,7	28,7	28,4
7	24,6	27,8	28,6	15,6	15,8	33,2	28,4	33,2	60,1	31,4	28,7	22,8	18,7	22,8	15,2	23,0
8	31,1	33,7	18,1	23,2	22,8	33,7	29,5	27,9	62,8	30,6	24,2	23,0	24,6	26,5	23,0	29,5
9	33,2	38,7	25,4	28,4	28,7	24,0	31,4	29,6	35,2	33,7	28,8	27,8	28,6	40,0	31,4	31,2
10	31,4	35,1	23,0	16,4	18,8	15,6	23,0	25,4	32,6	31,0	30,6	33,2	30,5	53,0	33,7	29,6
11	28,5	28,7	24,2	18,1	15,8	18,8	22,0	23,8	35,2	29,6	31,0	28,4	27,9	33,2	35,2	28,7
12	30,6	27,8	33,7	24,6	19,1	23,0	27,9	46,4	51,5	38,6	31,1	23,0	22,0	33,0	32,7	22,8

Для решения вопросов, связанных с планированием будущей отработки месторождения и выбором рациональной геометрии разведочной сети при разведке других участков месторождения, необходимо по каждому параметру:

а) проверить гипотезу о наличии закономерной составляющей изменчивости;

б) оценить соотношение закономерной и случайной составляющих изменчивости при различных расстояниях между точками наблюдений;

в) определить характер анизотропии изменчивости и оценить величину коэффициента анизотропии;

г) изобразить положение в плане участков с различным качеством руд и разной мощностью зон охристых и полуохристых руд;

д) сравнить характер изменчивости различных параметров.

По результатам обработки данных необходимо:

1) высказать соображения о форме, ориентировке и размерах разведочной сети при разведке других участков данного месторождения;

2) выделить участки с высоким содержанием железа (более 45 %) и высоким кремневым модулем ($\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3 > 2$), где могут добываться руды, пригодные для извлечения железа;

3) выделить участки богатых по содержанию никеля руд (содержание никеля более 1,5 %), рядовых руд (1,0–1,5 %) и бедных руд (0,7–1,0 %);

4) выделить участки руд, из которых рентабельно извлекать кобальт (содержание кобальта больше 0,05 %).

Работа выполняется бригадой студентов из 7 чел. Каждый студент самостоятельно проводит анализ по одному из параметров: мощности зоны, содержанию Ni, Co, Fe, Al_2O_3 , SiO_2 или $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$. Окончательный вывод делается по результатам работы всех членов бригады. Задание рассчитано на две бригады. Одна бригада проводит анализ по зоне охристых руд, а другая – по зоне полуохристых руд.

Методические указания

1. Для предварительного суждения о характере изменчивости параметра целесообразно проверить гипотезу о наличии тренда по количеству точек смены знака и количеству скачков (см. методические указания к задаче 4.1). Для этого необходимо построить графики изменения параметра по двум-трем профилям, ориентированным в меридиональном и широтном направлениях. Учитывая, что количество замеров по каждому профилю невелико, для снижения ошибки второго рода уровень значимости при проверке гипотез целесообразно принять равным 0,1 ($|Z| \approx 1,28$).

2. Соотношение закономерной и случайной составляющей изменчивости при разных вариантах сети наблюдений, а также характер анизот-

ропии изменчивости и величину коэффициентов анизотропии можно оценить с помощью двумерной автокорреляционной функции (ДАКФ), которую рассчитывают на ЭВМ по программе, описанной в прил. 16.

Дисперсии случайной и закономерной составляющих изменчивости оцениваются по следующим формулам:

$$S_{\text{сл}}^2 = S_{\text{об}}^2 \left\{ 1 - [Rx(pr)]^2 \right\}$$

$$S_{\text{зак}}^2 = S_{\text{об}}^2 - S_{\text{сл}}^2$$

где $S_{\text{об}}^2$ – оценка общей дисперсии признака, которую также можно вычислить на ЭВМ по приведенной в приложении программе, а $Rx(p, r)$ значение нормированной ДАКФ для сети наблюдений с параметрами p и r .

3. Для определения характера анизотропии изменчивости признака целесообразно построить график ДАКФ в изолиниях. На этом графике направлению минимальной изменчивости будет соответствовать направление вытянутости изолиний ДАКФ, а направлению максимальной изменчивости – направление максимального градиента изменения ДАКФ, т.е. такое направление, по которому среднее расстояние между соседними изолиниями ДАКФ будет минимальным.

4. Для определения коэффициента анизотропии необходимо измерить длинную (L) и короткую (l) оси поля ДАКФ, ограниченного какой-нибудь замыкающейся изолинией в области, где корреляция между наблюдениями еще сохраняется. Обычно для этого удобно использовать изолинию 0,3 или 0,4. Оценка коэффициента анизотропии находят по формуле

$$K_{\text{ан}} = L/l.$$

5. Распределение в плане участков руд различного качества и участков с разной мощностью рудных зон можно наглядно изобразить с помощью изолиний. Для выявления наиболее общих тенденций в изменении изучаемого параметра исходные данные целесообразно сгладить способом скользящего "окна". Для определения размеров скользящего "окна" можно использовать ДАКФ. Размеры "окна" не должны превышать расстояний, на которых еще отчетливо проявляется корреляционная связь между замеренным свойством.

ЗАДАЧА 4.3

Изучение закономерностей пространственного размещения геологических объектов с использованием модели дискретных случайных полей

В пределах Русской платформы на карте масштаба 1:25 000 000 (1982 г.) по результатам дешифрования аэро- и космofотоснимков выделяются кольцевые структуры. Расположение центров этих структур, имеющих радиус, соответственно менее 25 км, от 25 до 50 км и свыше 50 км; показано на рис. 5–7. Предполагается, что в пространственном размещении этих объектов существуют определенные закономерности, обусловленные неоднородностью строения складчатого фундамента, наличием зон глубинных разломов, участков сопряжения различных тектонических блоков и других структур, не выражающихся в явном виде на поверхности Земли.

Знание закономерностей в размещении таких объектов позволяет не только полнее понимать строение недр, но и обоснованно осуществлять прогноз на различные виды полезных ископаемых, разделять районы по гидрогеологическим, инженерно-геологическим и другим условиям.

Требуется. Выявить характер (закономерный или случайный) пространственного размещения кольцевых структур определенного масштаба на карте; при наличии закономерностей отобразить их на графике.

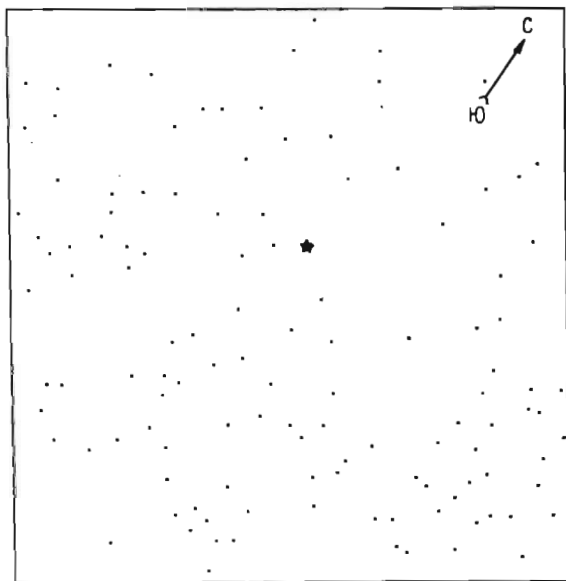


Рис. 5. Положение центров кольцевых структур радиусом менее 25 км

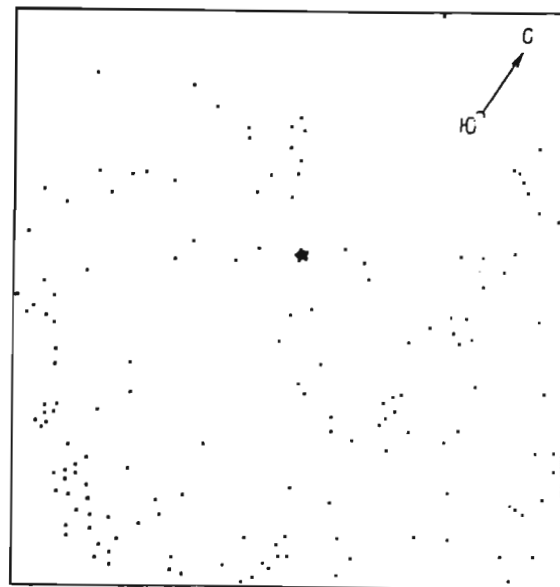


Рис. 6. Положение центров кольцевых структур радиусом от 25 до 50 км

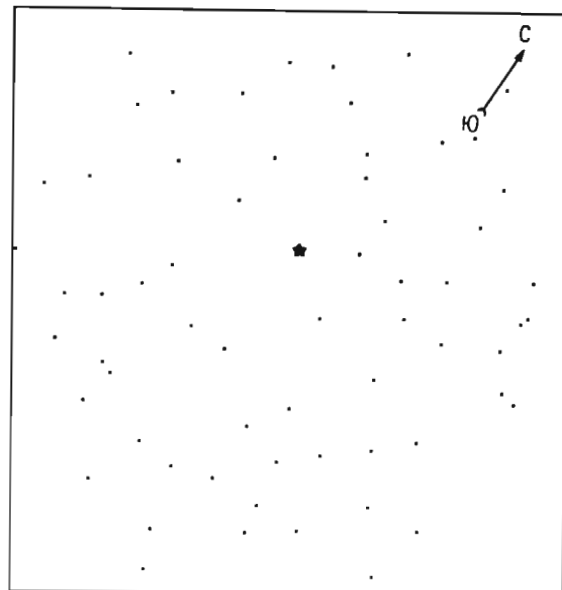


Рис. 7. Положение центров кольцевых структур радиусом свыше 50 км

1. Количественным показателем, на основе которого изучаются закономерности расположения геологических объектов на плоскости (карте), является число объектов, приходящихся на элементарную площадку фиксированного размера. При выборе величины элементарной площадки необходимо иметь в виду, что от этого параметра зависит возможность определения закономерностей, которые проявляются, как правило, в определенном масштабе; при несоответствии размеров элементарной площадки и порядка неоднородностей в размещении объектов, они могут быть не выявлены.

Существует понятие "оптимального квадрата", величина которого равна удвоенной площади, приходящейся на один объект (на одну точку). Определим общее число точек (K) на отдельном планшете и его площадь (S) в квадратных километрах. Плотность точек (ρ) на 1 км^2 находим по формуле

$$\rho = K/S.$$

Тогда площадь "оптимального квадрата" вычисляем из выражения $S_{\text{опт}} = 2/\rho$. Величина ее может быть округлена до целых значений.

2. В качестве варианта задания для решения поставленной задачи может быть использована часть одного из планшетов, соответствующая по площади $30-40 S_{\text{опт}}$. Варианты задания создаются за счет изменения границ участка и их ориентировки. Границы отмечаются на кальке-накладке, расчерченной на квадраты, соответствующие по площади выбранному (оптимальному).

При случайном расположении точек (объектов) на плоскости вероятность попадания в квадрат того или иного их числа применительно к данным условиям может быть объяснена законом Пуассона.

Различие эмпирических и теоретических вероятностей и, следовательно, частот встречаемости квадратов с разным числом объектов можно объяснить наличием закономерностей в пространственном размещении объектов, таким образом гипотеза о равенстве частот распределений может быть проверена с помощью критерия χ^2 .

Для каждого квадрата определяют число попавших в него точек; результаты оформляют в виде таблицы:

Число точек в квадрате x_i	Число квадратов n_i
0	
1	
2	
⋮	
⋮	
m	

Для получения надежных выводов при проверке гипотезы необходимо, чтобы объем выборки (общее число квадратов) имел $40-60$ значений. Увеличение числа замеров в пределах исследуемого участка достигается сдвигом границ квадратов относительно исходного положения. Для увеличения объема выборки почти в два раза достаточно произвести сдвиг квадратов таким образом, чтобы при новом положении их центры оказались в местах пересечения сторон.

Возможны также варианты перемещения на половину длины квадрата по вертикали или горизонтали (рис. 8).

3. Для вычисления теоретических вероятностей определяется оценка математического ожидания числа точек (λ) в квадрате:

$$\lambda = K S_{\text{кв}}/S,$$

где K – общее число точек в пределах участка; $S_{\text{кв}}$ – площадь квадрата; S – площадь участка.

Теоретическую вероятность попадания x числа точек в квадрат оценивают следующим образом:

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

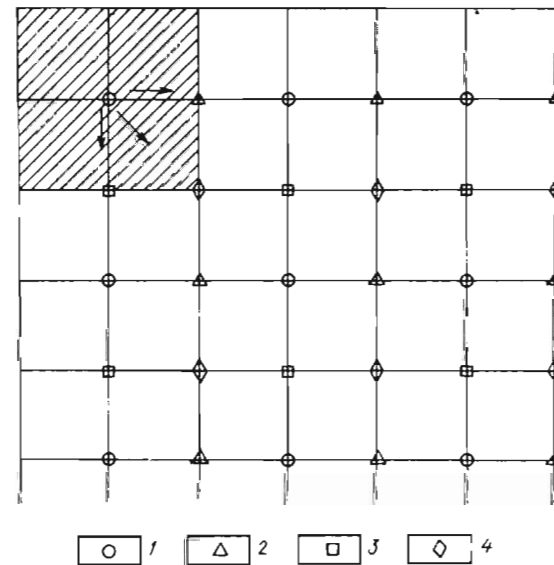


Рис. 8. Варианты расположения центров квадратов: 1 – исходное положение; 2 – смещение по горизонтали; 3 – смещение по вертикали; 4 – смещение по диагонали

Теоретическую частоту встречаемости квадратов с x -числом точек вычисляют по формуле

$$n_i^T = NP(x),$$

где N - общее число квадратов в исследуемой выборке.

Частоты эмпирическая и теоретическая сравниваются с помощью критерия χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^m \frac{(n_i^T - n_i^E)^2}{n_i^T},$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, m$ - классы (число наблюдаемых точек в квадрате); n_i^E - эмпирическая частота встречаемости квадратов в классе; n_i^T - теоретическая частота встречаемости квадратов в классе.

Если число наблюдений в классах меньше четырех, то классы объединяют в один; для него рассчитывают соответствующие значения частот.

Вычисленное значение χ^2 сравнивают с табличным, определенным для заданного уровня значимости (α) и числа степеней свободы k . Число степеней свободы определяют как число классов (с учетом объединения) минус 2. Гипотеза принимается, если вычисленное значение χ^2 меньше теоретического. Принятие гипотезы означает, что точки на карте (при данном размере квадрата) расположены случайным образом и закономерности в их размещении отсутствуют.

4. Для подтверждения "оптимальности" квадрата относительно возможных неоднородностей в размещении точечных объектов необходимо провести исследования с квадратами других размеров, например со сторонами вдвое больше или меньше исходного. Вычисления проводят по описанной выше схеме.

5. Если гипотеза о соответствии распределений отвергается, то можно говорить о наличии закономерностей в пространственном размещении объектов. Эти закономерности на карте отображают с помощью изолиний, которые объединяют области с одинаковым числом точек в квадрате. При этом установленное значение данного показателя относится к центру соответствующего квадрата. Использование сдвига квадрата (сглаживания) позволяет при проведении изолиний уменьшить влияние субъективного фактора - случайного положения квадратов относительно точек. Изучение полей, отображаемых изолиниями (их вытянутости, ориентировки, скорости изменения в различных участках и по различным направлениям), и сопоставление их с известными структурами в пределах платформы позволяют сделать вывод о их пространственно-временных соотношениях.

Раздел 5

МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ЗАДАЧА 5.1

Изучение неоднородности геологических объектов с помощью карт относительной энтропии

Формирование месторождений полезных ископаемых часто является результатом совокупного действия разнообразных факторов и сочетания целого ряда природных геологических условий. Каждый из этих факторов имеет отражение в геологической обстановке. С этой точки зрения участки, перспективные на обнаружение месторождений полезных ископаемых, особенно эндогенных, будут характеризоваться максимальной неоднородностью геологического строения. Выделение таких участков является одной из задач поисков.

Для изучения неоднородности геологического строения предлагается использовать учебные геологические карты масштаба 1:25 000 - 1:200 000, желательно - карты геосинклинальных областей с комплексом разнообразных осадочных, метаморфических и магматических пород.

Требуется: оценить неоднородность геологического строения района и ее изменение в пространстве; выделить участки с максимально сложным строением.

Методические указания

Исследования проводятся исполнителем по индивидуальному заданию на карте или ее части площадью не менее 500 см² в масштабе карты. Следует иметь в виду, что неоднородность строения участка оценивается относительно некоторой элементарной площадки. Изменение размера площадки приводит к изменению оценок неоднородности. Величина элементарной площадки выбирается в соответствии с возможными размерами рудоносного объекта, положение которого может контролироваться сочетанием разнообразных геологических условий. В среднем величина такой площадки для карт разного масштаба может составлять 16-25 см² (от 4 x 4 см до 5 x 5 см) в масштабе карты.

В качестве меры неоднородности при решении данной задачи предлагается использовать величину относительной энтропии:

$$100 H_r = \frac{-\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i}{\ln n} \cdot 100 \%,$$

где n — число анализируемых геологических компонент (признаков); p_i — доля i -го компонента в системе.

Величина относительной энтропии выражается в процентах и изменяется от 0 (когда доля одной компоненты равна 1, а остальных — 0) до 100 % (когда доли всех компонент равны между собой). Данный показатель определяется для каждой элементарной площадки в пределах изучаемого участка. Для устранения влияния субъективного фактора — случайности наложения той или иной площадки относительно областей распространения изучаемых признаков — следует осуществлять сдвиг элементарных площадок относительно их начального положения не более чем на половину ее размера по вертикали или горизонтали.

Геологические признаки по характеру их проявления разделяются на линейные (контакты пород, разломы, оси складок и т.п.) и площадные (площади развития пород разного состава, геофизические и геохимические поля и т.п.). Площадные признаки разделяются на группы непересекающихся признаков, т.е. не совпадающих по площади. Каждая группа признаков анализируется отдельно.

Анализ начинается с формирования группы признаков. Например к группе площадных геологических признаков могут относиться породы разного состава, встречающиеся в пределах участка: известняки, сланцы, сиениты, граниты I и II фазы внедрения, туфы, риолиты. Доля каждого признака в пределах отдельной элементарной площадки определяется с помощью палетки, которая расчерчивается на прозрачной основе — кальке, прозрачной пленке и др. Элементарную площадку размером 5 x 5 см удобно расчертить по 0,5 см на 10 отрезков по каждой стороне; тогда каждая ячейка палетки будет характеризовать 0,01 долю ее площади. Через число ячеек, в пределах которых фиксируется та или иная порода, оценивается доля данного признака (p_i).

Для каждой элементарной площадки эти данные заносятся в табл. 66.

Сумма p_i для каждой площадки должна составить 1,00. Величина $-p_i \ln p_i$ определяется с помощью табл. 66; затем эти показатели суммируются. Полученные значения нормируются (делятся) на максимальное значение функции энтропии ($H_{\max} = \ln n$), которое в данном случае равно: $\ln 7 = 1,943$. В рассматриваемом примере значения функции относительной энтропии будут равны для 1, 2 и 3 площадок соответственно: 77,7, 24,2 и 94,8 %. Полученные значения относятся к центру элементарной площадки и выносятся на бланковку (кальку-накладку), масштаб которой соответствует карте.

При наличии других групп площадных признаков, например зон измененных пород, геохимических ореолов различных элементов, геофизических полей и других, расчеты проводятся аналогичным образом. В этом случае как отдельный признак могут рассматриваться участки с определенным интервалом изменений какого-либо свойства; например, при изучении метасоматитов могут быть выделены неизменные, слабо измененные, измененные и сильно измененные породы. При изуче-

Таблица 66

Вычисление относительной энтропии

Порода	Элементарные площадки							
	1		2		3		4	
	p_i	$-p_i \ln p_i$	p_i	$-p_i \ln p_i$	p_i	$-p_i \ln p_i$	p_i	$-p_i \ln p_i$
1. Известняки	0,21	0,328	0,82	0,162	0,31	0,364
2. Сланцы	0,15	0,285	0,18	0,309	0,12	0,254
3. Сиениты	0,07	0,186	0	0	0,15	0,285
4. Граниты I фазы	0,32	0,365	0	0	0,11	0,243
5. Граниты II фазы	0,25	0,346	0	0	0,13	0,265
6. Туфы	0	0	0	0	0,10	0,230
7. Риолиты	0	0	0	0	0,08	0,202
Сумма	1,00	1,510	1,00	0,471	1,00	1,843		

нии геофизических или геохимических полей признаком может служить площадь между изолиниями.

Линейные признаки могут включать в себя контакты пород, разрывные нарушения, причем в качестве отдельного признака здесь могут рассматриваться нарушения различных порядков либо различных направлений, маломощные дайки, жилы и т.п. Доля каждого из этих признаков (p_i) в пределах элементарной площадки оценивается через соотношение длин; суммарная длина всех линейных признаков принимается за 1.

Карты относительной энтропии, полученные по каждой группе признаков, могут быть сведены в одну — обобщенную. В тех случаях, когда информативность каждого признака принимается одинаковой, это достигается умножением величины относительной энтропии по отдельной группе в каждой точке на весовой коэффициент и сложением этих произведений. Иными словами производится операция взвешивания. Весовые коэффициенты определяются по формуле

$$K_j = \frac{n_j}{\sum_{j=1}^m n_j},$$

где n_j — число признаков в каждой j ой группе; m — общее число групп.

Общая неоднородность геологического строения участка и ее изменение в пространстве отображается изолиниями. Изолинии строятся по общепринятым правилам интерполяции значений между точками замеров. Перспективными на обнаружение полезных ископаемых условно принимаются участки, где значения функции относительной энтропии превышают 60–70 %.

ЗАДАЧА 5.2

Выделение комплексных аномалий преобразованием многомерных величин в одномерные

На территории района проведена геохимическая съемка масштаба 1:50000 с целью выявления перспективных рудоносных объектов. Район характеризуется горно-таежным ландшафтом с широким развитием делювиальных отложений, затрудняющих поиски. Признаками оруденения в отдельных локальных участках могут служить повышенные содержания элементов в ореолах рассеяния, формирующихся при разрушении рудных объектов в процессе выветривания. Следует, однако, иметь в виду, что на геохимических барьерах могут образовываться ложные аномалии. Кроме того, повышенные концентрации элементов в пробах возможны вследствие случайных ошибок анализов.

Изучение проявлений рудной минерализации на смежных территориях показало, что их геохимические ореолы отличаются комплексным характером, т.е. пространственным совмещением повышенных концентраций отдельных элементов. Такими наиболее информативными элементами для поисков данного типа оруденения являются цинк, кобальт, молибден, хром, барий, содержания которых в точках опробования данной территории приведены в табл. 67.

Требуется: выделить участки, перспективные на обнаружение рудной минерализации по совокупности данных опробования на несколько элементов.

Таблица 67

Данные геохимической съемки масштаба 1 : 50 000

№ пикетов	Номера профилей											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Содержание бария, 10 ⁻² %												
1	0,5	0,8	1	0,8	0,5	0,8	1	1,8	2,5	1,8	1	1
2	0,6	0,8	1	0,7	0,4	0,6	0,8	1,1	1,4	1	0,6	0,6
3	0,6	0,9	1	0,6	0,2	0,4	0,5	0,4	0,5	0,4	0,3	0,3
4	0,5	0,8	1	1	1,1	0,8	0,6	0,5	0,3	0,4	0,4	0,3
5	3	2,5	2	2	1,2	0,8	0,4	0,3	0,3	0,3	0,8	1,2
6	1,5	2,5	2	0,8	2	1,5	1	0,4	0,2	0,2	1,1	2
7	2	2	2	1,7	1,4	0,1	0,4	0,4	0,1	0,6	1	0,8
8	1,1	2	1,4	2	0,8	0,6	0,4	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1
9	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,5	0,4	0,6	0,1	0,1	0,1
10	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,6	1,2	0,8	0,4	0,6	1	0,8
11	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1	2	1	1	2	1,5	1
12	0,3	1,4	2,5	1,4	0,4	0,7	0,2	0,8	0,3	0,6	1	0,6
13	0,2	0,8	1,4	0,9	0,4	0,4	0,4	0,6	0,4	0,6	0,6	0,6
14	0,2	0,2	0,2	0,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,8	1	0,6	0,1
15	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,6	0,3
16	0,4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,6	0,1	0,1
17	0,5	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,8	1,5	1,8
18	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
19	0,6	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4	0,3	0,2	0,2	0,8
20	0,8	0,4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,8	0,5	0,6	0,6	0,3	1,4
21	1,4	1,2	1	0,6	0,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2
22	2	2	2	1,3	0,6	0,6	0,6	0,1	0,4	0,3	0,3	0,2
23	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	0,8	0,3	0,2	0,2	0,4
24	0,3	0,4	0,5	1,2	2	2	2	1,4	0,8	0,2	0,2	0,6
Содержание цинка, 10 ⁻³ %												
1	15	15	18	20	18	13	12	8	5	2	6	5
2	20	16	17	19	21	21	16	11	7	3	6	8
3	25	21	20	20	25	30	22	14	9	4	8	10
4	30	25	20	19	18	21	22	8	7	9	6	3
5	10	8	7	11	16	13	11	8	9	9	10	13

№ пикетов	Содержание хрома, 10 ⁻⁴ %											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	10	9	7	11	15	15	15	6	9	10	12	15
7	10	9	8	12	18	10	10	7	14	12	10	11
8	10	9	8	14	20	8	5	8	10	9	12	10
9	7	6	6	5	4	4	7	10	5	15	10	4
10	8	8	10	10	10	10	10	11	12	9	12	9
11	10	9	8	12	15	15	15	15	12	9	8	10
12	7	14	20	15	10	15	20	6	5	5	5	8
13	5	12	20	15	10	15	20	20	20	12	5	8
14	3	17	30	30	25	19	8	19	30	20	10	12
15	9	14	18	18	30	19	8	24	35	23	8	13
16	15	11	7	6	5	5	25	30	20	22	5	3
17	15	11	7	6	5	15	30	18	4	5	5	6
18	10	8	7	7	9	9	14	24	15	4	5	5
19	6	6	8	9	12	12	15	11	6	5	4	4
20	6	6	5	6	7	11	15	10	5	6	8	6
21	10	8	5	6	7	12	18	7	4	6	20	20
22	10	9	8	8	8	14	20	8	10	15	20	14
23	6	9	12	10	9	12	15	15	15	12	17	11
24	2	8	15	12	10	10	10	13	14	20	14	8

Содержание хрома, 10⁻⁴ %

№ пикетов	Содержание никеля, 10 ⁻⁴ %											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	5,5	6	6	6	6,5	7	7,5	8	5,5	3	3,5
2	6	6,7	6,5	6	5,5	5	6,5	6,2	6	5	4	3,8
3	7	7	7	6	5	5,5	6	5	4	4,5	5	4
4	7	7	7	5	4	4,5	5	4,2	3,5	3,8	4,2	3,6
5	5,5	5,2	5	4	3	3,5	4	2,5	3	3,2	3,5	3,2
6	4	4,5	5	4	3	3,5	4	3	2,2	4	3	3,5
7	3,5	3,7	4	3,8	3,5	3,8	4	3,6	3,2	3,2	3,4	3,5
8	3	3	3	3,5	4	3	4	4,2	4,5	6,2	4	4
9	3	3	3	2,5	2	2,5	3	3,5	4	3	5,5	10
10	3	3	3	3,2	3,5	3,8	4	5,2	6,5	4,8	3	3
11	3	3	3	4	5	5	4,5	4	2,5	3	3	3
12	4,5	5,5	7	7	7	6,5	6	5	4	4,5	5	6
13	4	4,3	5,5	5,5	5,5	5,5	4,8	4	4,2	4,5	4,5	3,5
14	4	4	4	4	4	4,5	5	4,5	4	4	4	3,2
15	4	3,8	3,5	3,5	3,5	3,8	4	4	4,2	4,5	3,2	1,8
16	4	2,8	3,5	3,5	4,1	4	4	4	4,5	5	2,8	0,5
17	4	5,5	3	3	3	3	4	5	4,5	4	4	4
18	3	2,8	2,5	2,8	3	3,5	4	4,2	4,5	3,8	3	3
19	3	2,7	2,3	2,8	3	3,2	4	4	4	3,5	3	2,5
20	2	2	2	2,5	3	4	5	4,5	4	3,5	3	2,8
21	4	4,5	5	4	3	3,5	4	3	6	6,5	7	6
22	3,5	4	4,5	4,2	4	4,2	4,5	4,8	5	5,5	6	5,2
23	3,5	4	4,5	4,1	4	6,1	5	3,5	5,2	6	4,5	3,8
24	3	3,5	4	4,5	5	5	5	5	4,5	2,7	4	4

Содержание молибдена, 10⁻³ %

№ пикетов	Содержание молибдена, 10 ⁻³ %											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0,8	0,5	0,8	1	1	1	1	1	0,8	0,5	0,8
2	0,9	0,8	0,7	0,9	1	1	1	1	1	0,9	0,8	0,9

№ пикетов	Номера профилей											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1	0,9	0,8	0,8	1	0,7	1	1	0,9	1	1	1
4	1	1	0,9	1	1	1	0,6	1	1,2	1	1	1
5	1	1	1	1	0,8	1,2	1,5	1	1,5	1	0,8	1
6	1	0,5	1	1	1,5	1	1,2	1,5	0,8	1,4	2	1,2
7	0,9	0,8	0,8	0,9	1	1	1,5	1	1,4	1	1,4	1
8	0,8	0,6	0,5	0,8	1	1	1	1,5	2	1,5	1	1
9	2	1,8	2	1,2	1,5	1,8	3	2	1	0,8	1	0,4
10	1,8	1,5	1	1,1	1,2	1,6	2	1,5	1	1,2	1,5	1,2
11	1,4	1,2	1	1,5	2	1,5	1	1	1	1,5	2	1
12	1	1	1	1	1	1,5	2	0,3	1	1,2	1	1
13	0,7	1	1	0,5	1,5	2	1,5	1	1	1	1	1
14	1	2	2	2	2,5	2	1,5	1	2	0,4	1	0,7
15	1,8	1,6	1,1	1,5	1	1,4	1,2	0,9	0,7	0,5	0,4	0,4
16	1,6	1,2	0,9	1	1	1	0,8	1	0,8	0,4	0,1	0,1
17	2	1,4	0,8	0,9	1	1,2	0,5	1,7	2	1,5	2	2
18	1,5	1,2	0,9	1	1,3	1,4	1	1,2	2	1,3	1,2	1,2
19	1	1	1	1,2	1,6	0,5	1,6	1,2	2	1,2	0,5	0,5
20	1	0,9	0,8	0,8	0,6	1,4	2	0,4	1,2	1,1	1	0,9
21	1,5	1,2	0,9	1,2	1,4	1,7	0,4	2	0,5	1	1,5	1,4
22	2	1	1,5	1,5	2	2	2	0,8	1,2	1,6	2	2
23	1,2	1,4	1,5	1,8	2	1,8	1,5	1,8	2	2	2	1,6
24	0,5	1,2	2	2	2	1,5	1	1,4	1,7	1,8	2	2

Содержание никеля, 10⁻⁴ %

№ пикетов	Содержание никеля, 10 ⁻⁴ %											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1,2	1,5	1,8	2	2	2	2,1	1,5	1	0,8	0,5
2	1,2	1,5	1,8	2,2	2,5	2,2	2	1,5	1	0,8	1,1	0,3
3	1,6	1,8	1,9	2,2	3	2,5	2	1,5	1	0,6	0,4	1
4	2	2	2	2,3	2,5	2,5	1,6	1,2	0,9	1,2	1,5	1,2
5	1,8	1,4	1	1,5	2	2,2	1,6	1,2	0,8	1,1	1,7	1,4
6	1,5	1,2	1	1,5	2	1,8	1,5	1,2	1	1,2	1,5	1,5
7	1,8	1,4	1	1,2	1,5	0,8	1	1	1,1	1,2	1,4	1,4
8	2	1,5	1	1	1	0,7	0,5	0,8	1,2	0,7	3,5	2,2
9	0,5	0,8	1	0,6	0,1	1	2	1,3	0,6	0,2	5,5	0,1
10	0,3	0,7	0,8	1,3	1,6	2	2,5	1,6	0,8	1,1	4,5	2,8
11	0,1	0,6	1	2	3	3	1,7	2	1	2	3	2,5
12	0,3	0,9	1,5	1,8	0,8	1,2	1,5	0,9	0,3	0,9	1,5	1,8
13	1,6	1,7	1,8	1,6	1,4	1,3	1,4	1,4	2	2,2	1,8	1,5
14	3	2,5	2	2	2	1,6	1,4	1,8	5	3,5	2	1,2
15	2,6	2,2	2	2	2	1,8	1,5	2,2	2,9	2,2	1,4	0,8
16	2,6	1,8	1,1	1,2	1	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,4
17	2,5	1,4	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2
18	1,6	0,8	0,3	0,4	0,5	0,7	1,2	2,2	2	1,2	2	2
19	1	0,6	0,4	0,4	0,4	0,6	1,1	2,5	2	2	1,5	1,4
20	0,5	0,5	0,5	0,4	0,3	0,6	1	3	2,8	1,5	1	0,8
21	1,2	2,2	2,2	2,2	2,6	3	3	2,9	2,2	3	2,8	2,6
22	2	3	4	2,5	4	4,5	5	2,5	2,7	3,6	5	2,1
23	1	1,7	2,4	2,6	3	3,5	2	2,4	4	4,5	3,8	3
24	0,1	0,4	0,8	0,8	0,8	1,4	2	2,2	3,1	4	3	2

№ пикет- тов	Номера профилей											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Содержание кобальта, 10 ⁻⁴ %											
1	7	7,5	8	7,5	7	6,5	6	6,5	5	3,5	2	3
2	7,6	8,2	8	8,8	8,5	7,8	7	6,1	5,2	3,8	2,5	3,5
3	8,1	9,2	10	10	10	9	8	6,8	5,5	4,2	3	4
4	7	8,5	10	9,5	9	9	8,5	6	3,5	7	7	5,5
5	6	4,5	3	5,5	8	7,6	6,5	5,2	3,2	4,1	5	4,4
6	6,5	4	2,5	5,2	8	6,2	4,5	4,8	4,5	3,2	2	1,7
7	5	3,5	2	2	2	5	3	2,5	5	0,5	3,8	2,5
8	3	2,2	2	1,3	1	2,8	3	2	2	1	1	2
9	1	1	1	0,6	0,1	0,6	1	1	1,6	2,2	2	10
10	0,5	1,9	3	1,8	0,9	0,8	0,9	1,2	2,1	2	11	9
11	2,2	3,1	4	4,6	5,4	4,2	3	1,6	2	4,5	7	7
12	2	3,5	5	7,5	8	8	5	2	5	4	2	3,5
13	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	7	6,5	11	8,5	7,3	4,5	3,8
14	5	5,5	6	5,5	5	6,6	8	13	14	9	7	3
15	5,4	5,8	6	6	2,5	8	9,5	9	8	6	4,5	0,5
16	6,2	4,9	3,5	4,5	5,8	5,4	5	2	2	1,5	1	0,1
17	7	4	1	3	5	2,8	0,5	4	4	5	6	6,5
18	5	3,1	2,2	3,4	3,8	2,6	2,5	4,5	4,5	4,3	5	3,9
19	4	2,6	1,6	2,7	3,4	3,9	3,8	5	5	3,9	4	5,5
20	3	2	1	2	3	5,3	4,1	0,2	0,2	0,2	3,8	4
21	5	5	3	5	5	6,5	8	4	0,2	0,1	5	4
22	5	4	5	2	5,8	5,2	6,5	5	2,6	3,8	5	4
23	2,5	4,2	6	5,5	5	5,6	6,2	4,3	5,4	6,5	6	5,5
24	0,1	3,5	7	6	5	7,1	3,4	5,2	3,5	8	8	8

Методические указания

Для решения задачи исполнителю выдаются данные опробования на 3–4 элемента. Варианты заданий создаются комбинацией наборов элементов и различием положения и размеров участков для которых проводится обработка данных опробования. Желательно, чтобы число точек наблюдения по каждому участку было не менее 100. Задание рассчитано на применение ЭВМ или программируемых калькуляторов для выполнения расчетов.

1. По данным опробования определяют среднее содержание и дисперсию каждого элемента в соответствии с указаниями к задачам 1.2 и 1.3.

2. Для каждой точки опробования находят центрированные и нормированные значения содержаний определенного элемента:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$$

где x_i – содержание элемента в i -ой точке опробования; \bar{x} – среднее содержание элемента по участку; S – стандартное отклонение содержаний. Эти значения наносятся на кальку-накладку.

3. В каждой точке опробования вычисляются одномерные обобщенные величины T_i :

$$T_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m t_{ij}$$

где j – номер элемента, изменяющийся от 1 до m .

4. Комплексные аномалии определяются по значениям величины T_i , превышающим значения функции нормального распределения для заданной доверительной вероятности. Рекомендуется выделить участки, где вероятность наличия комплексных аномалий составляет 90, 95 и 99 %.

5. При проведении расчетов вручную для сокращения вычислительных операций предлагается использовать графический метод оценки среднего и дисперсии в соответствии с рекомендациями к задаче 1.4. Размещение нормированных величин t_i для каждого элемента изображается на кальках-накладках в виде изолиний непосредственно по исходным значениям содержаний. Для этого рассчитываются только содержания, соответствующие определенным фиксированным значениям t . Совмещение кальк-накладок позволяет визуально выделить локальные участки максимальных значений и оценить наличие комплексных аномалий только в их пределах.

ЗАДАЧА 5.3

Количественная интерпретация картографических геологических данных при оценке перспективности территорий на обнаружение полезных ископаемых

В пределах рудного района установлены коренные месторождения и рудопроявления полезных ископаемых. Их пространственное размещение, зафиксированное на геологической карте, определяется сочетанием ряда геологических факторов – составом и возрастом пород, структурно-тектоническими элементами, наличием магматических, гидротермально-метасоматических и других образований. Количественная оценка этих факторов часто бывает затруднена, в связи с чем определение их роли в процессах рудообразования также является сложной задачей. Одним из способов ее решения служит преобразование качественной геологической информации в количественную. С помощью таких преобразований решаются задачи прогноза и оценки ресурсов полезных ископаемых в конкретных условиях.

Требуется:

- 1) установить геологические факторы, влияющие на локализацию оруденения;
- 2) определить условия отнесения аномалий и точек минерализации к перспективным или неперспективным объектам;
- 3) оценить вероятный масштаб оруденения для конкретных перспективных объектов.

Методические указания

Для решения данной задачи предлагается использовать учебные геологические карты масштаба 1:200000 — 1:5000000 с данными о проявлениях полезных ископаемых, в том числе о масштабе месторождений и рудопроявлений; масштаб рудных объектов может быть задан в баллах.

Исполнителю выдается задание по конкретному виду полезного ископаемого и типу месторождений для одного листа карты, на котором должно быть не менее 10 объектов разного масштаба. Кроме этих рудных объектов на карте должны быть отмечены аномалии и точки минерализации (2–5 шт.), перспективность и прогнозные ресурсы которых потребуется оценить.

1. На основе изучения исходных геологических данных и с учетом рекомендаций преподавателя составляется таблица геологических признаков (факторов), влияние которых на локализацию оруденения и перспективность отдельных объектов надо проанализировать. К числу таких факторов относятся: магматические и осадочно-метаморфические породы разного состава и возраста; структурно-тектонические единицы — блоки, складки, прогибы; разрывные нарушения определенных направлений и генезиса.

2. В качестве количественной меры, характеризующей положение рудного объекта относительно каждого фактора, предлагается использовать кратчайшее расстояние от точки (объекта) до границы области проявления данного фактора — контакта пород определенного состава, тектонического нарушения и т.п. Сведения об этих расстояниях заносят в таблицу факторов. Если объект находится внутри области, значению расстояния присваивают знак "+"; если он располагается вне ее — знак "-". По полученной матрице исходных данных вычисляют вектор средних значений признаков и ковариационную матрицу. Для проведения расчетов следует использовать ЭВМ.

В качестве факторов дополнительно могут использоваться также данные геохимического опробования, которые помещают в таблицу непосредственно в цифровом виде.

3. Для сравнительной оценки влияния каждого геологического фактора на локализацию оруденения необходимо определить вектор средних значений и ковариационную матрицу для всего района в целом. Оценка этих параметров для сокращения времени и объема вы-

числений дается по выборке в 15–40 точек. Точки наносят на кальку-накладку по равномерной прямоугольной, ромбической или квадратной сети. Кальку-накладку совмещают с картой случайным образом, чтобы результаты наблюдений не имели субъективных систематических ошибок.

Для этих случайных точек, так же как и для рудных объектов проводятся измерения расстояний и составляется таблица факторов, по которой проводятся аналогичные расчеты.

4. Влияние отдельных факторов на размещение оруденения может быть оценено сравнением распределений признаков для рудных и "нерудных" (случайных) точек в соответствии с указаниями к задаче 1.4. Из совокупности факторов выбираются наиболее информативные, для которых различие распределений является максимальным. При проведении расчетов на ЭВМ может быть использован весь набор факторов, для которых отвергаются гипотезы о равенстве средних и дисперсий по сравниваемым объектам. В остальных случаях выбирают 3–4 наиболее различающихся фактора. Различие многомерных средних оценивается с помощью критерия Хотеллинга (T^2) или расстояния Махалонобиса (D^2):

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} D^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} [\bar{x}_1 - \bar{x}_2]' [S]^{-1} [\bar{x}_1 - \bar{x}_2],$$

где n_1 и n_2 — объем выборок по рудным (1) и нерудным (2) объектам; $[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]$ и $[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]$ — вектор-строка и вектор-столбец разностей средних значений признаков в сравниваемых объектах; $[S]^{-1}$ — обратная матрица дисперсий и ковариаций.

Ковариационная матрица $[S]$ вычисляется как сумма матриц центрированных квадратов и смешанных произведений для рудных и нерудных объектов, деленная на $n_1 + n_2 - 2$.

Гипотеза о равенстве многомерных средних проверяется с помощью критерия Фишера

$$F = \frac{(n_1 + n_2 - m - 1)}{(n_1 + n_2 - 2)m} T^2$$

для заданной доверительной вероятности и числе степеней свободы m и $n_1 + n_2 - m - 1$. Если гипотеза отвергается, то можно считать, что выбранные признаки (факторы) влияют на размещение оруденения.

5. Для "разбраковки" выявленных аномалий и точек минерализации, т.е. отнесения их к классу рудных или нерудных объектов по значениям факторов, контролирующих размещение оруденения, рассчитывается дискриминантная функция. Вычислительные операции проводятся в соответствии с указаниями к задаче 3.3. По карте для имеющихся аномалий и точек минерализации определяют значения соответствующих факторов и оценивается перспективность данных объектов

Содержание молибдена в тысячных долях %

Пикет	Профиль									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	95	70	100	100	117	195	300	120
2	0	120	115	155	380	200	170	270	220	340
3	122	50	240	200	195	300	270	95	117	260
4	230	183	260	200	145	130	185	145	270	270
5	215	92	120	100	495	49	77	135	160	220
6	165	165	145	37	205	119	132	165	170	167
7	87	105	477	115	175	89	183	130	127	150
8	50	90	130	82	53	52	62	160	220	190
9	85	75	65	48	48	155	61	29	37	130
10	102	102	102	55	77	67	40	93	126	130
11	36	70	105	57	48	48	84	126	82	105
12	55	56	57	102	80	100	122	48	37	107
13	50	46	67	57	140	50	57	53	95	28
14	62	72	82	102	58	54	92	117	92	34
15	82	74	67	65	70	77	72	137	72	67
16	91	59	51	165	70	77	102	107	44	33
17	75	56	63	116	80	43	69	43	45	48
18	59	60	85	57	29	41	33	73	48	24
19	44	36	116	131	42	62	56	52	56	64
20	50	105	80	56	23	22	51	60	49	60
21	54	52	52	81	48	51	53	73	43	36
22	57	92	70	38	73	67	43	58	76	45
23	78	80	88	66	145	53	55	49	45	26
24	78	72	72	77	49	67	113	68	193	57
25	57	62	59	87	81	54	62	82	114	83
26	44	93	100	210	73	132	65	85	98	42
27	174	167	92	73	183	107	71	74	69	23
28	222	145	185	81	124	92	105	185	0	103
29	191	170	175	90	77	107	88	240	65	72
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение табл. 68

Пикет	Профиль									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	100	110	70	81	72	82	61	60	29	18
2	115	145	210	100	57	67	27	38	68	61
3	320	240	150	185	125	145	77	35	35	57
4	225	230	270	230	180	95	230	88	37	48

6. Для оценки возможного масштаба оруденения в перспективных аномалиях в таблицу факторов по рудным объектам дополнительно в качестве одного из признаков заносятся сведения о их запасах; они могут быть оценены и в баллах, например: среднему по масштабу месторождению присваивается 2 балла, мелкому — 1 балл. Эти данные используются для расчета уравнения множественной регрессии в соответствии с указаниями к задаче 3.4. В качестве зависимой переменной y принимается величина запасов. Число независимых переменных может быть ограничено теми факторами, которые определяют позицию оруденения. После вывода уравнения регрессии его используют для оценки прогнозных ресурсов перспективных аномалий или точек минерализации.

Раздел 6

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСОВЫМ РАБОТАМ

ЗАДАНИЕ 6.1

Выбор оптимальной разведочной сети эксплуатационной разведки и доразведки месторождения молибдена

Штокверковое месторождение молибдена отрабатывается карьером с высотой уступа 10 м. Отбойка руды и пород внутренней вскрыши производится буровзрывным способом, сеть буровзрывных скважин 5 x 5 м. Годовое понижение карьера 10 м. К настоящему времени четыре уступа отработаны полностью, а три — затронуты отработкой.

В пределах штокверка оруденение имеет прерывистый характер, поэтому выемка руды ведется селективно.

Для решения задач оперативного и перспективного планирования добычи на месторождении проводится сопровождающая и опережающая эксплуатационная разведка. Сопровождающая эксплуатационная разведка осуществляется путем опробования шлама буровзрывных скважин на уступах, подготовленных к отработке, а опережающая — путем бурения с уступов карьера колонковых скважин глубиной 30 м. В настоящее время возникла также необходимость доразведки глубоких горизонтов месторождения с целью решения вопросов о целесообразности углубления карьера ниже первоначально замеченной отметки. Запасы глубоких горизонтов предварительно оценены единичными скважинами.

Требуется выбрать оптимальные разведочные сети для проведения эксплуатационной разведки и доразведки данного месторождения,

Пи-кет	Профиль									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	250	200	225	190	260	87	100	52	44	49
6	220	330	140	155	185	130	107	72	90	73
7	150	240	135	105	85	90	85	170	65	55
8	70	87	185	100	150	67	65	82	85	150
9	65	180	97	76	115	85	67	82	92	115
10	135	162	72	78	85	78	87	65	60	117
11	190	113	127	62	37	67	67	65	72	67
12	210	115	145	60	67	80	87	75	77	95
13	122	195	185	105	70	85	72	102	85	65
14	92	195	105	32	62	55	53	52	75	57
15	81	28	145	57	90	92	97	77	75	90
16	26	23	100	85	55	70	82	85	100	85
17	20	31	70	90	65	95	53	85	72	57
18	21	27	87	95	210	85	72	65	95	87
19	78	70	72	55	42	97	55	94	75	72
20	37	197	32	75	42	49	60	93	65	100
21	38	53	35	55	65	22	25	155	95	56
22	37	13	50	135	46	42	27	35	115	115
23	45	66	55	43	47	65	34	10	22	85
24	66	49	95	113	90	75	26	33	60	41
25	48	62	55	54	41	57	38	72	60	21
26	132	33	64	43	20	37	55	23	21	27
27	49	53	38	40	16	0	33	20	30	34
28	52	42	0	0	0	0	0	42	38	23
29	67	48	0	0	0	0	52	27	23	45
30	0	0	0	0	22	48	8	47	45	23
31	0	0	75	85	57	31	29	34	75	110
32	0	0	0	75	90	90	14	23	70	158
33	0	0	0	0	60	55	85	105	67	96
34	0	0	0	0	80	55	42	115	55	55
35	0	0	0	52	68	147	117	45	75	54

Продолжение табл. 68

Пи-кет	Профиль									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	56	39	0	0	0	0	0	0	0	0
2	59	40	0	0	0	0	0	0	0	0
3	50	34	65	47	0	0	0	0	0	0
4	58	33	34	41	47	0	0	0	0	0
5	26	52	68	44	64	0	0	0	0	0
6	56	47	62	115	83	86	43	31	0	0
7	122	100	104	56	87	32	53	56	47	51
8	87	150	109	75	140	89	85	100	116	0

Пи-кет	Профиль									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
9	115	170	131	100	118	114	137	87	113	135
10	200	115	145	125	155	82	96	93	74	97
11	110	95	140	90	112	100	105	110	93	91
12	122	70	80	185	165	117	190	117	118	180
13	65	70	180	117	105	128	160	165	85	110
14	85	110	142	130	125	140	115	130	122	75
15	90	95	95	140	150	90	112	85	140	90
16	75	105	95	127	120	80	85	105	44	44
17	65	75	100	130	185	60	95	95	57	67
18	50	95	95	147	165	140	70	125	52	34
19	130	105	195	180	90	97	42	110	48	29
20	105	57	125	95	36	65	95	90	63	31
21	115	75	94	67	108	90	60	92	77	39
22	65	44	67	78	70	62	92	64	49	110
23	47	80	85	87	25	29	46	36	58	54
24	14	43	50	72	86	38	90	41	38	23
25	40	70	49	60	41	50	55	90	37	22
26	52	50	115	50	75	41	16	25	57	38
27	55	125	37	42	38	29	17	110	100	17
28	23	50	115	47	110	40	52	170	145	38
29	24	39	270	98	248	77	26	55	72	210
30	29	68	98	370	75	37	47	80	75	55
31	16	34	75	245	280	64	47	61	65	75
32	50	47	136	188	90	95	580	120	33	55
33	110	330	70	70	270	95	115	158	34	38
34	90	115	52	60	105	80	122	150	80	65
35	82	100	65	95	105	165	145	145	210	120

используя результаты опробования буровзрывных скважин по одному из полностью отработанных уступов карьера (табл. 68).

Оптимальная разведочная сеть должна обеспечивать необходимую точность определения границ кондиционных руд и оценок среднего содержания молибдена в изучаемых объемах недр. Поэтому при выборе оптимальных разведочных сетей используются значения двух показателей степени разведанности: ошибок оценки среднего содержания и ошибок геометризации.

Задания студентам выдаются для разных вариантов бортового и минимального промышленного содержания. Бортовое содержание задается в интервале от 20 до 100, а минимальное промышленное — в пределах от 50 до 150 тысячных долей процента.

1. Выбор оптимальных сетей исходя из допустимых ошибок в оценке качества руд.

1.1. Промышленная оценка каждого подсчетного блока основана на сравнении среднего качества заключенных в нем руд с минимальным промышленным содержанием. Поэтому величина допустимой ошибки в оценке качества (δ) зависит от разницы между средним содержанием по месторождению (\bar{C}) и минимальным промышленным содержанием ($C_{м.п.}$):

$$\delta = \frac{\bar{C} - C_{м.п.}}{\bar{C}} \cdot 100 \%$$

Величину \bar{C} можно оценить по отработанному уступу карьера (табл. 68), предварительно выделив участки штокверка с содержанием молибдена выше бортового.

1.2. Для определения количества разведочных пересечений, обеспечивающих необходимую точность оценки средних содержаний, в случае нормального распределения используется формула

$$n = \left(\frac{t_{\alpha} V}{\delta} \right)^2,$$

где n — количество пересечений; t_{α} — значение критерия Стьюдента для уровня значимости α (см. прил. 1); V — коэффициент вариации содержания; δ — допустимая относительная погрешность.

В случае логнормального распределения содержаний применяется формула

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \sqrt{S_{\ln}^2 + 0,5 S_{\ln}^4} \cdot 100}{\delta} \right)^2,$$

где S_{\ln}^2 — дисперсия натуральных логарифмов содержаний; $Z_{1-\alpha/2}$ — значение нормированной функции нормального распределения для вероятности $1 - \alpha/2$ (см. прил. 3).

Однако этими формами можно пользоваться лишь в том случае, если количество молибдена в пределах штокверка изменяется случайно. При наличии закономерных изменений содержания в пространстве коэффициент вариации или дисперсия содержаний должны рассчитываться с учетом доли закономерной составляющей. Поэтому для правильного решения поставленной задачи необходимо проверить гипотезу о законе распределения содержания и изучить характер изменчивости этого параметра.

1.3. Для проверки гипотез о законе распределения можно воспользоваться методом моментов (см. методические указания к задаче 1.2).

1.4. Для предварительного суждения о характере изменчивости содержания молибдена можно использовать результаты опробования

по двум взаимно перпендикулярным профилям буровзрывных скважин на отработанном уступе карьера (см. табл. 68).

По обоим профилям требуется построить графики изменения содержания молибдена и проверить гипотезу об отсутствии тренда по количеству скачков и точек смены знака (см. методические указания к задаче 4.1).

1.5. Если гипотеза об отсутствии тренда отвергается, то для оценки количественных характеристик изменчивости содержания по двум взаимно перпендикулярным профилям необходимо рассчитать автокорреляционные функции и спектры амплитуд. Расчеты выполняются на ЭВМ по стандартным программам. Для анализа изменчивости целесообразно построить графики. В случае логнормального распределения характеристики изменчивости рассчитываются для их логарифмов.

Если автокорреляционная функция соответствует изменчивости стационарного типа (убывает с увеличением расстояния в определенном интервале), то ее можно использовать для оценки доли случайной составляющей в общей дисперсии для различных расстояний между скважинами (r), применяя следующую формулу:

$$D_r = 1 - \rho_r^2(x),$$

где D_r — доля случайной составляющей; $\rho_r(x)$ — значение автокорреляционной функции при расстоянии между скважинами, равном r .

Если на графиках автокорреляционных функций заметны периодические колебания, а на графиках спектров амплитуд — пики на определенных частотах, то доля случайной составляющей дисперсии оценивается по сумме аномальных значений спектра: $D_r = 1 - \Sigma d_{ан}$. Минимальное аномальное значение спектра ($d_{ан.м}$) определяется по формулам

$$d_{ан.м} = \bar{d} + 2 S_d; \quad \bar{d} = \frac{1}{N}; \quad S_d = \sqrt{\frac{N-1}{N^2(N+1)}},$$

где N — количество рассчитанных значений спектра. При определении доли этой составляющей по спектру учитываются только те аномальные значения, которые соответствуют колебаниям, с периодами превышающими заданные расстояния между скважинами.

Общая доля случайной составляющей в дисперсии содержания молибдена для прямоугольной сети находится как среднее арифметическое из определений по двум профилям.

Дисперсия случайной составляющей рассчитывается по формуле

$$S_{сл}^2 = S_{общ}^2 D_r,$$

где $S_{общ}^2$ — статистическая дисперсия содержаний или логарифмов содержаний молибдена.

1.6. Количественной оценкой анизотропии изменчивости содержания молибдена может служить коэффициент анизотропии (K_A),

равный отношению радиусов корреляции, определенных по графикам автокорреляционных функций для взаимно перпендикулярных профилей. В числитель подставляется больший радиус, а в знаменатель — меньший.

1.7. При наличии периодических составляющих в изменчивости содержания по графику спектра необходимо определить "запрещенные" расстояния между скважинами, равные или кратные длине периодов закономерных колебаний.

1.8. По совокупности кондиционных разведочных пересечений (C_k) по двум профилям оцениваются также среднее содержание (\bar{C}_k), коэффициент вариации (V) или дисперсия логарифмов и коэффициент рудоносности (K_p):

$$\bar{C}_k = \frac{\sum_1^{n_k} C_k}{n_k}; \quad V = \frac{S_{\text{общ}}}{\bar{C}_k} 100\%;$$

$$S_{\text{общ}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (C_k - \bar{C}_k)^2}{(n_k - 1)}}; \quad K_p = \frac{n_k}{n};$$

$$S_{\ln(\text{общ})}^2 = \frac{\sum_1^{n_k} (\ln C_k - \ln \bar{C}_k)^2}{(n_k - 1)},$$

где n_k — количество скважин с содержанием выше бортового, а n — общее количество скважин в двух профилях.

1.9. В связи с тем, что случайная составляющая дисперсия зависит от расстояния между скважинами, а t_α — от их количества в подсчетном блоке, поставленная задача может быть решена только методом последовательных приближений.

Первоначально расчет количества разведочных пересечений, обеспечивающих необходимую точность оценки средних содержаний, производится по приведенным в п. 1.2 формулам без учета закономерной составляющей. При этом значение критерия Стьюдента принимается равным 1,7, что соответствует доверительной вероятности 0,9 при $n = 30$.

Полученное количество скважин (n') используется для предварительного суждения о площади ячейки разведочной сети (S') по формуле

$$S' = \frac{K_p S_0}{n'},$$

где K_p — коэффициент рудоносности; S_0 — площадь оцениваемого объема недр.

Для сети доразведки S_0 принимается равной площади всего штокверка, а для опережающей и сопровождающей разведки S_0 соответству-

ет площадям квартальной и месячной отработки и принимается равной 1/4 и 1/12 от общей площади штокверка.

При предварительном расчете разведочная сеть принимается квадратной, поэтому расстояние между соседними скважинами l' определяется по формуле

$$l' = \sqrt{S''}.$$

1.10. Для полученных расстояний между скважинами l' определяется дисперсия случайной составляющей (см. п. 1.5) и производится повторный расчет необходимого количества разведочных пересечений уже с учетом закономерной составляющей изменчивости. Значение критерия Стьюдента или функции нормального распределения находится по соответствующей таблице (см. прил. 1.3) для n' определенного предварительным расчетом. Уровень значимости при этом целесообразно принять равным 0,1. Полученное уточненное количество пересечений n'' используется для расчета уточненной площади ячейки разведочной сети:

$$S'' = \frac{K_p S_0}{n''}.$$

Если изменчивость содержания молибдена близка к изотропной ($K_A < 1,5$) ячейка разведочной сети принимается квадратной и расстояние между скважинами (l'') находят по формуле

$$l'' = \sqrt{S''}.$$

При анизотропном характере изменчивости меньшая сторона ячейки разведочной сети определяется по формуле

$$l''_m = \sqrt{S''/K_A},$$

а большая (l''_6) находится путем умножения l''_m на коэффициент анизотропии:

$$l''_6 = l''_m K_A.$$

Если для уточненных сетей доли закономерной составляющей изменчивости будут существенно отличаться от предварительно рассчитанных сетей, операцию по уточнению следует повторять до тех пор, пока уточненная оценка n не совпадет с оценкой, полученной при предыдущем расчете.

2. Выбор оптимальных сетей по допустимым ошибкам геометризации.

2.1. Для разведочных сетей, обеспечивающих надежную оценку среднего содержания, необходимо определить ошибки геометризации. Для этого на план отработанного уступа карьера, где по заданному бортовому содержанию оконтурены кондиционные руды, накладываются кальки с нанесенными на них разведочными сетями. По вариан-

там для доразведки и эксплуатационной разведки отстраиваются контуры кондиционного оруденения и подсчитываются суммы площадей участков, где по редкой сети допущены ошибки в определении положения кондиционных руд ($\Sigma S_{\text{ошиб}}$). Ошибки геометризции (Δ) рассчитываются по формуле

$$\Delta = \frac{\Sigma S_{\text{ошиб}}}{2S_{\text{ист}}} 100 \%,$$

где $S_{\text{ист}}$ — площадь кондиционных руд, оконтуренных по сети 5 x 5 м (истинная площадь).

По трем вариантам сетей строится график изменения ошибок геометризции в зависимости от расстояния между скважинами. При анизотропном характере изменчивости берутся расстояния по короткой стороне ячейки разведочной сети.

Если ошибки геометризции для рассчитанных сетей не превышают допустимых, то эти сети рекомендуются для проведения разведочных работ. Если они больше допустимых, оптимальные сети находятся по графику зависимости ошибок геометризции от расстояния между скважинами.

Предельно допустимую величину ошибки геометризции по результатам сопровождающей эксплуатационной разведки можно определить по сумме планово допустимого разубоживания и потерь и принять равной 16 %. Для опережающей эксплуатационной разведки предельную ошибку геометризции можно принять равной 25 % (средняя ошибка геометризции для запасов категории B), а для доразведки — равной 40 % (средняя ошибка геометризции для запасов категории C₁).

Окончательный выбор разведочных сетей для доразведки, а также сопровождающей и опережающей эксплуатационной разведки производится с учетом обоих показателей разведанности и должен обеспечивать необходимую точность как оконтуривания руд, так и оценки их среднего качества. При этом необходимо предусмотреть, чтобы сети эксплуатационной разведки "вписывались" в сеть доразведки, а также были бы кратны сети взрывных скважин.

ЗАДАНИЕ 6.2

Комплексная математическая обработка результатов геохимической съемки с целью выделения перспективных площадей для поисков

В геологическом строении изучаемой территории (рис. 9) выделяется два структурных этажа: нижний — сложенный сланцами и гнейсами архея, верхний — представленный кислыми вулканитами и континентальными осадочными породами палеозоя (D₂ — C₁). Породы

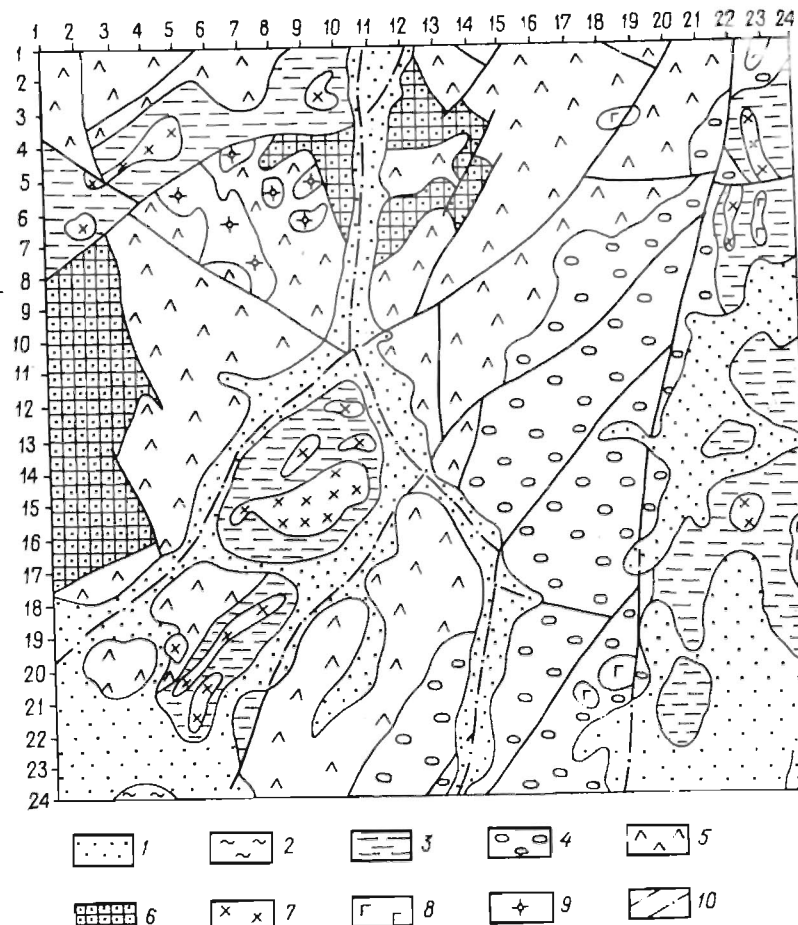


Рис. 9. Схематическая геологическая карта:

1 — аллювиальные отложения (Q); 2 — алевролиты (MZ); 3 — сланцы (C₁); 4 — терригенно-карбонатная толща (D₃-C₁); 5 — кислые вулканиты (D₂₋₃); 6 — гнейсы и сланцы (AR); 7 — гранодиориты (K₂); 8 — габбро (K₂); 9 — граниты (D₃); 10 — тектонические нарушения

архея и палеозоя прорваны позднедевонскими и мезозойскими интрузиями различного состава и разбиты на блоки многочисленными тектоническими нарушениями. В долинах рек коренные породы перекрыты четвертичными аллювиальными отложениями мощностью от 1 до 10 м.

На данной территории проведена геохимическая съемка масштаба 1 : 100 000

С целью выделения геохимических аномалий, соответствующих по размерам рудным полям и месторождениям, результаты геохимической съемки были сглажены скользящим окном размером 2 x 2 км (табл. 69-74)

Требуется:

1) описать характер изменчивости трансформированного (сглаженного) геохимического поля;

Таблица 69

Содержание (10^{-5}) молибдена

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	47	150	171	28	33	38	38	37	31	28	27	33
2	398	314	267	31	36	38	37	35	26	22	24	35
3	535	375	313	33	37	40	40	39	25	24	29	41
4	359	276	254	29	31	38	41	42	29	26	29	38
5	421	318	289	24	25	37	44	46	33	27	28	36
6	471	372	338	23	25	37	45	46	32	27	28	36
7	29	23	26	26	29	36	40	40	31	26	28	35
8	29	25	26	26	30	35	35	33	28	27	31	33
9	31	27	26	24	27	35	34	33	23	25	28	27
10	25	24	27	27	28	35	34	36	22	24	28	28
11	24	22	30	30	30	34	34	40	27	25	27	27
12	26	23	25	24	23	26	27	35	28	23	24	23
13	28	24	24	22	22	23	25	29	27	22	25	20
14	27	23	21	17	27	29	34	29	31	25	23	16
15	24	20	19	17	28	32	4	37	40	29	24	17
16	20	18	15	21	25	33	38	44	43	38	23	16
17	21	17	13	25	32	42	43	43	40	33	32	24
18	23	18	12	31	37	46	42	43	40	35	34	27
19	23	19	19	29	34	39	40	49	43	34	27	25
20	24	24	28	26	29	32	40	43	37	29	25	26
21	24	24	25	23	29	36	38	33	25	22	22	22
22	21	21	23	21	28	41	40	34	21	18	20	19
23	20	23	29	27	29	34	31	26	17	17	19	20
24	24	30	34	33	32	28	21	17	16	18	17	17

Продолжение табл. 69

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	35	41	44	34	27	18	199	194	190	37	40	27
2	36	39	37	26	22	20	199	186	172	29	32	28
3	38	35	24	16	16	20	189	175	164	40	42	39
4	34	33	26	23	20	18	186	39	51	51	48	43
5	31	30	26	25	21	19	31	38	52	52	51	43
6	31	28	21	24	22	30	32	40	49	54	59	45
7	32	29	26	30	30	36	39	50	57	57	57	54
8	31	27	30	33	31	31	37	46	51	51	54	55
9	24	20	26	32	32	33	43	43	48	45	51	51
10	25	23	28	36	35	39	47	44	46	38	48	46

№ профиля	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	25	31	36	33	36	44	43	46	29	40	48	46
12	25	22	31	28	26	22	32	36	44	40	62	60
13	22	26	34	35	25	20	21	26	33	42	55	53
14	19	21	38	41	26	26	24	34	36	42	55	54
15	20	24	27	32	26	26	26	33	34	41	53	54
16	15	16	21	25	23	23	24	32	34	38	41	42
17	17	15	17	18	18	18	20	28	30	32	29	32
18	23	19	20	19	15	13	13	20	23	26	26	30
19	26	26	25	20	15	12	12	20	23	27	27	33
20	24	26	25	19	17	13	13	21	24	27	28	34
21	26	22	22	18	18	16	14	20	22	26	28	30
22	22	19	19	17	16	17	16	20	21	25	26	28
23	20	18	17	19	19	19	18	21	21	23	24	28
24	16	17	18	20	24	21	22	21	22	26	27	39

Таблица 70

Содержание (10^{-5}) вольфрама

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	43	44	44	139	163	158	94	64	41	44	47	74
2	46	45	38	112	168	40	101	63	28	17	42	78
3	45	37	28	57	109	143	104	64	32	50	85	123
4	39	25	22	15	26	54	65	63	36	77	135	221
5	39	29	28	14	17	36	34	40	20	70	158	239
6	39	37	36	25	18	39	44	42	3	43	137	174
7	30	31	41	37	37	42	29	28	3	12	100	133
8	30	57	73	37	37	42	6	3	3	25	69	82
9	30	82	71	32	32	41	9	37	41	73	49	52
10	30	78	58	29	30	42	68	69	73	82	44	41
11	39	35	33	35	41	104	99	71	52	23	23	26
12	20	18	14	40	39	40	67	90	56	28	14	11
13	19	15	11	41	39	39	33	25	17	6	20	20
14	41	26	16	39	39	40	18	0	3	3	17	20
15	37	24	17	40	39	40	0	0	3	3	6	15
16	26	18	19	40	38	39	0	0	0	0	3	22
17	29	21	18	40	39	39	3	0	0	0	0	7
18	20	13	16	38	40	40	11	0	0	0	3	6
19	17	14	14	41	42	41	13	0	0	6	9	9
20	50	53	49	43	42	43	8	3	6	14	12	12
21	55	57	51	57	37	28	0	8	11	14	6	8
22	36	33	27	6	0	0	4	21	21	20	8	11
23	14	14	10	10	53	53	69	45	80	89	62	21
24	3	3	0	0	87	111	129	77	97	95	59	17

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	21	16	12	0	0	0	0	0	37	70	85	88
2	17	13	11	4	4	4	0	0	42	48	56	21
3	17	14	12	4	4	8	4	4	50	60	66	17
4	18	15	12	16	15	31	15	16	38	45	48	13
5	19	17	15	28	24	39	23	30	21	14	10	0
6	18	18	18	16	24	55	53	55	16	6	0	0
7	21	21	6	28	51	104	87	74	0	33	52	96
8	152	116	105	101	123	155	63	57	27	64	62	85
9	29	15	22	113	134	127	31	19	36	63	61	61
10	22	12	34	45	63	47	29	19	38	59	79	66
11	26	22	65	50	58	15	11	13	21	29	81	66
12	31	22	89	92	111	44	19	0	0	0	111	78
13	32	30	93	128	143	78	34	10	17	0	107	66
14	46	86	109	124	95	70	33	36	54	98	75	62
15	60	108	267	231	204	44	45	71	96	96	31	46
16	49	59	215	184	189	31	47	99	131	106	12	17
17	14	13	13	13	33	29	42	81	98	80	0	0
18	14	13	22	13	25	14	22	24	25	18	0	0
19	12	20	37	27	18	0	0	0	0	0	0	0
20	22	30	36	15	6	0	0	0	3	3	3	0
21	21	27	29	12	12	6	6	0	3	3	3	0
22	8	6	3	3	6	6	6	0	0	0	0	0
23	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	3	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 71

Содержание (10^{-5}) олова

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	127	138	139	165	181	194	186	182	169	166	154	158
2	130	139	137	160	175	194	189	186	164	154	140	152
3	122	132	131	153	166	180	189	191	171	161	133	138
4	120	129	131	151	165	178	186	194	183	174	143	149
5	136	134	132	142	154	164	170	182	179	182	162	163
6	153	137	134	129	134	150	154	165	158	172	161	160
7	147	138	138	132	132	150	152	161	149	162	158	167
8	147	141	143	136	135	144	149	156	147	159	168	174
9	154	148	145	142	137	144	144	151	140	158	168	173
10	-	142	137	143	142	153	149	150	134	150	163	167
11	-	147	140	141	149	163	159	152	134	141	152	152
12	147	144	136	137	146	158	154	149	135	139	145	156
13	146	142	136	139	148	150	146	141	135	143	148	157
14	154	145	146	145	150	143	142	143	149	153	154	153
15	153	148	148	144	140	139	137	141	148	153	158	153
16	147	148	140	134	124	132	136	142	148	151	160	156
17	153	153	138	129	119	127	139	150	155	149	153	150
18	162	157	137	133	126	132	139	149	149	144	148	142
19	166	159	144	141	139	141	145	144	145	145	153	146

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	150	156	155	148	149	145	148	138	143	145	155	145
21	147	152	155	151	152	144	144	133	143	147	153	146
22	148	144	147	143	145	141	141	139	147	153	150	144
23	142	139	141	135	134	132	134	143	146	152	147	138
24	136	143	143	134	127	122	128	142	148	149	148	149

Продолжение табл. 71

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	160	153	147	140	136	135	130	134	150	147	148	133
2	145	142	138	145	143	140	143	131	144	146	147	133
3	134	147	146	150	144	142	141	139	147	147	143	134
4	142	157	156	153	145	140	143	143	148	144	140	132
5	147	154	155	151	144	137	146	145	153	145	144	131
6	141	144	145	145	147	143	151	146	153	147	149	143
7	150	148	142	148	142	142	141	137	141	143	143	140
8	155	148	142	150	145	139	132	135	144	151	143	138
9	154	146	144	150	146	144	134	139	148	150	152	147
10	149	142	144	147	141	143	136	146	150	167	162	160
11	144	142	140	147	143	145	137	143	144	170	-	-
12	152	152	146	151	148	149	138	135	132	-	169	158
13	151	157	152	150	148	147	138	137	134	-	271	208
14	152	146	145	146	150	148	141	148	152	163	256	193
15	151	139	136	139	149	150	140	151	156	164	145	137
16	154	140	137	142	150	149	140	151	154	159	139	134
17	155	141	137	140	145	146	138	148	148	148	127	129
18	153	139	133	136	138	138	127	135	136	137	127	129
19	147	134	138	138	133	130	124	126	130	134	133	132
20	137	134	144	145	135	125	121	122	124	132	133	141
21	137	139	145	151	139	126	120	121	122	131	133	138
22	133	145	150	153	139	126	119	119	122	132	134	134
23	138	150	154	157	141	123	112	110	121	132	133	134
24	149	151	153	155	143	121	106	108	120	135	135	141

Таблица 72

Содержание (10^{-3}) бария

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	152	143	127	111	131	141	180	158	167	138	175	172
2	121	111	97	97	124	129	137	116	139	137	152	143
3	96	85	78	88	105	141	166	159	152	126	126	138
4	94	86	80	95	110	156	204	207	189	135	133	144
5	88	95	101	129	139	162	189	189	177	134	146	152
6	96	115	129	155	157	156	145	138	136	164	186	193
7	125	132	141	148	146	130	129	124	136	170	192	207
8	142	137	141	137	137	121	126	122	138	140	157	163
9	135	140	135	129	125	126	135	133	142	153	166	156
10	128	138	130	126	124	130	140	135	135	141	159	162
11	120	124	127	128	128	131	139	136	135	126	139	144

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	113	119	130	132	129	134	140	139	139	128	145	143
13	118	118	131	132	130	132	130	124	118	131	155	158
14	124	127	135	138	130	124	116	108	108	137	155	162
15	122	125	135	139	133	122	108	107	111	132	164	170
16	117	113	125	129	130	122	114	116	107	112	162	173
17	114	111	133	130	130	119	124	121	106	93	136	520
18	111	115	139	133	129	116	118	114	111	108	227	600
19	102	112	136	136	131	120	115	107	112	122	232	278
20	114	157	176	166	131	114	111	122	131	139	151	194
21	115	152	157	155	114	101	113	144	156	156	147	182
22	109	112	116	106	96	102	115	153	154	154	254	393
23	106	107	110	107	99	116	113	139	142	153	349	463
24	110	104	105	111	108	141	136	143	150	170	296	270

Продолжение табл. 72

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	155	160	146	154	122	136	134	135	112	109	106	103
2	143	161	157	161	143	144	145	137	132	118	118	118
3	149	151	145	141	153	149	159	157	147	128	120	121
4	157	156	148	140	149	147	154	158	141	132	114	117
5	171	157	143	131	136	141	135	139	123	123	107	109
6	176	161	139	126	149	161	150	127	116	126	124	109
7	176	163	141	131	155	157	159	134	129	130	118	130
8	186	175	164	140	142	131	132	135	133	122	106	112
9	181	181	195	152	148	128	123	122	122	121	104	106
10	182	206	230	139	176	138	124	111	109	132	133	152
11	204	329	377	341	221	160	123	106	103	161	131	150
12	217	331	430	442	318	207	116	106	107	150	72	76
13	172	227	332	386	317	198	112	109	117	112	69	79
14	184	270	342	315	222	141	120	114	119	97	69	77
15	216	251	378	315	253	119	115	106	107	98	90	81
16	213	224	321	268	207	106	106	109	113	111	99	96
17	619	609	307	236	172	106	111	118	121	118	109	111
18	702	782	589	475	271	126	130	112	113	110	116	120
19	423	717	899	727	305	138	142	115	114	113	120	123
20	418	812	905	659	221	142	131	109	103	112	115	116
21	471	730	740	442	169	185	165	147	114	107	108	106
22	686	623	493	216	165	187	162	145	117	109	112	108
23	597	409	328	193	165	119	111	99	105	109	114	112
24	261	164	201	203	175	129	116	94	101	109	113	114

Содержание (10^{-7}) ртути

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	18	20	21	28	33	38	38	37	31	28	27	33
2	20	22	27	31	36	38	37	35	26	22	24	35
3	26	26	31	33	37	40	40	37	25	24	29	41
4	22	24	25	29	31	38	41	42	29	26	29	38
5	17	21	21	24	25	37	44	46	33	27	28	36
6	21	20	22	23	25	37	45	46	32	27	28	36
7	29	23	26	26	29	36	40	40	31	26	28	35
8	29	25	26	26	30	35	35	33	28	27	31	33
9	31	27	26	24	27	35	34	33	23	25	28	27
10	30	24	27	27	28	35	34	36	22	24	28	28
11	25	22	30	30	30	34	34	40	27	25	27	27
12	26	23	25	24	23	26	27	45	28	23	24	23
13	28	24	24	22	22	23	25	29	27	22	25	20
14	27	23	21	17	17	29	34	29	31	25	23	16
15	24	20	19	17	28	32	40	37	40	29	24	17
16	20	18	15	21	25	33	38	44	43	32	23	16
17	21	17	13	25	32	42	43	43	40	32	32	24
18	22	18	12	31	37	46	42	43	40	35	34	36
19	23	19	19	29	34	39	46	49	43	27	34	27
20	12	24	28	26	29	32	40	43	37	25	29	25
21	24	24	25	23	29	36	38	33	25	26	22	22
22	21	21	23	21	28	41	40	34	21	22	18	20
23	20	23	29	27	29	34	31	26	17	19	17	19
24	24	30	34	33	32	28	21	17	16	20	18	17

Продолжение табл. 73

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	35	41	44	34	27	18	29	30	51	37	40	27
2	36	39	37	26	22	20	34	35	38	29	32	28
3	38	33	24	16	16	20	31	35	39	40	42	39
4	34	31	26	23	20	18	32	39	51	51	48	43
5	31	30	26	25	21	19	31	38	52	52	51	40
6	31	28	21	25	22	30	32	40	49	43	54	59
7	32	26	30	30	36	39	50	57	57	57	56	54
8	31	27	30	33	31	31	37	46	51	51	54	55
9	24	20	26	32	32	33	43	43	48	45	51	51
10	25	23	28	36	35	39	47	44	46	38	48	46
11	25	25	31	36	33	36	44	45	46	38	46	45
12	25	22	31	28	26	22	32	36	44	40	62	60
13	22	26	34	35	25	20	21	26	33	45	55	63
14	19	31	38	41	26	26	24	34	36	42	55	54
15	20	24	29	32	26	26	26	33	34	41	53	54
16	15	21	25	23	23	24	32	34	38	41	41	42
17	17	15	17	18	18	18	20	28	30	32	29	32
18	23	19	20	19	15	13	13	20	23	26	26	30
19	26	25	20	15	12	12	20	23	27	27	28	33
20	29	26	25	19	17	13	13	21	24	27	28	34

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
21	26	22	23	18	18	16	14	20	22	26	28	30
22	22	19	19	17	16	17	16	20	21	23	26	28
23	20	18	17	19	19	19	18	21	21	23	24	28
24	16	17	18	20	24	21	22	21	22	26	27	33

Таблица 74

Содержание ($n \cdot 10^{-8}$) золота

№ профиля	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	12	10	11	53	7	168	170	170	8	9	8	21
2	11	10	11	70	8	156	155	153	9	9	9	105
3	9	8	9	47	18	126	142	148	33	90	84	183
4	8	6	7	38	19	229	264	294	63	162	189	212
5	8	8	8	20	10	263	291	321	64	167	258	257
6	9	12	12	16	9	147	162	171	40	14	231	254
7	20	17	15	12	10	124	135	134	25	14	143	216
8	26	26	21	16	10	13	17	38	36	36	139	186
9	27	32	25	19	11	11	12	36	36	35	166	171
10	20	16	15	12	13	15	37	37	34	28	244	241
11	12	16	16	12	14	23	25	31	22	16	98	99
12	106	67	56	15	13	26	30	59	25	19	43	43
13	245	168	155	21	14	18	23	26	20	16	20	20
14	285	193	179	18	13	11	13	13	14	11	14	22
15	121	84	79	15	13	11	12	12	12	20	20	28
16	39	34	33	18	13	11	12	12	12	21	23	23
17	29	26	25	14	11	10	10	10	10	12	14	14
18	25	19	18	11	13	12	11	10	10	15	21	24
19	13	13	13	12	13	12	12	11	11	17	23	72
20	15	14	14	12	12	11	11	14	14	16	14	175
21	14	13	12	11	11	11	10	17	19	22	15	152
22	21	16	12	10	10	10	10	15	17	22	19	18
23	22	18	15	10	10	10	13	11	15	20	19	18
24	15	13	13	10	10	18	20	22	16	19	17	15

Продолжение табл. 74

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	26	134	128	208	91	89	8	8	7	6	6	5
2	74	175	113	185	82	81	14	16	15	6	5	5
3	91	188	108	165	67	66	22	24	23	6	6	5
4	88	131	109	205	105	102	23	23	28	6	6	6
5	131	208	220	336	126	128	57	61	58	6	6	6
6	173	242	224	309	90	99	64	77	67	6	6	5
7	181	219	217	219	120	69	79	35	31	6	6	5
8	179	173	230	204	141	44	65	26	25	6	6	6
9	174	62	140	165	121	38	48	62	64	19	20	27
10	246	13	61	361	355	312	36	56	80	50	51	75

№ профиля	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	203	15	14	357	360	360	12	43	70	130	63	25
12	43	14	14	94	139	135	66	45	78	65	578	465
13	16	11	11	195	255	254	22	39	63	85	499	377
14	23	20	11	216	272	279	100	46	66	32	317	285
15	20	19	10	100	167	171	106	61	81	58	115	188
16	11	09	09	49	94	94	72	85	110	92	47	80
17	11	10	09	32	46	47	37	90	107	95	11	16
18	27	20	16	17	21	21	17	45	46	44	10	11
19	153	144	105	10	10	12	11	10	7	7	8	10
20	297	291	142	11	11	12	11	10	8	8	7	9
21	228	231	95	11	11	12	13	12	10	12	10	12
22	60	60	60	9	9	11	13	12	9	11	10	12
23	18	18	19	11	11	11	11	9	8	10	10	12
24	11	10	11	11	11	11	11	9	7	9	10	12

2) выделить элементы неоднородности геохимического поля и разделить исследуемую территорию на относительно однородные геолого-геохимические блоки;

3) проверить гипотезу о влиянии состава вмещающих пород на величину геохимического фона;

4) оценить величину геохимического фона и выделить локальные аномалии в пределах каждого однородного блока;

5) выделить ассоциации химических элементов (отдельно для фоновых и аномальных концентраций);

6) для выделенных ассоциаций построить планы мультипликативных содержаний;

7) по геологическим факторам построить карту относительной энтропии;

8) выделить территории, перспективные для поисков полезных ископаемых.

Методические указания

1. Для предварительного суждения о характере изменчивости геохимического поля по каждому химическому элементу необходимо в масштабе карты построить планы изоконцентраций на кальке. Путем наложения этих планов на карту можно сопоставить положение изолиний с элементами геологического строения. При совпадении участков повышенных и пониженных концентраций с границами пород различного состава или границами тектонических блоков изучаемую территорию целесообразно разделить на несколько относительно однородных геолого-геохимических блоков.

2. По каждому однородному блоку определяются фоновые и минимальные аномальные содержания. Фоновое содержание фиксируется как среднее арифметическое из всех значений за исключением тех, которые попадают на границы блоков или существенно отличаются от всех остальных значений. Для определения аномальных содержаний целесообразно построить гистограммы или записать данные в виде числовой диаграммы "стебель с листьями" или "ящик с усами" (см. методические указания к задаче 1.1).

3. Гипотезу о различии фоновых содержаний для пород различного состава (или для разных тектонических блоков) можно проверить с помощью параметрических или непараметрических критериев согласия (см. методические указания к задачам 1.4, 1.5, 1.7). В связи с тем, что в данном случае нежелательны ошибки второго рода, уровень значимости при проверке гипотез целесообразно принять равным 0,1.

Если гипотеза о равенстве фоновых значений по двум различным породам или блокам не отвергается, выборки по ним для дальнейших расчетов можно объединить.

4. Для выделения ассоциаций химических элементов можно воспользоваться методом кластерного анализа (см. методические указания к задаче 3.1). Для этого с помощью стандартных программ на ЭВМ необходимо рассчитать матрицу парных коэффициентов корреляции. Расчет дистанционных коэффициентов также можно осуществить с помощью стандартной программы, а в случае ее отсутствия можно воспользоваться методическими указаниями к задаче 3.1.

Выделение ассоциаций целесообразно проводить отдельно по фоновым и аномальным совокупностям.

Предварительное суждение о наличии и причинах взаимосвязи между содержаниями различных химических элементов можно получить совмещая планы изоконцентраций. Для этого целесообразно также построить графики корреляционных полей точек (см. методические указания к задаче 2.1).

5. В геохимических полях отдельных элементов трудно выделить слабовыраженные аномалии. Поэтому для установленных ассоциаций целесообразно построить планы мультипликативных содержаний (см. методические указания к задаче 5.2). Для мультипликативных содержаний следует выполнить все расчеты, предусмотренные в п. 1–3.

6. Оценка перспективности территории на обнаружение месторождений полезных ископаемых производится по совокупности геохимических и геологических предпосылок. Поэтому для комплексного учета геологических факторов целесообразно построить карту относительной энтропии (см. методические указания к задаче 5.1).

7. Перспективные территории для постановки поисковых работ выделяются по:

а) наличием контрастных (в 2–4 раза выше кларка) аномалий содержаний отдельных химических элементов;

б) аномальным концентрациям мультипликативных содержаний для геохимических ассоциаций;

в) совпадению слабопроявленных геохимических аномалий с аномалиями относительной энтропии.

Задание выполняется бригадой из 6 студентов. Каждый студент обрабатывает результаты геохимической съемки по одному элементу. Пункты 4–7 выполняются совместно всеми членами бригады.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1982.
2. *Дэвис Дж.* Статистика и анализ геологических данных. – М.: Мир, 1977.
3. *Каждан А.Б., Гуськов О.И., Шиманский А.А.* Математическое моделирование в геологии и разведке полезных ископаемых. – М.: Недра, 1979.
4. *Каждан А.Б., Гуськов О.И.* Математические методы в геологии. – М.: Недра, 1990.
5. *Коган Р.И.* Интервальные оценки в геологических исследованиях. – М.: Недра, 1986.
6. *Коган Р.И., Белов Ю.П., Родионов Д.А.* Статистические ранговые критерии в геологии. – М.: Недра, 1983.
7. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. – М.: Наука, 1978.
8. *Поллард Дж.* Справочник по вычислительным методам статистики. – М.: Финансы и статистика, 1982.
9. *Родионов Д.А.* Статистические решения в геологии. – М.: Недра, 1981.
10. *Смирнов Б.Н.* Корреляционные методы при парагенетическом анализе. – М., Недра, 1981.
11. *Справочник по математическим методам в геологии/Д.А. Родионов, Р.И. Коган, В.А. Голубева и др.* – М.: Недра, 1987.
12. *Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. – М.: Мир, 1981.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Допустимые значения критерия Стьюдента (t)
при данном объеме выборки N и уровне значимости α

N	α				
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
∞	1,65	1,98	2,33	2,58	3,29

Значения функции $\Psi_N(r)$ по Ачисону и Брауну

r	N								
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0,05	1,0458	1,0458	1,0494	1,0499	1,0502	1,0504	1,0505	1,0506	1,0507
0,10	0933	0992	1012	1022	1028	1032	1034	1037	1038
0,15	1427	1521	1553	1569	1579	1585	1590	1593	1596
0,20	1938	2072	2118	2142	2156	2166	2173	2178	2182
0,25	2468	2648	2710	2742	2761	2774	2784	2791	2796
0,30	3018	3248	3329	3370	3395	3413	3424	3434	3441
0,35	3587	3874	3975	4028	4060	4081	4097	4108	4117
0,40	4177	4527	4652	4716	4756	4782	4801	4816	4827
0,45	4788	5207	5359	5437	5485	5517	5540	5558	5571
0,50	5421	5917	6097	6191	6248	6287	6315	6336	6352
0,55	6076	6657	6869	6980	7048	7094	7127	7152	7172
0,60	6754	7428	7676	7806	7886	7940	7979	8009	8031
0,65	7457	8231	8519	8670	8763	8826	8871	8906	8933
0,70	8184	9068	9399	9574	9681	9754	9807	9847	9879
0,75	8936	9940	2,0319	2,0519	2,0643	2,0727	2,0788	2,0834	2,0870
0,80	9714	2,0848	1279	1508	1650	1746	1816	1869	1911
0,85	2,0519	1794	2283	2542	2703	2813	2893	2954	3001
0,90	1352	2779	3330	3624	3807	3932	4022	4091	4145
0,95	2214	3804	4424	4755	4962	5103	5206	5284	5345
1,00	3104	4872	5565	5938	6170	6330	6445	6534	6603
1,05	4025	5984	6757	7174	7435	7614	7745	7844	7922
1,10	4977	7141	8002	8467	8759	8959	9106	9217	9305
1,15	5961	8345	9300	9818	3,0144	3,0368	3,0532	3,0656	3,0755
1,20	6978	9597	3,0655	3,1231	1594	1849	2026	2165	2275
1,25	8028	3,0901	2069	2707	3110	3388	3591	3746	3868
1,30	9114	2257	3544	4250	4696	5005	5230	5403	5539
1,35	3,0235	3668	5084	5862	6356	6697	6947	7139	8290
1,40	1393	5135	6689	7547	8092	8469	8746	8958	9125
1,45	2589	6661	8364	9307	9908	4,0324	4,0630	4,0864	4,1049
1,50	3824	8247	4,0111	4,1146	4,1807	2266	2603	2861	3065
1,55	5099	9897	1933	3068	3793	4297	4669	4953	5178
1,60	6415	4,1612	3832	5074	5870	6424	6832	7145	7393
1,65	7774	3394	5819	7171	8042	8649	9097	9441	9714
1,70	9176	5247	7878	9360	5,0113	5,0978	5,1469	5,1847	5,2146
1,75	4,0623	7173	5,0031	5,1646	2687	3415	3953	4366	4694
1,80	2116	9174	2275	4034	5170	5965	6559	7005	7365
1,85	3657	5,1253	4614	6527	7764	8832	9275	9700	6,0163
1,90	5246	3413	7052	9129	6,0477	6,1423	6,2124	6,2665	3094
1,95	6885	5657	9592	6,1847	3312	4342	5107	5896	6165
2,00	8575	7988	6,2239	4684	6276	7396	8229	8871	9383

r	N								
	100	110	120	130	140	150	160	170	180
0,05	1,0507	1,0508	1,0508	1,0508	1,0509	1,0509	1,0509	1,0509	1,0510
0,10	1040	1041	1042	1042	1043	1044	1044	1045	1045
0,15	1598	1600	1602	1603	1604	1605	1606	1607	1607
0,20	2185	2188	2190	2192	2193	2195	2196	2197	2198
0,25	2804	2807	2810	2812	2814	2815	2817	2818	1819
0,30	3446	3451	3455	3458	3461	3464	3466	3468	3470
0,35	4124	4130	4135	4140	4143	4146	4149	4152	4154
0,40	4836	4843	4849	4855	4859	4863	4866	4870	4872
0,45	5582	5591	5599	5605	5611	5616	5620	5623	5627
0,50	6366	6377	6386	6393	6400	6406	6411	6415	6419
0,55	7188	7201	7211	7221	7228	7235	7241	7247	7251
0,60	8050	8065	8078	8089	8098	8106	8113	8120	8125
0,65	8955	8973	8988	9000	9011	9021	9029	9036	9043
0,70	9904	9925	9942	9957	9969	9980	9990	9999	2,0006
0,75	2,0900	2,0924	2,0944	2,0961	2,0975	2,0988	2,0999	2,1009	1018
0,80	1844	1872	1995	2014	2031	2046	2059	2070	2080
0,85	3040	3071	3098	3120	3139	3156	3171	3184	3196
0,90	4189	4225	4225	4281	4303	4322	4339	4353	4367
0,95	5395	5435	5469	5498	5523	5545	5564	5581	5596
1,00	6659	6705	6744	6776	6805	6829	6851	6870	6778
1,05	7985	8037	8080	8117	8149	8177	8201	8223	8242
1,10	9376	9434	9483	9525	9560	9592	9619	9643	9665
1,15	3,0834	3,0899	3,0954	3,1001	3,1041	3,1076	3,1107	3,1134	3,1159
1,20	2363	2436	2498	2550	2595	2634	2669	2699	2726
1,25	3967	4049	4117	4175	4226	4270	4308	4342	4372
1,30	5649	5739	5816	5881	5937	5986	6028	6066	6100
1,35	7412	7513	7597	7670	7732	7786	7834	7876	7914
1,40	9260	9372	9466	9547	9616	9676	9729	9776	9818
1,45	4,1199	4,1323	4,1427	4,1515	4,1592	4,1659	4,1718	4,1770	4,1816
1,50	3231	3368	3483	3581	3666	3739	3804	3862	3913
1,55	5361	5512	5639	5748	5841	5923	5994	6058	6115
1,60	7594	7761	7901	8020	8123	8213	8293	8363	8425
1,65	9935	5,0118	5,0272	5,0404	5,0518	5,0617	5,0704	5,0781	5,0850
1,70	5,2389	2590	2760	2904	3029	3138	3134	3320	3396
1,75	4961	5182	5368	5527	5664	5784	5890	5983	6067
1,80	7657	7899	8103	8278	8428	8560	8675	8778	8870
1,85	6,0482	6,0748	6,0971	6,1162	6,1327	6,1471	6,1598	6,1711	6,1812
1,90	3444	3734	3978	4188	4368	4526	4665	4789	4899
1,95	6547	6864	7132	7360	7558	7731	7883	8018	8138
2,00	9800	7,0146	7,0438	7,0687	7,0903	7,1092	7,1258	7,1406	7,1538

Значения функции нормального распределения с параметрами 0 и 1

Для положительных значений Z

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5136	0,5199	0,5239	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5676	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5917	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6218	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7354	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8935	8944	8962	8980	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9100	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9278	9292	9306	9319
1,5	9331	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	9441	9648	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9874	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9924	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9945	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Для отрицательных значений Z

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
-0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
-0,2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
-0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
-0,4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
-0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
-0,6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
-0,7	2420	2398	2358	2327	2297	2266	2236	2206	2177	2148
-0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
-0,9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
-1,0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
-1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
-1,2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
-1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
-1,4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
-1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0570	0559
-1,6	0548	0537	0526	0515	0505	0495	0485	0475	0465	0455
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0300	0294
-1,9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0238	0233
-2,0	0227	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
-2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
-2,2	0139	0135	0132	0219	0125	0122	0119	0116	0113	0110
-2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
-2,4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
-2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0047
-2,6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
-2,7	0035	0034	0033	0032	0030	0030	0029	0028	0027	0026
-2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0020	0020	0019
-2,9	0019	0018	0017	0016	0016	0016	0015	0015	0014	0014
-3,0	0013	0013	0012	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
-3,1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
-3,2	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
-3,4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002
-3,5	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002
-3,6	0002	0002	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
-3,7	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
-3,8	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

Допустимые значения критерия Фишера при данном количестве степеней свободы K_1 и K_2 (уровень значимости $\alpha = 0,05$)

K_1	K_2											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,5	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71

Продолжение прил. 4

K_1	K_2											
	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,49	1,30
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Критические значения статистики критерия Ван-дер-Вардена
для односторонних границ

N	$\alpha = 0,025$			$\alpha = 0,001$		
	$m=0$ $m=1$	$m=2$ $m=3$	$m=4$ $m=5$	$m=0$ $m=1$	$m=2$ $m=3$	$m=4$ $m=5$
	8	2,40	2,30	—	1,42	1,37
9	2,38	2,20	—	1,56	1,48	1,30
10	2,60	2,49	2,30	1,71	1,67	1,57
11	2,72	2,58	2,40	1,83	1,77	1,64
12	2,86	2,79	2,68	1,98	1,84	1,87
13	2,96	2,91	2,78	2,09	2,03	1,93
15	3,11	3,06	3,00	2,22	2,19	2,12
16	3,39	3,36	3,28	2,44	2,42	2,36
17	3,49	3,44	3,36	2,54	2,51	2,44
18	3,63	3,60	3,53	2,65	2,64	2,59
19	3,73	3,69	3,61	2,76	2,72	2,66
20	3,86	3,84	3,78	2,85	2,84	2,80
21	3,96	3,92	3,85	2,95	2,92	2,87
22	4,08	4,06	4,01	3,05	3,04	3,00
23	4,18	4,15	4,08	3,14	3,12	3,06
24	4,29	4,27	4,23	3,23	3,22	3,19
25	4,39	4,36	4,30	3,33	3,29	3,26
26	4,50	4,48	4,44	3,41	3,39	3,37
27	4,59	4,56	4,51	3,49	3,47	3,43
28	4,69	4,68	4,64	3,57	3,57	3,54
29	4,78	4,76	4,72	3,66	3,64	3,60
30	4,88	4,87	4,84	3,74	3,73	3,70
31	4,97	4,95	4,91	3,82	3,80	3,76
32	5,07	5,06	5,03	3,89	3,88	3,86
33	5,15	5,13	5,10	3,96	3,95	3,92
34	5,25	5,24	5,21	4,05	4,05	4,02
35	5,33	5,31	5,28	4,12	4,11	4,08
36	5,42	5,41	5,38	4,19	4,19	4,16
37	5,50	5,48	5,45	4,26	4,25	4,24
38	5,59	5,58	5,55	4,33	4,33	4,32
39	5,67	5,65	5,62	4,40	4,39	4,38
40	5,75	5,74	5,72	4,48	4,48	4,46
41	5,83	5,81	5,79	4,54	4,53	4,50
42	5,91	5,90	5,88	4,62	4,62	4,59
43	5,99	5,97	5,95	4,68	4,67	4,66
44	6,06	6,06	6,04	4,76	4,74	4,73
45	6,14	6,12	6,10	4,81	4,80	4,78
46	6,21	6,21	6,19	4,88	4,86	4,86
47	6,29	6,27	6,25	4,93	4,93	4,90
48	6,36	6,35	6,34	5,00	5,00	4,99
49	6,43	6,42	6,39	5,07	5,05	5,04
50	6,50	6,50	6,48	5,14	5,13	5,11

N	$\alpha = 0,1$		
	$m=0$ $m=1$	$m=2$ $m=3$	$m=4$ $m=5$
2	0,1	—	—
3	0,50	—	—
4	0,73	0,64	—
5	0,90	0,74	—
6	1,10	1,04	0,82
7	1,25	1,14	0,89
8	1,42	1,37	1,23
9	1,56	1,48	1,30
10	1,71	1,67	1,57
11	1,83	1,77	1,64
12	1,98	1,94	1,87
13	2,09	2,03	1,93
14	2,22	2,19	2,12
15	2,33	2,28	2,20
16	2,44	2,42	2,36
17	2,54	2,51	2,44
18	2,65	2,64	2,59
19	2,76	2,72	2,66
20	2,85	2,84	2,80
21	2,95	2,92	2,87
22	3,05	3,04	3,00
23	3,14	3,12	3,06
24	3,23	3,22	3,19
25	3,33	3,29	3,26
26	3,41	3,39	3,37
27	3,49	3,47	3,43
28	3,57	3,57	3,54
29	3,66	3,64	3,60
30	3,74	3,73	3,70
31	3,82	3,80	3,76
32	3,88	3,89	3,86
33	3,96	3,95	3,92
34	4,05	4,05	4,02
35	4,12	4,11	4,08
36	4,19	4,19	4,16
37	4,26	4,25	4,24
38	4,33	4,33	4,32
39	4,40	4,39	4,38
40	4,48	4,48	4,46
41	4,54	4,53	4,50
42	4,62	4,62	4,59
43	4,68	4,67	4,66
44	4,76	4,74	4,73
45	4,81	4,80	4,78
46	4,88	4,86	4,86
47	4,93	4,93	4,90
48	5,00	5,00	4,99
49	5,07	5,05	5,04
50	5,14	5,13	5,11

K	α							
	0,99	0,95	0,90	0,50	0,10	0,05	0,01	0,001
1	0,002	0,0039	0,0158	0,455	2,706	3,841	6,635	10,828
2	0,0201	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	9,210	13,816
3	0,115	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	11,345	16,266
4	0,297	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	13,277	18,467
5	0,554	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	15,086	20,515
6	0,872	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	16,812	22,458
7	1,239	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	18,475	24,322
8	1,646	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	20,090	26,125
9	2,088	3,235	4,168	8,343	14,684	16,919	21,666	27,877
10	2,558	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	23,209	29,588
11	3,053	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	24,725	31,264
12	3,571	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	26,217	32,909
13	4,107	5,892	7,042	12,340	19,812	22,362	27,688	34,528
14	4,660	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	29,141	36,123
15	5,229	7,261	8,547	14,399	22,307	24,996	30,578	37,697
16	5,812	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	32,000	39,252
17	6,408	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	33,409	40,790
18	7,015	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	34,805	42,312
19	7,633	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	36,191	43,820
20	8,260	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	37,566	45,315
21	8,897	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	38,932	46,797
22	9,542	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	40,289	48,268
23	10,196	13,091	14,848	22,337	32,007	35,175	41,638	49,728
24	10,856	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	42,980	51,179
25	11,524	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	44,314	52,620
26	12,198	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	45,642	54,052
27	12,879	16,151	18,114	23,336	36,741	40,113	46,963	55,476
28	13,565	16,928	18,939	27,336	38,916	41,337	48,278	56,892
29	14,256	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	49,588	58,301
30	14,953	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	50,892	59,703
31	15,655	19,281	21,434	30,336	41,422	44,985	52,191	61,098
32	16,362	20,072	22,271	31,336	42,585	46,194	53,486	62,487
33	17,073	20,862	23,110	32,336	43,745	47,400	54,776	63,870
34	17,789	21,664	23,952	33,336	44,903	48,602	56,061	65,247
35	18,509	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	57,342	66,619
36	19,233	23,269	25,643	35,336	47,212	50,998	58,619	67,985
37	19,960	24,075	26,492	36,336	48,363	52,192	59,892	69,346
38	20,691	24,884	27,343	37,335	49,513	53,384	61,612	70,703
39	21,426	25,695	28,196	38,335	50,660	54,572	62,428	72,055
40	22,164	26,509	29,051	39,335	51,805	55,758	63,691	73,402
41	22,906	27,326	29,907	40,335	52,949	56,942	64,950	74,745
42	23,650	28,144	30,765	41,335	54,090	58,124	66,206	76,084
43	24,398	28,965	31,625	42,335	55,230	59,304	67,459	77,419
44	25,148	29,787	32,487	43,335	56,369	60,481	68,709	78,749
45	25,901	30,612	33,350	44,335	57,505	61,656	69,957	80,077
46	26,657	31,439	34,215	45,335	58,641	62,830	71,201	81,400
47	27,416	32,268	35,081	46,335	59,774	64,001	72,443	82,720
48	28,177	33,098	35,949	47,335	60,907	65,171	73,683	84,037
49	28,941	33,930	36,818	48,335	62,038	66,339	74,919	85,351
50	29,707	34,764	37,689	49,335	63,167	67,505	76,154	86,661
51	30,475	35,600	38,560	50,335	64,295	68,665	77,386	87,968
52	31,246	36,437	39,433	51,335	65,422	69,832	78,616	89,272
53	32,018	37,276	40,308	52,335	66,548	70,993	79,843	90,573
54	32,793	38,116	41,183	53,335	67,673	72,153	81,069	91,872
55	33,570	38,958	42,060	54,335	68,796	73,311	82,292	93,167
56	34,350	39,801	42,937	55,335	69,918	74,468	83,513	94,460
57	35,131	40,646	43,816	56,335	71,040	75,628	84,733	95,751
58	35,913	41,492	44,696	57,335	72,160	76,778	85,950	97,039
59	36,698	42,339	45,577	58,335	73,279	77,931	87,166	98,324
60	37,485	43,188	46,459	59,335	74,397	79,082	88,379	99,607
61	38,273	44,038	47,342	60,335	75,514	80,232	89,591	100,888

K	α							
	0,99	0,95	0,90	0,50	0,10	0,05	0,01	0,001
62	39,063	44,889	48,226	61,335	76,630	81,381	90,802	102,116
63	39,855	45,741	49,111	62,335	77,745	82,529	92,010	103,442
64	40,649	46,595	49,996	63,335	78,860	83,675	93,217	104,716
65	41,444	47,450	50,883	64,335	79,973	84,821	94,422	105,988
66	42,240	48,305	51,770	65,335	81,086	85,965	95,626	107,258
67	43,038	49,162	52,659	66,335	82,197	87,108	96,828	108,526
68	43,838	50,020	53,548	67,334	83,308	88,250	98,028	109,791
69	44,639	50,879	54,438	68,334	84,418	89,391	99,227	111,055
70	45,442	51,739	55,329	69,334	85,527	90,531	100,425	112,317
71	46,246	52,600	56,221	70,334	86,635	91,670	101,621	113,577
72	47,051	53,462	57,113	71,334	87,743	92,808	102,816	114,835
73	47,858	54,325	58,006	72,334	88,850	93,954	104,010	116,092
74	48,666	55,189	58,900	73,334	89,956	95,081	105,202	117,346
75	49,475	56,054	59,795	74,334	91,061	96,217	106,393	118,599
76	50,286	56,920	60,690	75,334	92,166	97,351	107,582	119,850
77	51,097	57,786	61,586	76,334	93,270	98,484	108,771	121,100
78	51,910	58,654	62,483	77,334	94,374	99,617	109,958	122,348
79	52,725	59,522	63,380	78,334	95,476	100,749	111,144	123,594
80	53,540	60,391	64,278	79,334	96,578	101,879	112,329	124,839

Критические значения статистик W_1 и $2M/W$ критерия Вилкоксона для односторонних границ

N_1	N_2	W_1		$2M/W$
		$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,010$	
10	10	78	87	210
	11	81	91	220
	12	84	94	230
	13	88	98	240
	14	91	102	250
	15	94	106	260
	16	97	109	270
	17	100	113	280
	18	103	117	290
	19	107	121	300
	20	110	125	310
	21	113	128	320
	22	116	132	330
	23	119	136	340
	24	122	140	350
	25	126	144	360
11	11	96	106	253
	12	99	110	264
	13	103	114	275
	14	106	118	286
	15	110	123	297
	16	113	127	308
	17	117	131	319
	18	121	135	330
	19	124	139	341
	20	128	144	352
	21	131	148	363
	22	135	152	374
	23	139	156	385
	24	142	161	396
	25	146	165	407
12	12	115	127	300
	13	119	131	312
	14	123	136	314
	15	127	141	336
	16	131	145	348
	17	135	150	360
	18	139	155	372
	19	143	159	384
	20	147	164	396
	21	151	169	400
	22	155	173	420
	23	159	178	432

N_1	N_2	W_1		$2MW$
		$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,010$	
	24	163	183	444
	25	167	187	456
13	13	136	149	351
	14	141	154	364
	15	145	159	377
	16	150	165	390
	17	154	170	403
	18	158	175	416
	19	163	180	429
	20	167	185	442
	21	171	190	455
	22	176	195	468
	23	180	200	481
	24	185	205	494
	25	189	211	507
14	14	160	174	406
	15	164	179	420
	16	169	185	434
	17	174	190	448
	18	179	196	462
	19	183	202	476
	20	188	207	490
	21	193	213	504
	22	198	218	518
	23	203	224	532
	24	207	229	543
15	15	184	200	465
	16	190	206	480
	17	195	212	495
	18	200	218	510
	19	205	224	525
	20	210	230	540
	21	216	236	555
	22	221	242	570
	23	226	248	585
	24	231	254	600
	25	237	260	615
16	16	211	229	528
	17	217	235	544
	18	222	242	560
	19	228	248	576
	20	234	255	592

N_1	N_2	W_1		$2MW$
		$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,010$	
	21	239	261	608
	22	245	267	624
	23	251	274	640
	24	256	280	656
	25	262	287	672
17	17	240	259	595
	18	246	266	612
	19	252	273	629
	20	258	280	646
	21	264	287	663
	22	270	294	680
	23	276	300	697
	24	282	307	714
	25	288	314	731
18	18	270	291	666
	19	277	299	684
	20	283	306	702
	21	290	313	720
	22	296	321	738
	23	303	328	756
	24	309	335	774
	25	316	343	792
19	19	303	325	741
	20	309	333	760
	21	316	341	779
	22	323	349	798
	23	330	357	817
	24	337	364	836
	25	344	372	855
20	20	337	361	820
	21	344	370	840
	22	351	378	860
	23	359	386	880
	24	366	394	900
	25	373	403	920
21	21	373	399	903
	22	381	408	924
	23	388	417	945
	24	396	425	966
	25	404	434	987
22	22	411	439	990
	23	419	448	1012

N ₁	N ₂	W ₁		ΣW
		α = 0,025	α = 0,010	
23	23	451	481	1081
	24	459	491	1104
	25	468	500	1127
24	24	492	525	1176
	25	501	535	1200
25	25	536	570	1275

Приложение 8

Критические значения статистики критерия равномерности Релея

n	α			
	0,10	0,05	0,025	0,01
5	0,6777	0,754	0,816	0,879
6	0,618	0,690	0,753	0,825
7	0,572	0,642	0,702	0,771
8	0,535	0,602	0,660	0,725
9	0,504	0,569	0,624	0,687
10	0,478	0,540	0,594	0,655
11	0,456	0,516	0,567	0,627
12	0,437	0,494	0,544	0,602
13	0,420	0,475	0,524	0,580
14	0,405	0,458	0,505	0,560
15	0,391	0,443	0,489	0,542
16	0,379	0,429	0,474	0,525
17	0,367	0,417	0,460	0,510
18	0,357	0,405	0,447	0,496
19	0,348	0,394	0,436	0,484
20	0,339	0,385	0,425	0,472
21	0,331	0,375	0,415	0,461
22	0,323	0,367	0,405	0,451
23	0,316	0,359	0,397	0,441
24	0,309	0,351	0,389	0,432
25	0,303	0,344	0,381	0,423
30	0,277	0,315	0,348	0,387
35	0,256	0,292	0,323	0,359
40	0,240	0,273	0,302	0,336
45	0,226	0,257	0,285	0,318
50	0,214	0,244	0,270	0,301
100	0,15	0,17	0,19	0,21
2nR ² ~ χ ₂ ²	4,605	5,991	7,378	9,210

Функция распределения Мизеса с круговым средним направлением μ = 180°

θ	k							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,01389	0,01126	0,00895	0,00699	0,00536	0,00404	0,00301	0,00221
10	0,02778	0,02278	0,01793	0,01400	0,01074	0,00811	0,00604	0,00444
15	0,04167	0,03385	0,02697	0,02108	0,01620	0,01225	0,00913	0,00672
20	0,05556	0,04522	0,03608	0,02826	0,02175	0,01647	0,01230	0,00907
25	0,06944	0,05665	0,04531	0,03557	0,02744	0,02083	0,01559	0,01153
30	0,08333	0,06816	0,05446	0,04304	0,03329	0,02535	0,01903	0,01411
35	0,09722	0,07978	0,06420	0,05071	0,03936	0,03007	0,02266	0,01686
40	0,11111	0,09152	0,07392	0,05861	0,04567	0,03504	0,02650	0,01981
45	0,12500	0,10338	0,08386	0,06679	0,05228	0,04029	0,03062	0,02299
50	0,13889	0,11540	0,09405	0,07527	0,05921	0,04587	0,03505	0,02647
55	0,15278	0,12757	0,10452	0,08409	0,06653	0,05184	0,03985	0,03028
60	0,16667	0,13992	0,11529	0,09331	0,07428	0,05825	0,04509	0,03450
65	0,18056	0,15246	0,12639	0,10295	0,08251	0,06517	0,05082	0,03919
70	0,19444	0,16520	0,13784	0,11306	0,09128	0,07265	0,05711	0,04442
75	0,20833	0,17815	0,14968	0,12368	0,10064	0,08078	0,06407	0,05030
80	0,22222	0,19132	0,16192	0,13485	0,11066	0,08962	0,07176	0,05690
85	0,23611	0,20471	0,17460	0,14662	0,12139	0,09925	0,08028	0,06436
90	0,25000	0,21834	0,18772	0,15901	0,13289	0,10975	0,08974	0,07277
95	0,26389	0,23222	0,20130	0,17206	0,14522	0,12122	0,10025	0,08228
100	0,27778	0,24633	0,21537	0,18582	0,15844	0,13372	0,11191	0,09302
105	0,29167	0,26069	0,22992	0,20030	0,17260	0,14734	0,12483	0,10514
110	0,30556	0,27529	0,24498	0,21554	0,18774	0,16217	0,13913	0,11876
115	0,31944	0,29014	0,26054	0,23154	0,20392	0,17825	0,15491	0,13405
120	0,33333	0,30522	0,27659	0,24832	0,22114	0,19566	0,17226	0,15112
125	0,34722	0,32053	0,29314	0,26587	0,23944	0,21444	0,19125	0,17009
130	0,36111	0,33606	0,31017	0,28420	0,25882	0,23460	0,21194	0,19106
135	0,37500	0,35180	0,32766	0,30327	0,27926	0,25616	0,23435	0,21408
140	0,38889	0,36774	0,34559	0,32306	0,30073	0,27909	0,25849	0,23918
145	0,40278	0,38385	0,36392	0,34353	0,32319	0,30334	0,28431	0,26633
150	0,41667	0,40013	0,38263	0,36463	0,34656	0,32883	0,31172	0,29544

θ	k							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
155	0,43056	0,41655	0,40166	0,38628	0,37077	0,35546	0,34060	0,32638
160	0,44444	0,43309	0,42098	0,40841	0,39570	0,38309	0,37079	0,35897
170	0,47222	0,46644	0,46025	0,45379	0,44722	0,44066	0,43423	0,42800
175	0,48611	0,48321	0,49009	0,47684	0,47353	0,47022	0,46696	0,46381
180	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

Продолжение прил. 9

θ	k							
	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00161	0,00116	0,00083	0,00059	0,00041	0,00029	0,00020	0,00014
10	0,00323	0,00233	0,00167	0,00118	0,00084	0,00059	0,00041	0,00029
15	0,00490	0,00353	0,00253	0,00180	0,00127	0,00090	0,00063	0,00044
20	0,00662	0,00479	0,00344	0,00245	0,00174	0,00123	0,00086	0,00060
25	0,00843	0,00611	0,00440	0,00314	0,00223	0,00158	0,00111	0,00078
30	0,01035	0,00753	0,00543	0,00389	0,00278	0,00197	0,00139	0,00098
35	0,01241	0,00906	0,00656	0,00472	0,00338	0,00241	0,00171	0,00121
40	0,01465	0,01073	0,00781	0,00564	0,00406	0,00290	0,00207	0,00147
45	0,01709	0,01259	0,00920	0,00669	0,00483	0,00348	0,00249	0,00178
50	0,01978	0,01466	0,01078	0,00788	0,00574	0,00416	0,00300	0,00216
55	0,02278	0,01699	0,01259	0,00927	0,00679	0,00496	0,00361	0,00262
60	0,02614	0,01965	0,01467	0,01089	0,00805	0,00593	0,00435	0,00319
65	0,02994	0,02270	0,01709	0,01281	0,00956	0,00711	0,00527	0,00390
70	0,03425	0,02620	0,01993	0,01509	0,01138	0,00856	0,00642	0,00481
75	0,03915	0,03027	0,02328	0,01782	0,01360	0,01035	0,00786	0,00596
80	0,04477	0,03501	0,02723	0,02111	0,01631	0,01258	0,00969	0,00746
85	0,05122	0,04053	0,03193	0,02508	0,01965	0,01537	0,01201	0,00938
90	0,05863	0,04699	0,03752	0,02988	0,02376	0,01887	0,01498	0,01189
95	0,06714	0,05455	0,04418	0,03571	0,02882	0,02325	0,01876	0,01514
100	0,07693	0,06339	0,05210	0,04276	0,03506	0,02875	0,02359	0,01936
105	0,08816	0,07370	0,06150	0,05127	0,04273	0,03563	0,02972	0,02482
110	0,10101	0,08571	0,07263	0,06152	0,05212	0,04419	0,03749	0,03185
115	0,11566	0,09962	0,08574	0,07379	0,06355	0,05477	0,04727	0,04084
120	0,13228	0,11565	0,10109	0,08840	0,07736	0,06777	0,05946	0,05223
125	0,15103	0,13402	0,11895	0,10564	0,09391	0,08360	0,07452	0,06652
130	0,17206	0,15491	0,13954	0,12581	0,11356	0,10264	0,09290	0,08421
135	0,19545	0,17847	0,16308	0,14917	0,13662	0,12530	0,11507	0,10583
140	0,22127	0,20479	0,18970	0,17592	0,16335	0,15188	0,14141	0,13183
145	0,24951	0,23390	0,21948	0,20618	0,19393	0,18264	0,17222	0,16259
150	0,28010	0,26575	0,25239	0,23996	0,22841	0,21766	0,20766	0,19832
155	0,31290	0,30020	0,28829	0,27713	0,26668	0,25688	0,24769	0,23903
160	0,34769	0,33701	0,32694	0,31744	0,30848	0,30004	0,29206	0,28450
165	0,38418	0,37585	0,36795	0,36047	0,35339	0,34667	0,34029	0,33421
170	0,42201	0,41630	0,41087	0,40570	0,40079	0,39612	0,39166	0,38740
175	0,46077	0,45786	0,45509	0,45246	0,44994	0,44755	0,44526	0,44306
180	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

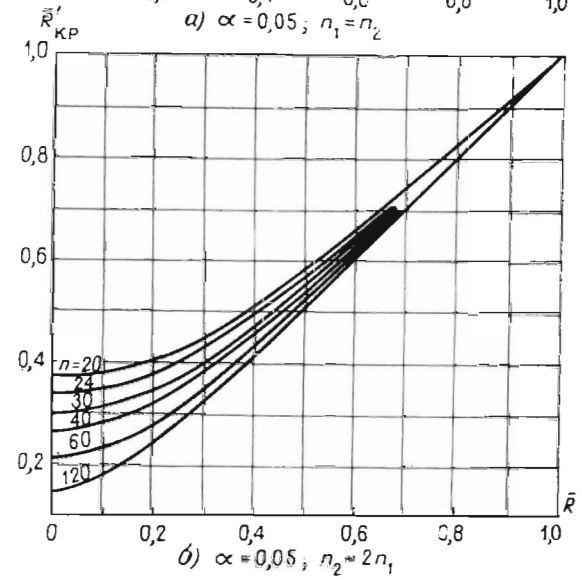
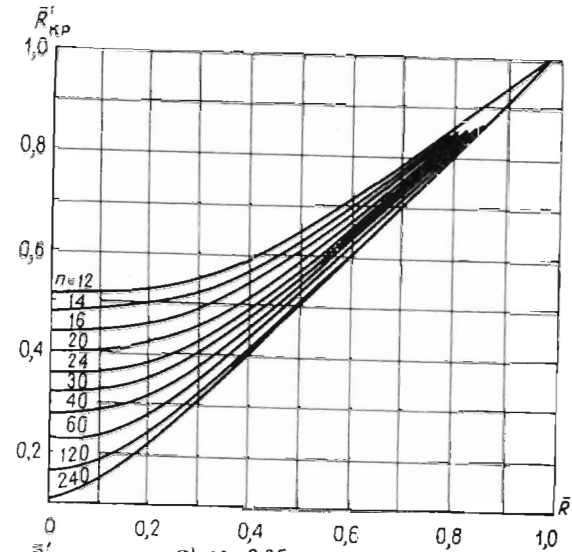
θ	k							
	3,4	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,00007	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,00014	0,00005	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
15	0,00021	0,00007	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
20	0,00029	0,00010	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
25	0,00038	0,00013	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
30	0,00048	0,00016	0,00003	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
35	0,00060	0,00021	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
40	0,00074	0,00026	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
45	0,00090	0,00032	0,00006	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
50	0,00111	0,00040	0,00007	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
55	0,00137	0,00051	0,00010	0,00002	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
60	0,00170	0,00066	0,00013	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
65	0,00213	0,00085	0,00018	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
70	0,00269	0,00112	0,00026	0,00006	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000

θ	k							
	3,4	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
75	0,00343	0,00149	0,00037	0,00010	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000
80	0,00441	0,00201	0,00055	0,00015	0,00004	0,00001	0,00000	0,00000
85	0,00573	0,00274	0,00082	0,00025	0,00008	0,00002	0,00001	0,00000
90	0,00750	0,00378	0,00123	0,00041	0,00014	0,00005	0,00002	0,00001
95	0,00988	0,00525	0,00187	0,00068	0,00025	0,00009	0,00004	0,00001
100	0,01308	0,00733	0,00286	0,00114	0,00046	0,00019	0,00008	0,00003
105	0,01737	0,01027	0,00437	0,00190	0,00084	0,00038	0,00017	0,00008
110	0,02308	0,01437	0,00668	0,00317	0,00153	0,00074	0,00036	0,00018
115	0,03062	0,02008	0,01016	0,00524	0,00274	0,00145	0,00077	0,00041
120	0,04048	0,02789	0,01531	0,00857	0,00485	0,00277	0,00160	0,00092
125	0,05323	0,03847	0,02284	0,01379	0,00843	0,00519	0,00322	0,00201
130	0,06947	0,05253	0,03358	0,02181	0,01432	0,00948	0,00631	0,00422
135	0,08986	0,07089	0,04857	0,03377	0,02371	0,01677	0,01193	0,00852
140	0,11499	0,09438	0,06897	0,05106	0,03815	0,02869	0,02169	0,01647
145	0,14538	0,12377	0,09594	0,07525	0,05950	0,04733	0,03783	0,03036
150	0,18140	0,15964	0,13055	0,10787	0,08976	0,04510	0,06310	0,05319
155	0,22317	0,20234	0,17358	0,15020	0,13078	0,11440	0,10043	0,08843
160	0,27050	0,25180	0,22528	0,20298	0,18382	0,16710	0,15236	0,13927
165	0,32287	0,30752	0,28527	0,26606	0,24911	0,23393	0,22019	0,20765
170	0,37941	0,36848	0,35241	0,33826	0,32553	0,31391	0,30319	0,29323
175	0,43893	0,43324	0,42481	0,41729	0,41045	0,40414	0,39825	0,39271
180	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

Параметр концентрации k распределения Мизеса

R	k	R	k	R	k	R	k
0,00	0,00000	0,25	0,51649	0,50	1,15932	0,75	2,36930
0,01	0,02000	0,26	0,53863	0,51	1,19105	0,76	2,45490
0,02	0,04001	0,27	0,56097	0,52	1,22350	0,77	2,54686
0,03	0,06003	0,28	0,58350	0,53	1,25672	0,78	2,64613
0,04	0,08006	0,29	0,60625	0,54	1,29077	0,79	2,75382
0,05	0,10013	0,30	0,62922	0,55	1,32570	0,80	2,87129
0,06	0,12022	0,31	0,65242	0,56	1,36156	0,81	3,00020
0,07	0,14034	0,32	0,67587	0,57	1,39842	0,82	3,14262
0,08	0,16051	0,33	0,69958	0,58	1,43635	0,83	3,30114
0,09	0,18073	0,34	0,72356	0,59	1,47543	0,84	3,47901
0,10	0,20101	0,35	0,74783	0,60	1,51574	0,85	3,68041
0,11	0,22134	0,36	0,77241	0,61	0,55738	0,86	3,91072
0,12	0,24175	0,37	0,79730	0,62	1,60044	0,87	4,17703
0,13	0,26223	0,38	0,82253	0,63	1,64506	0,88	4,48876
0,14	0,28279	0,39	0,84812	0,64	1,69134	0,89	4,85871
0,15	0,30344	0,40	0,87408	0,65	1,73945	0,90	5,3047
0,16	0,32419	0,41	0,90043	0,66	1,78953	0,91	5,8522
0,17	0,34503	0,42	0,92720	0,67	1,84177	0,92	6,5394
0,18	0,36599	0,43	0,95440	0,68	1,89637	0,93	7,4257
0,19	0,38707	0,44	0,98207	0,69	1,95357	0,94	8,6104
0,20	0,40828	0,45	1,01022	0,70	2,01363	0,95	10,2716
0,21	0,42962	0,46	1,03889	0,71	2,07685	0,96	12,7661
0,22	0,45110	0,47	1,06810	0,72	2,14359	0,97	16,9266
0,23	0,47273	0,48	1,09788	0,73	2,21425	0,98	25,2522
0,24	0,49453	0,49	1,12828	0,74	2,28930	0,99	50,2421
						1,00	∞

Номограмма для определения критических значений критерия Ватсона – Вильямса



Критические значения критерия равномерных меток
Вилера – Ватсона – Ходжеса

n	n ₁	α			
		0,001	0,01	0,05	0,10
8	4				6,83
9	3				6,41
	4			8,29	4,88
10	3				6,85
	4			9,47	6,24
	5			10,47	6,85
11	3			7,20	5,23
	4			10,42	7,43
	5		12,34	8,74	6,60
12	3			7,46	5,73
	4		11,20	8,46	7,46
	5		13,93	10,46	7,46
	6		14,93	11,20	7,46
13	3			7,68	6,15
	4		11,83	9,35	7,03
	5		15,26	10,15	7,39
	6		17,31	10,42	8,04
14	3			7,85	6,49
	4		12,34	9,30	7,60
	5		16,33	10,30	7,85
	6	19,20	15,59	12,21	7,94
	7	20,20	16,39	11,65	8,85
15	3			7,99	6,78
	4		12,78	8,74	7,91
	5	17,35	14,52	10,36	7,91
	6	20,92	17,48	11,61	9,21
	7	22,88	16,14	11,57	9,06
16	3			8,11	5,83
	4		13,14	9,44	7,38
	5	18,16	15,55	10,44	9,03
	6	22,43	16,98	11,54	9,11
	7	25,27	18,16	12,66	9,78
17	3		8,21	7,23	6,14
	4	13,44	11,76	9,76	7,64
	5	18,86	16,44	11,03	8,76
	6	23,73	17,76	12,21	9,41
	7	27,40	17,98	12,63	10,11
	8	29,37	19,11	13,36	10,15
18	2				3,88
	3		8,29	7,41	6,41
	4	13,70	12,17	9,94	8,06
	5	19,46	16,05	11,45	8,76
	6	24,87	17,40	12,25	9,94
	7	26,28	19,46	13,41	10,29
	8	28,40	20,11	13,82	10,60
	9	29,28	20,23	13,99	11,04

n	n ₁	α			
		0,001	0,01	0,05	0,10
19	2				3,89
	3			8,36	6,48
	4	13,93	12,52	9,69	7,54
	5	19,98	15,98	11,29	8,96
	6	25,87	18,19	12,56	9,87
	7	27,71	19,34	13,54	10,55
	8	31,04	21,12	14,29	11,12
	9	29,46	21,07	14,58	11,37
20	2				3,90
	3		8,42	7,70	6,70
	4	14,12	12,83	9,87	7,80
	5	20,43	16,29	11,49	9,08
	6	26,75	18,64	12,93	9,98
	7	29,36	20,43	14,05	11,03
	8	30,08	21,77	14,77	11,47
	9	32,44	22,99	15,45	11,97
	10	33,26	22,67	15,39	12,19
20	$R^* = \chi^2_2$	13,816	9,210	5,991	4,605

Преобразование коэффициентов корреляции r
в дистанционные коэффициенты

r	arccos r
0,01	1,560
0,02	1,550
0,03	1,540
0,04	1,530
0,05	1,520
0,06	1,510
0,07	1,500
0,08	1,490
0,09	1,480
0,10	1,470
0,11	1,460
0,12	1,450
0,13	1,440
0,14	1,430
0,15	1,420
0,16	1,410
0,17	1,400
0,18	1,390
0,19	1,379
0,20	1,369

r	$\arccos r$
0,21	1,359
0,22	1,349
0,23	1,338
0,24	1,328
0,25	1,318
0,26	1,308
0,27	1,297
0,28	1,287
0,29	1,276
0,30	1,266
0,31	1,255
0,32	1,245
0,33	1,234
0,34	1,224
0,35	1,213
0,36	1,202
0,37	1,192
0,38	1,181
0,39	1,170
0,40	1,159
0,41	1,148
0,42	1,137
0,43	1,126
0,44	1,115
0,45	1,104
0,46	1,092
0,47	1,081
0,48	1,070
0,49	1,058
0,50	1,047
0,51	1,035
0,52	1,024
0,53	1,012
0,54	1,000
0,55	0,988
0,56	0,976
0,57	0,964
0,58	0,952
0,59	0,940
0,60	0,927
0,61	0,914
0,62	0,902
0,63	0,889
0,64	0,876
0,65	0,863
0,66	0,850
0,67	0,836
0,68	0,823

r	$\arccos r$
0,69	0,809
0,70	0,795
0,71	0,781
0,72	0,767
0,73	0,752
0,74	0,737
0,75	0,722
0,76	0,707
0,77	0,692
0,78	0,676
0,79	0,660
0,80	0,643
0,81	0,626
0,82	0,609
0,83	0,591
0,84	0,573
0,85	0,554
0,86	0,536
0,87	0,516
0,88	0,495
0,89	0,474
0,90	0,451
0,91	0,428
0,92	0,403
0,93	0,377
0,95	0,318
0,97	0,245
0,99	0,142
-0,99	3,000
-0,98	2,940
-0,97	2,896
-0,96	2,858
-0,95	2,822
-0,94	2,793
-0,93	2,763
-0,92	2,737
-0,91	2,712
-0,90	2,689
-0,89	2,666
-0,88	2,645
-0,87	2,624
-0,86	2,605
-0,85	2,586
-0,84	2,567
-0,83	2,549
-0,82	2,531
-0,81	2,514
-0,80	2,497
-0,79	2,480

r	$\arccos r$
-0,78	2,464
-0,77	2,448
-0,76	2,433
-0,75	2,418
-0,74	2,403
-0,73	2,388
-0,72	2,373
-0,71	2,359
-0,70	2,345
-0,69	2,331
-0,68	2,317
-0,67	2,304
-0,66	2,290
-0,65	2,277
-0,64	2,264
-0,63	2,251
-0,62	2,238
-0,61	2,226
-0,60	2,213
-0,59	2,200
-0,58	2,188
-0,57	2,176
-0,56	2,164
-0,55	2,152
-0,54	2,140
-0,53	2,128
-0,52	2,116
-0,51	2,105
-0,50	2,093
-0,49	2,082
-0,48	2,070
-0,47	2,059
-0,46	2,048
-0,45	2,036
-0,44	2,025
-0,43	2,014
-0,42	2,003
-0,41	1,992
-0,40	1,981
-0,39	1,970
-0,38	1,959
-0,37	1,948
-0,36	1,938
-0,35	1,927
-0,34	1,916
-0,33	1,906
-0,32	1,895
-0,31	1,885
-0,30	1,875

r	$\arccos r$
-0,29	1,864
-0,28	1,853
-0,27	1,843
-0,26	1,832
-0,25	1,822
-0,24	1,812
-0,23	1,802
-0,22	1,791
-0,21	1,781
-0,20	1,771
-0,19	1,761
-0,18	1,750
-0,17	1,740
-0,16	1,730
-0,15	1,720
-0,14	1,710
-0,13	1,700
-0,12	1,690
-0,11	1,680
-0,10	1,670
-0,09	1,660
-0,08	1,650
-0,07	1,640
-0,06	1,630
-0,05	1,620
-0,04	1,610
-0,03	1,600
-0,02	1,590
-0,01	1,580
0	1,570

Значения функции энтропии

p	$-p \ln p$
0,001	0,007
0,002	0,012
0,003	0,017
0,004	0,022
0,005	0,027
0,006	0,031
0,007	0,035
0,008	0,038
0,009	0,042
0,01	0,046
0,02	0,084
0,03	0,106
0,04	0,129
0,05	0,150
0,06	0,168
0,07	0,186
0,08	0,202
0,09	0,216
0,10	0,230
0,11	0,243
0,12	0,254
0,13	0,265
0,14	0,275
0,15	0,285
0,16	0,293
0,17	0,301
0,18	0,309
0,19	0,315
0,20	0,322
0,21	0,328
0,22	0,333
0,23	0,340
0,24	0,342
0,25	0,346
0,26	0,350
0,27	0,353
0,28	0,357
0,29	0,359
0,30	0,361
0,31	0,364
0,32	0,365
0,33	0,366
0,34	0,366
0,35	0,368
0,36	0,368
0,37	0,370
0,38	0,368
0,39	0,368

p	$-p \ln p$
0,40	0,366
0,41	0,366
0,42	0,364
0,43	0,364
0,44	0,361
0,45	0,360
0,46	0,356
0,47	0,355
0,48	0,354
0,49	0,350
0,50	0,346
0,51	0,344
0,52	0,340
0,53	0,336
0,54	0,334
0,55	0,329
0,56	0,325
0,57	0,320
0,58	0,316
0,59	0,312
0,60	0,307
0,61	0,302
0,62	0,297
0,63	0,291
0,64	0,286
0,65	0,280
0,66	0,274
0,67	0,268
0,68	0,261
0,69	0,256
0,70	0,250
0,71	0,243
0,72	0,236
0,73	0,230
0,74	0,223
0,75	0,216
0,76	0,208
0,77	0,200
0,78	0,194
0,79	0,186
0,80	0,178
0,81	0,170
0,82	0,162
0,83	0,152
0,84	0,147
0,85	0,139
0,86	0,126
0,87	0,121

p	$-p \ln p$
0,88	0,113
0,89	0,102
0,90	0,094
0,91	0,086
0,92	0,077
0,93	0,067
0,94	0,058
0,95	0,050
0,96	0,039
0,97	0,029
0,98	0,019
0,99	0,010

Приложение 15

Значения функции максимальной энтропии (H_M)

N	H_M
3	1,0986
4	1,3863
5	1,608
6	1,795
7	1,943
8	2,076
9	2,187
10	2,303

 N – число компонент

Описание программ для микроЭВМ

Для автоматизации трудоемких расчетов при решении целесообразно применять микроЭВМ. На кафедре методики поисков и разведки МГРИ разработаны программы, которые можно использовать для следующих целей:

- 1) расчет одномерных статистических оценок;
- 2) проверка статистических гипотез;
- 3) двумерной автокорреляционной функции;
- 4) дискриминантной функции;
- 5) анализ случайных последовательностей;
- 6) сглаживание площадных данных статистическими скользящими окнами.

Программа STS предназначена для обработки векторов действительных чисел. В ней предусмотрены следующие команды управления, обеспечивающие ее основные функциональные возможности:

ST – расчет и распечатка параметрических статистик для текущего вектора;

IN [Arg] – расчет и распечатка индивидуальных оценок среднего и дисперсии (Arg – уровень значимости; по умолчанию он равен 0,05);

H [Arg] – проверка гипотезы о нормальном распределении выборки текущего вектора (Arg – уровень значимости; по умолчанию он равен 0,05);

Gi [Arg1, Arg2, Arg3] – построение гистограммы (Arg1 – количество интервалов разбиения. Arg2 – левая граница разбиения; по умолчанию – минимальное значение выборки. Arg3 – правая граница разбиения; по умолчанию – максимальное значение выборки);

AV – расчет автокорреляционной функции текущего вектора;

FU – расчет спектра амплитуд гармоник разложения Фурье;

LP – установить дальнейший вывод на устройство печати;

TT – установить дальнейший вывод на экран;

PR – распечатать значения текущего вектора данных;

GR – построить график текущего вектора;

FI – закончить работу с текущей матрицей;

? – распечатать справки о работе команд;

NE – взять в качестве текущего вектора следующую строку из матрицы данных;

BE – взять в качестве текущего вектора первую строку из матрицы данных;

RE – вернуться к исходному состоянию текущего вектора;

X [Arg] – взять в качестве текущего вектора строку матрицы с номером;

ADD | Arg] – прибавить к каждой компоненте текущего вектора число Arg (по умолчанию Arg = 10);

SUB [Arg] — вычесть каждую компоненту текущего вектора из числа Arg (по умолчанию Arg = 0);

MUL [Arg] — умножить каждую компоненту текущего вектора на число Arg (по умолчанию Arg = 2);

DIV [Arg] — разделить число Arg на каждую компоненту текущего вектора (по умолчанию Arg = 1);

LG — прологарифмировать каждую компоненту текущего вектора;

EX — проэкспонировать каждую компоненту текущего вектора;

NOR — нормировать значения текущего вектора;

WS [Arg] — сгладить средним арифметическим в статистическом окне.

Arg — размер "окна" сглаживания (по умолчанию Arg = 3).

Исходные данные, обрабатываемые по этим программам, могут представлять собой значения нескольких признаков, замеренных в точках наблюдения (пробах) или данные площадного опробования, привязанные в пространстве к профилям и пикетам. При вводе их в ЭВМ они представляются в виде матрицы, строки которой соответствуют геологическому признаку или профилю, а столбцы — пробам или пикетам на профиле.

Файл исходных значений для обработки по предложенным программам организуется следующим образом. В первой записи находятся три числа: количество строк в матрице, количество элементов в строке и код пропущенных значений. Начиная со второй строки записи построчно располагается сама матрица. Код пропущенного значения ставится на те элементы вектора, которые не нужно вовлекать в обработку при расчете статистик. В каждой строке матрицы должно быть записано одинаковое количество значений признака. Если их число меньше установленного, то недостающие элементы матрицы также кодируются пропущенными значениями. Пример текстового файла в предложенной форме записи выглядит следующим образом:

```
4, 7, - 1
68, 5, 7, 9, 6, 12, 10
37, 22, 11, 30, 15, 26, 20
30, 3.8, 18, 7, 21, 2.6, 37
18, 4.7, 40, 4.5, 5.3, 3.8, 5.9
```

В данной записи отсутствует код пропущенного значения в матрице исходных данных, однако в первой строке записи его присутствие обязательно.

Основным средством управления работой программы является командная строка, состоящая из последовательности команд. Эти команды набираются с клавиатуры и отображаются во второй строке экрана. В первой строке программа выдает сообщение об ошибках, предупреждая об ошибочных ситуациях, инструкции для пользователя. Команды обозначены начальными буквами английских слов, по смыслу связанных с характером требуемой процедуры. Если поль-

зователь вводит не предусмотренную команду, то программа в первой строке экрана делает сообщение об ошибке и ожидает ввода новой команды. Все команды отделяются друг от друга пробелами. После некоторых команд можно использовать список необязательных параметров, уточняющих действие команд, и отделенных друг от друга пробелами. Если параметры не заданы, то они выбираются по умолчанию исходя из характера задачи. Параметры представляют из себя числа, в которых дробная часть от целой отделена точкой. В дальнейшем изложении необязательные параметры будут обозначаться как [Arg 1, Arg 2, Arg 3].

Действие отдельной команды сводится к выполнению какой-то широко стандартной процедуры применяемой в практике геолого-математического моделирования. После этого данные можно подвергнуть обработке по следующей команде. Кроме того расчеты и характеристики, необходимые для решения задачи в целом можно запросить по командной строке вида: ST, GI, 20, LG, ST, GI.

В ответ на эту командную строку программа для текущего вектора матрицы данных подсчитает и распечатает статистики, построит гистограмму, разбив диапазон значений вектора данных на 20 интервалов, прологарифмирует вектор данных и после этого рассчитает статистики для логарифмов значений и построит их гистограмму. Затем программа выдаст сообщение "задайте командную строку", очистит вторую строку экрана и будет ожидать дальнейших приказаний пользователя.

Программы обработки площадных данных. Для обработки данных площадного опробования по отдельному участку используются значения признака, приведенные к регулярной сети и записанные в виде матрицы по строкам и столбцам. При отсутствии данных опробования в отдельных точках сети им присваивается код пропущенного значения. Файлы этих данных создаются по правилам, описанным выше. Для записи используется программа какого-либо текстового редактора; каждому файлу присваивается имя. Данные из матрицы записываются во второй и в следующих строках. Числа при вводе отделяются друг от друга запятой; дробная часть от целой отделяется точкой. Как правило, одна строка матрицы не помещается на одной строке терминала и в этом случае записывается на нескольких строках экрана; при переходе с одной строки экрана на другую числа отделяются запятой друг от друга.

Каждая новая строка матрицы должна начинаться с новой строки экрана; при этом после последней цифры предыдущей строки запятая не ставится. В конце последней строки матрицы ставится знак "/" и кур-

сор переводится на следующую строку, затем дается команда записи файла.

После ввода матрицы в текстовый файл и проверки отсутствия в нем ошибок программой TEST необходимо переписать данные в стандартный двоичный файл с помощью программы COPY.

Для просмотра содержимого двоичного файла с матрицей данных на экране или вывода файла на устройство печати можно воспользоваться программой PRM. При работе с программой PRM в процессе диалога пользователь выбирает устройство для вывода, задает длину поля, отводимого под одно число выводимых данных и определяет количество дробных знаков в числе. Пользователю представляется возможность распечатывать не всю матрицу целиком, а только ее часть в определенном интервале столбцов и строк. Вызвав один раз программу можно сделать несколько распечаток, задавая для них разные области матрицы, подлежащие распечатке и различные выходные форматы данных.

Расчет двумерной автокорреляционной функции производится программой ДАКФ. Результаты расчета представляют собой матрицу, каждый элемент которой является коэффициентом корреляции между значениями признака, рассчитанным для определенного направления и шага. Вектор направления, по которому оценивается изменение коэффициента корреляции, определяется относительно значения двумерной автокорреляционной функции равного 1.

В процессе диалога пользователь задает максимальную удаленность элементов по столбцам и строкам.

Сглаживание площадных данных в скользящем статистическом "окне" осуществляется программой WSR. В результате сглаживания получается матрица такого же размера, что и исходная. Каждое значение трансформированной матрицы представляет собой оценку заданного параметра — среднего, дисперсии, медианы — рассчитанного по исходным данным, попадающим в пределы статистического окна. Оценка относится к центру "окна". В процессе диалога пользователь задает размеры "окна" по разным направлениям и определяет минимальное число значений признака в нем; при меньшем числе данных в "окне" его центру присваивается код пропущенного значения.

Программа DISCRM производит расчет коэффициентов линейной дискриминантной функции. В качестве исходных данных для нее необходимы два файла, содержащие по матрице. Здесь по строкам располагаются пробы, а по столбцам — признаки. Матрицы формируются по выборкам из объектов, для оптимального разделения которых строится дискриминантная функция.

Матрицы обоих файлов должны содержать одинаковое число столбцов-признаков. Их количество не должно превышать 25. Количество строк-наблюдений по каждой матрице не лимитируется. Первая строка файла данных содержит три числа: 1) количество строк матрицы; 2) количество ее столбцов и 3) код пропущенного значения. Вторая строка файла данных содержит названия признаков-столбцов матрицы. Количество литер в названии одного признака не должно быть больше шести. Названия отделяются друг от друга пробелами. Начиная с третьей строки файла построчно располагается матрица данных. Программа в процессе своей работы запрашивает по очереди имена двух входных файлов данных, распечатывает их содержание, рассчитывает коэффициенты линейной дискриминантной функции и решающее правило для разделения предложенных двух совокупностей. Затем она выводит на печать эти параметры.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3	Раздел 4. Математическое описание пространственных геологических закономерностей	109
Раздел 1. Одномерные статистические модели	5	Задача 4.1. Выявление и количественное описание закономерностей пространственного изменения параметров геологических тел	111
Задача 1.1. Предварительный анализ химического состава коры выветривания на месторождении никеля	5	Задача 4.2. Выявление и количественное описание закономерностей пространственного изменения параметров рудной залежи на месторождении никеля	119
Задача 1.2. Определение доверительного интервала содержаний полезных компонентов при проведении аналитических работ	15	Задача 4.3. Изучение закономерностей пространственного размещения геологических объектов с использованием модели дискретных случайных полей	130
Задача 1.3. Определение необходимого числа проб для оценки среднего содержания полезного компонента с заданной точностью	21	Раздел 5. Методы преобразования геологической информации	135
Задача 1.4. Графические приемы статистической обработки данных при проверке геологических гипотез	26	Задача 5.1. Изучение неоднородности геологических объектов с помощью карт относительной энтропии	135
Задача 1.5. Проверка геологических гипотез с помощью критерия Ван-дер-Вардена	37	Задача 5.2. Выделение комплексных аномалий преобразованием многомерных величин в одномерные	138
Задача 1.6. Определение оптимального объема шлиховых проб с использованием распределения Пуассона	41	Задача 5.3. Количественная интерпретация картографических геологических данных при оценке перспективности территорий на обнаружение полезных ископаемых	143
Задача 1.7. Оценка достоверности и представительности различных способов отробования с помощью критериев Вилкоксона и Сиджела-Тьюки	45	Раздел 6. Типовые задания по курсовым работам	146
Задача 1.8. Использование интервальных оценок площадных коэффициентов рудоносности при планировании геологоразведочных работ	52	Задание 6.1. Выбор оптимальной разведочной сети эксплуатационной разведки и доразведки месторождения молибдена	146
Задача 1.9. Статистический анализ угловых величин при изучении тектонической структуры рудопроявлений	56	Задание 6.2. Комплексная математическая обработка результатов геохимической съемки с целью выделения перспективных площадей для поисков	154
Задача 1.10. Оценка влияния ландшафтных условий на результаты геохимической съемки с использованием однофакторного дисперсионного анализа	65	Список литературы	166
Задача 1.11. Оценка условий концентрации полезных минералов в морских осадках с помощью двухфакторного дисперсионного анализа	70	Приложения	167
Задача 1.12. Проверка гипотезы о влиянии степени метасоматического изменения вмещающих пород на их петрофизические свойства с помощью двухфакторного дисперсионного анализа	75	1. Допустимые значения критерия Стьюдента (t) при данном объеме выборки N и уровне значимости α	167
Раздел 2. Двумерные статистические модели	77	2. Значения функции $\psi_N(t)$ по Ачисону и Брауну	168
Задача 2.1. Оценка содержаний попутных полезных компонентов в полиметаллических рудах с помощью уравнения регрессии	77	3. Значения функции нормального распределения с параметрами 0 и 1	170
Задача 2.2. Применение регрессионного анализа для оценки физических свойств апатит-нефелиновых руд	83	4. Допустимые значения F критерия Фишера при данном количестве степеней свободы K_1 и K_2 (уровень значимости $\alpha = 0,05$)	172
Задача 2.3. Проверка гипотезы о наличии корреляционной связи между свойствами геологических объектов с помощью рангового коэффициента корреляции	86	5. Критические значения статистики критерия Ван-дер-Вардена для односторонних границ	174
Раздел 3. Многомерные статистические модели	89	6. Значения критерия Пирсона	176
Задача 3.1. Выделение ассоциаций химических элементов иерархическим методом (кластер-анализ)	89	7. Критические значения статистик W_1 и $2MW$ критерия Вилкоксона для односторонних границ	179
Задача 3.2. Выделение ассоциаций химических элементов при изучении зональности коры выветривания ультрамафитов	96	8. Критические значения статистики критерия равномерности Релся	182
Задача 3.3. Разделение геологических объектов с помощью линейной дискриминантной функции	98	9. Функция распределения Мизеса с круговым средним направлением $\mu = 180^\circ$	183
Задача 3.4. Использование уравнения множественной регрессии для оценки содержаний попутных полезных компонентов	104	10. Параметр концентрации k распределения Мизеса	188
		11. Номограмма для определения критических значений критерия Ватсона-Вильямса	189
		12. Критические значения критерия равномерных меток Вилера-Ватсона-Ходжеса	190
		13. Преобразование коэффициентов корреляции r в дистанционные коэффициенты	191
		14. Значения функции энтропии	196
		15. Значения функции максимальной энтропии (H_M)	198
		16. Описание программ для микроЭВМ	199

Гуськов О.И., Кушнарв П.И., Таранов С.М.

Г 96 **Математические методы в геологии.** Сборник задач: Учеб. пособие для вузов. — М.: Недра, 1991. — 205 с.: ил.

ISBN 5-247-01017-5

Рассмотрены наиболее часто встречаемые в геологической практике типовые задачи, решение которых основано на математическом моделировании геологических объектов. Изложены методы применения одномерных, двумерных и многомерных статистических моделей, а также методы математического описания закономерных изменений свойств геологических объектов в пространстве. Помещены необходимые математические таблицы и программы на языке ФОРТРАН, позволяющие выполнять расчеты на мини- и микроЭВМ.

Для студентов геологических специальностей вузов.

Г $\frac{1804010000 - 194}{043(01) - 91}$ 24-91

ББК 26.3

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Гуськов Олег Иванович
Кушнарв Петр Иванович
Таранов Сергей Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОЛОГИИ
СБОРНИК ЗАДАЧ

Заведующий редакцией *О.И. Паркани*
Редактор издательства *А.П. Хуповка*
Технические редакторы *Н.А. Зотимова, Н.С. Анашкина*
Корректор *Е.М. Федорова*
Операторы *Н.Я. Новикова, Л.Н. Жучкова*

ИБ 7690

Подписано в печать с репродуцированного оригинал-макета 10.04.91. Формат 60×88¹/16. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Пресс-роман. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 12,74. Усл. кр.-отт. 12,98. Уч.-изд. л. 14,33. Тираж 4870 экз. Зак. № 1525 /1758-2. Цена 45 коп.
Набор выполнен на наборно-пишущей машине

Ордена "Знак Почета" издательство "Недра".
125047 Москва, Тверская застава, 3.

Московская типография № 9 НПО "Всесоюзная книжная палата" Госкомитета СССР по печати.
109033, Москва, Волоцавская ул., 40