

Описание пространственной вариабельности и неопределенности. Стохастическое моделирование

В.В. Демьянов, М.Ф. Каневский

В настоящей статье мы перейдем от задачи пространственной интерполяции, изложенной в выше, к проблеме стохастического моделирования многих пространственных переменных. Оно является наиболее современным методом пространственного анализа и имеет ряд преимуществ перед моделями интерполяции.

Стохастическое моделирование является альтернативным подходом пространственной интерполяции (Goovaerts P., 1997; Journel A.G., 1994). Оно позволяет оценить пространственную вариабельность и неопределенность данных. В отличие от детерминистических интерполяторов и геостатистических оценщиков, которые усредняют и сглаживают вариабельность исходных данных, стохастические методы позволяют воспроизвести случайный пространственный процесс на основе определенных качественных и количественных критериев исходного распределения. В то время как интерполяционная оценка в точке единственна для заданной модели и ее параметров, результатом стохастического моделирования является набор оценок (реализаций) значения функции в точке для заданной модели.

Стохастическое моделирование позволяет сгенерировать множество равновероятных реализаций, обладающих свойствами исходного распределения:

- одинаковой с исходным процессом плотностью распределения;
- одинаковой пространственной структурой с исходным распределением.
- точное воспроизведение исходных данных.

Таким образом, цели моделирования и оценивания различны: стохастическое моделирование призвано оценить пространственную вариабельность и неопределенность данных, получить вероятностные оценки превышения заданного уровня и оценки с заданным уровнем вероятности превышения. Такие оценки, а также анализ неопределенности пространственной оценки, крайне важны для поддержки принятия квалифицированных решений.

Стохастические методы основываются на предположении, что анализируемые данные являются реализациями случайного процесса. Это позволяет, используя имеющиеся измерения как зафиксированные значения (условное моделирование), получить бесконечно много новых реализаций переменной в точке оценивания. Построенные таким образом стохастические реализации обладают той же функцией распределения и такой же пространственной корреляционной структурой, что и исходные данные. Наличие нескольких равновероятных оценок в одной точке позволяет оценить неопределенность оценивания и построить вероятностные оценки – оценки вероятности превышения заданного уровня загрязнения или оценки, которые могут быть превышены действительными значениями загрязнения с заданной вероятностью.

Загрязнение почвы радионуклидами в результате Чернобыльской аварии имеет крайне сложный пространственный характер. Основными

отличительными чертами Чернобыльских выпадений являются пятнистость, высокая вариабельность, анизотропия, нестационарность, а также наличие пространственных структур на различных масштабах. Такой характер данных определялся многочисленными факторами, проявившимися во время выброса, переноса, выпадения и миграции радионуклидов. К ним относятся особенности динамики источника, климатические условия, орография и характеристики подстилающей поверхности, различные механизмы выпадения радионуклидов на поверхность, и т. п.

Для анализа радиоактивного загрязнения поверхности применяются многочисленные методы в том числе детерминистические, геостатистические, искусственные нейронные сети. При картировании загрязнения все вышеперечисленные подходы дают единственную оценку загрязнения для одной выбранной модели. Один из стохастических методов – последовательное Гауссово моделирование – успешно применялся к Чернобыльским выпадениям в (Kanevsky M., 1994; Каневский М.Ф., 1995; М. Каневский, В. Демьянов, 1995).

Последовательные Гауссовы симуляции

Теория метода

Рассмотрим пространственную переменную, $z(x)$, измеренных в точках x . Пусть $z(x_0)$ является значением переменной в точке оценивания x_0 . Проблема состоит в генерации пространственных моделей этих переменных так, чтобы:

- были воспроизведены некоторые статистические параметры распределения переменной;
- были точно воспроизведены значения переменных в точках, где они известны.

Геостатистика интерпретирует измерения пространственной переменной $z(x)$, как реализации случайной переменной, обозначенных $Z(x)$. В рамках такой системы проблема заключается в генерации совместных реализаций K случайных функций таких, чтобы:

1. было воспроизведено распределение (гистограмма) случайной функции;
2. была воспроизведена пространственная корреляционная структура (вариограмма) случайной функции;
3. значения в точках измерений совпадали с исходными.

В основе генерации реализаций функции Z в N точках $[u_1, \dots, u_N]$ лежит выборка из условной функции распределения [81]:

$$F(u_1, \dots, u_N; z_1, \dots, z_N | (n)) = \text{Prob}\{Z(u_1) \leq z_1, \dots, Z(u_N) \leq z_N | (n)\}$$

Принцип последовательного моделирования выражается далее следующим образом:

$$F(u_1, \dots, u_N; z_1, \dots, z_N | (n)) = F(u_N; z_N | (n+N-1)) \cdot F(u_{N-1}; z_{N-1} | (n+N-2)) \cdot \dots \cdot F(u_1; z_1 | (n))$$

где $F(u_1; z_N | (n+N-1))$ – условная функция распределения $Z(u)$, определяемая n исходными данными и $N-1$ реализациями $Z(u_j) = z(u_j)$, $j=1, \dots, N-1$.

На первом этапе моделирования предполагается стационарность случайной функции $Z(x)$ и существование случайной функции $Y(x)$ такой, что

$$Y(x) = \phi[Z(x)], \quad \text{и} \quad Y(x) \sim N(0, 1),$$

где ϕ – однозначная функция Гауссова преобразования.

Преобразованные переменные называются нормальными (normal score). Функция $Y(x)$ является стационарной в строгом смысле и распределены по стандартному нормальному закону по построению. Как следствие, полный вероятностный закон распределения $Y(x)$ известен, если известно среднее значение и ковариационная функция. Среднее значение равно нулю в силу стандартного нормального распределения. Ковариация выражается через вариограммы следующим образом:

$$C(h) = C(0) - \gamma(h),$$

где $C(h)$ – ковариация а $\gamma(h)$ – вариограмма переменной z .

На **втором этапе** проводятся последовательные симуляции (моделирование) нормализованных значений по следующему алгоритму:

1. Случайный выбор местоположения x_0 , которое еще не было промоделировано.
2. Использование кригинга (простого или обычного) для расчета оценки в точке x_0 , используя нормальные (normal score) значения из окрестности – как измеренные, так и уже промоделированные.
3. Построение нормального закона распределения на основе оценки и вариации кригинга, взятых в качестве соответственно математического ожидания и вариации нормального распределения.
4. Случайный выбор реализации из условной функции распределения, определяющей вектор промоделированных нормальных значений.
5. Алгоритм повторяется до получения реализаций во всех требуемых точках.

После прохождения всех точек сетки оценивания, промоделированные нормальные значения преобразуются обратно, используя обратное Гауссово преобразование.

Предполагается, что случайная функция $Y(x)$ распределена мультинормально. Это подразумевает, что мультинормально распределенный случайный вектор состоит из:

- * случайных переменных из окрестности x_0 ;
- * промоделированных случайных переменных в точке x_0 .

Проверка на мультинормальность будет проведена ниже на примере конкретных данных.

Практический алгоритм последовательных Гауссовых симуляций

На практике, в процессе последовательных Гауссовых симуляций используется ряд необходимых, но оправданных упрощений.

Последовательный анализ пространственных данных имеет первостепенной значение и должен предшествовать моделированию. На этом этапе данные подготавливаются, проверяются на возможные ошибки и недостаток стационарности. Значительная нестационарность данных должна быть предметом особого внимания. Так например, области с различным статистическим описанием должны рассматриваться отдельно. При наличии трендов они выделяются и рассматриваются отдельно, а затем по окончании

моделирования добавляются. На этом же этапе проводится декластеризация, если этого требует сеть мониторинга.

Нормальное преобразование данных. Гауссово преобразование ϕ производится путем постановки в соответствие кумулятивной функции распределения переменной кумулятивного стандартного нормального распределения [71]:

$$G(y) = F(z) \Leftrightarrow y = \phi(z) = G^{-1}[F(z)] \Leftrightarrow z = \phi^{-1}(y) = F^{-1}[G(y)],$$

где $F(\bullet)$ – кумулятивное распределение частоты переменной, а $G(\bullet)$ – кумулятивное стандартное нормальное распределение. Практическая реализация прямого и обратного нормального преобразования проиллюстрирована на рисунке 2.А.

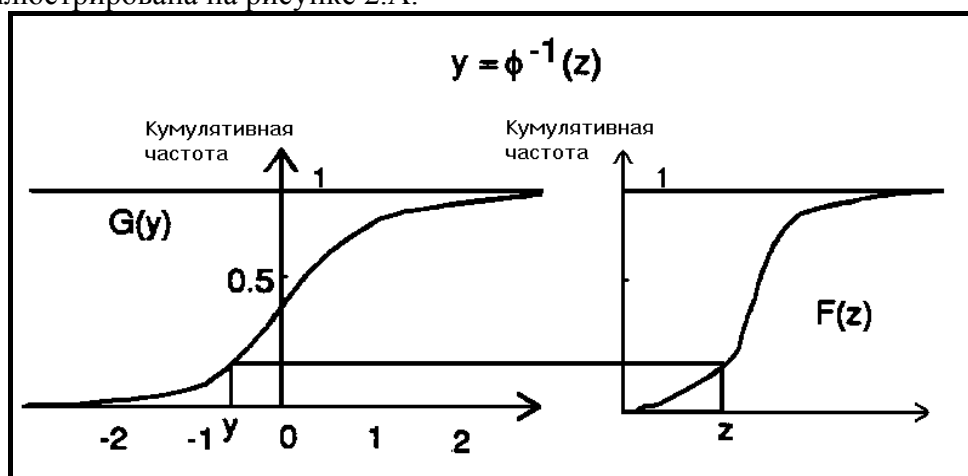


Рисунок 2.А. Графическая иллюстрация преобразования функции $F(z)$ в стандартную нормальную функцию $G(y)$ посредством их кумулятивных функций распределения.

Проверка на мультинормальность. Следующим шагом является предположение совместной мультинормальности распределений нормальной случайной функции $Y(x)$. Полученная в результате нормального преобразования переменная распределена одномерно нормально по построению. Это, однако, является необходимым, но не достаточным условием мультинормальности ее пространственного распределения. Следующим необходимым условием является бинормальность – нормальность кумулятивной функции распределения любой пары значений $Y(x)$ и $Y(x+h)$. В наиболее распространенном случае неполных измерений на нерегулярной сетке не существует теста на мультинормальность. Однако, можно использовать несколько проверок на бинормальность, что является необходимым, но не достаточным условием для мультинормальности.

Для проверки на бинормальность условной функции распределения любого набора пар данных $\{y(x_i), y(x_i+h), i=1, \dots, N(h)\}$ используется ковариация $C_Y(h)$. Существует аналитическое и табулированное соотношения между ковариацией $C_Y(h)$ и значением стандартной нормальной функции распределения [71]:

$$Prob\{Y(x) \leq y_p, Y(x+h) \leq y_p\} = p^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{\arcsin C_Y(h)} \exp\left(-\frac{y_p^2}{1 + \sin\theta}\right) d\theta$$

где $y_p = G^{-1}(p)$ – стандартная нормальная p -квантиль а $C_Y(h)$ – коррелограмма стандартной нормальной случайной функции $Y(x)$.

Бинормальная вероятность является нецентральной индикаторной ковариацией для порога y_p :

$$Prob\{Y(x) \leq y_p, Y(x+h) \leq y_p\} = E\{I(x, p) \cdot I(x+h, p)\} = p - \gamma(h, p)$$

где $I(x, p) = 1$, если $Y(x) \leq y_p$, $= 0$, в противном случае. $\gamma(h, p)$ – индикаторная полу-вариограмма для p -квантили отсечения y_p .

Вариография нормальных переменных. Следующим шагом является построение вариограммы для нормальных (normal score) значений переменной и ее моделирование. Эта задача достаточно просто решается при наличии хорошей программы моделирования вариограмм и достаточного количества измерений переменной.

Приведенный ниже алгоритм стохастического моделирования (пункты 4-8) повторяется для построения каждой новой стохастической реализации.

Эффект экранирования. Алгоритм последовательного моделирования основывается на эффекте экранирования [92]. Эффект экранирования состоит в уменьшении веса точек, попадающих между одной из точек измерения и точкой оценивания, что может привести к появлению отрицательных весов. На практике не обязательно использовать все существующие значения измерений для построения условного распределения в точке оценивания. Необходимо ограничить используемые условные измерения окрестностью точки оценивания. Практические испытания показали, что хороших результатов можно добиться при использовании 16 наиболее близких значений, или по 2 из каждой октанты при поиске соседей по октантам [92].

Выбор последовательности оценивания точек. По теории используется любой путь от одной точки оценивания к другой. На практике случайный путь предпочтительнее регулярного, так как он позволяет избежать возможного распространения артефактов в результатах. Как следствие, невозможно ускорить моделирование из-за нерегулярности в конфигурации условных значений. Расчет условных векторов и матриц из уравнений (2.1), (2.2), (2.3) повторяется в каждой новой точке оценивания. Однако, возможно получить несколько реализаций “по цене одной”, если выбран один и тот же случайный путь и если различные наборы случайных чисел используются в уравнениях (2.2) или (2.3).

Если моделирование проводится на регулярной сетке, то имеет преимущества концепция “промежуточных” сеток, в частности, при воспроизводстве вариограммных структур с очень длинными радиусами. При таком подходе каждая сетка дополняется следующей, причем последней является сеть, на которой проводится моделирование. Моделирование начинается с самой грубой сетки, и продолжается пока не моделируется самая мелкая сетка. В каждой из сеток выбирается случайный путь следования от узла к узлу. Количество промежуточных сеток зависит от радиусов вариограмм и от конечного размера ячеек сетки. Преимуществами такой схемы является более высокая скорость и меньший объем требуемой памяти. Программа может быть оптимизирована в блоках поиска соседей, построения ковариационных матриц, и т. д. Другим преимуществом является большая стабильность моделирования и получаемых симуляций – после моделирования одной сетки

условные значения (по крайней мере промоделированные) располагаются регулярно, что предотвращает возможную сильную кластеризацию.

Простой кригинг. В каждой точке оценивания решается система уравнений простого кригинга с использованием соседей из выбранной окрестности. При этом учитываются как измерения, так и уже промоделированные в предыдущих точках значения. Оценка простого кригинга для случая имеет следующий вид [158]:

$$Y_{SK}^*(x) - m = \sum_{\alpha=1}^{n(x)} \lambda_{\alpha}^{SK}(x)(Y(x_{\alpha}) - m)$$

где $Y_{SK}^*(x)$ – оценка простого кригинга основной переменной z в точке x .

Веса простого кригинга вычисляются из следующей системы уравнений [11]:

$$\begin{cases} \sum_{\beta_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\beta_1}^{SK}(x) \cdot C_{11}(x_{\alpha_1} - x_{\beta_1}) + \sum_{\beta_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\beta_2}^{SK}(x) \cdot C_{12}(x_{\alpha_1} - x_{\beta_2}) = C_{11}(x_{\alpha_1} - x), \alpha_1 = 1, \dots, n_1(x) \\ \sum_{\beta_1=1}^{n_1(x)} \lambda_{\beta_1}^{SK}(x) \cdot C_{21}(x_{\alpha_2} - x_{\beta_1}) + \sum_{\beta_2=1}^{n_2(x)} \lambda_{\beta_2}^{SK}(x) \cdot C_{22}(x_{\alpha_2} - x_{\beta_2}) = C_{21}(x_{\alpha_2} - x), \alpha_2 = 1, \dots, n_2(x) \end{cases}$$

где $C_{ij}(h)$ – соответствующие ковариации переменной u для $h=x_i-x_j$:

$$C_R(h) = E\{R(x) \cdot R(x+h)\} = E\{(Y(x) - m) \cdot (Y(x) - m)\} = C(h)$$

Вариация простого кокригинга вычисляется следующим образом:

$$\sigma_{SK}^2(x) = C(0) - \sum_{\alpha=1}^{n(x)} \lambda_{\alpha}^{SK}(x) \cdot C(x_{\alpha} - x)$$

Построение нормальной функции распределения. Нормальная функция распределения строится в каждой точке оценивания на основе среднего значения и стандартного отклонения, в качестве которых берутся оценка $Y_{SK}^*(x)$ и ошибка оценки σ_{SK} простого кокригинга в данной точке, полученные в пункте 6.

Выбор значения из функции распределения. Промоделированное значение в точке выбирается случайным образом из построенной функции распределения [158]:

$$Y(x) = Y_{SK}^*(x) + E(x)$$

где компонента ошибки $E(x)$ независима от $Y_{SK}^*(x)$, $E\{E(x)\}=0$ и $Var\{E(x)\}=\sigma_{SK}^2$.

Далее оно добавляется в набор данных для участия в последующих оценках.

Обратное преобразование. После прохода через все точки оценивания полученные нормальные значения оценок $\{y(x), x \in A\}$ преобразуются обратно в абсолютные значения исходной функции: $\{z(x)=\phi^{-1}(y(x)), x \in A\}$.

2.2.3 Особенности и преимущества метода

Если модель согласуется с данными, то последовательные Гауссовы симуляции воспроизводят следующий набор переменных:

- стандартное нормальное распределение для преобразованной переменной;
- вариограммы преобразованных переменных;

- значения преобразованных переменных в точках измерений.

При обратном преобразовании промоделированных значений воспроизводятся распределения и измерения исходной переменной. Это также предполагает воспроизводство вариограмм исходной переменной, которые не были построены.

Метод последовательного Гауссова моделирования имеет ряд преимуществ, наиболее явные из которых простота и универсальность. Простота метода основана на понятиях вариограммы и стохастического моделирования и может быть кратко изложена в этих терминах. Универсальность метода важна при его приложении к различным типам задач.

Метод является интеграционным. Для введения анизотропии, усиления условности или моделирования на нерегулярных сетках не требуется никаких специальных модернизаций. Вычислительные преимущества моделирования на регулярных сетках оставляют в стороне моделирование на нерегулярных сетках, в особенности при неизменной поддержке (support) промоделированных значений.

Между применением метода в двумерном и трехмерном случаях не существует принципиальной разницы. Это остается верным и при недостатке информации по одной из переменных в одном из направлений. Вариограмма, являясь в большой степени интуитивным инструментом, может быть промоделирована при недостатке информации на основе личной экспертизы.

У метода существует ряд ограничений. Во-первых, предположение о стационарности. Эта проблема может быть решена путем разбиения области на зоны стационарности. Как это упоминалось выше, пространственный тренд может быть предварительно выделен из данных, рассмотрен отдельно и добавлен обратно после моделирования. Являясь принятой аппроксимацией, такой подход может быть неприемлем при зависимости между трендами коррелированных переменных. В некоторых случаях очевидный тренд может быть сохранен при наличии достаточного количества условных данных.

Вторым ограничением является гипотеза о мультинормальности. В случае неприемлемости мультинормальной гипотезы отдается предпочтение другим непараметрическим моделям, например Марковскими-Баесовским индикаторным симуляциям.

Третьим ограничением является экраный эффект (screen effect). Может оказаться, что он не достаточно хорош, что, однако, случается не слишком часто.

Пример стохастического моделирования радиоактивного загрязнения почвы ^{137}Cs

Данные по загрязнению почвы ^{137}Cs , выбранные для примера исследования, прежде всего были подвергнуты нормальному преобразованию. Полученное в результате распределение нормальных значений приведено в виде гистограммы на Рис. 1. Итоговая статистика нормализованных значений приведена в Таблице 1.

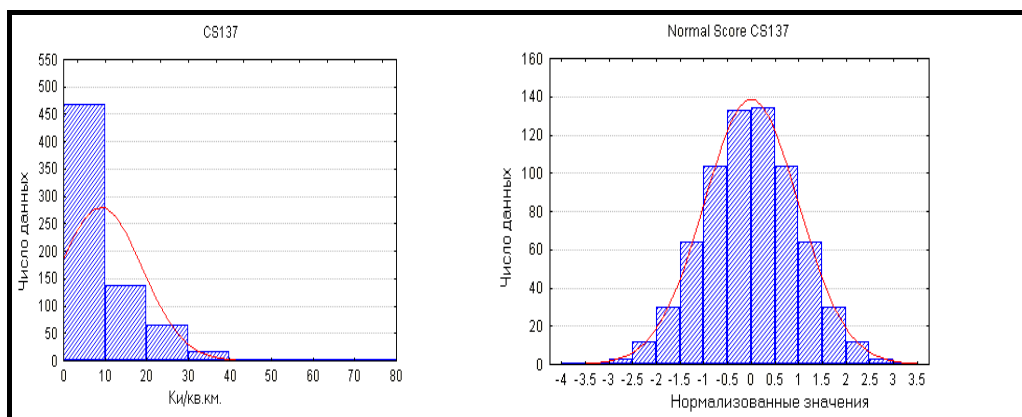


Рис. 1. Гистограммы для ^{137}Cs : измерения (слева), преобразованные нормальные значения (справа).

Пространственный структурный анализ (вариография) был проведен для нормализованных значений ^{137}Cs . Вариограммы по направлениям имеют стационарный характер (см. Рис. 2). При этом была обнаружена сильная зональная анизотропия (см. вариограммные розу и поверхность на Рис. 3, 4).

Таблица 1. Итоговая статистика для нормализованных значений ^{137}Cs .

Статистика	Нормализованные значения ^{137}Cs
Среднее значение	0.00001
Вариация	0.9996
Стандартное отклонение	0.9998
Коэффициент симметрии	0.0001
Экссесс	-0.0454
Минимум	-3.1867
Нижняя квартиль (25%)	-0.6711
Медиана	0.0
Верхняя квартиль (75%)	0.6711
Максимум	3.1885

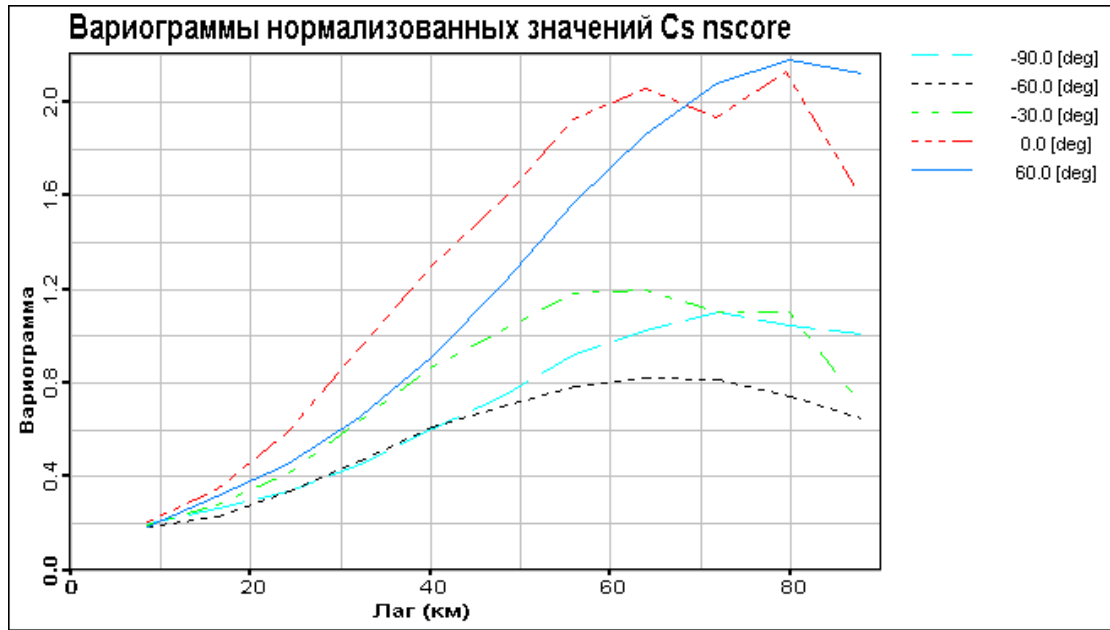


Рис. 2. Экспериментальные вариограммы в разных направлениях для нормализованных значений ^{137}Cs .



Рис. 3. Изолинии вариограммы для нормализованных значений ^{137}Cs .

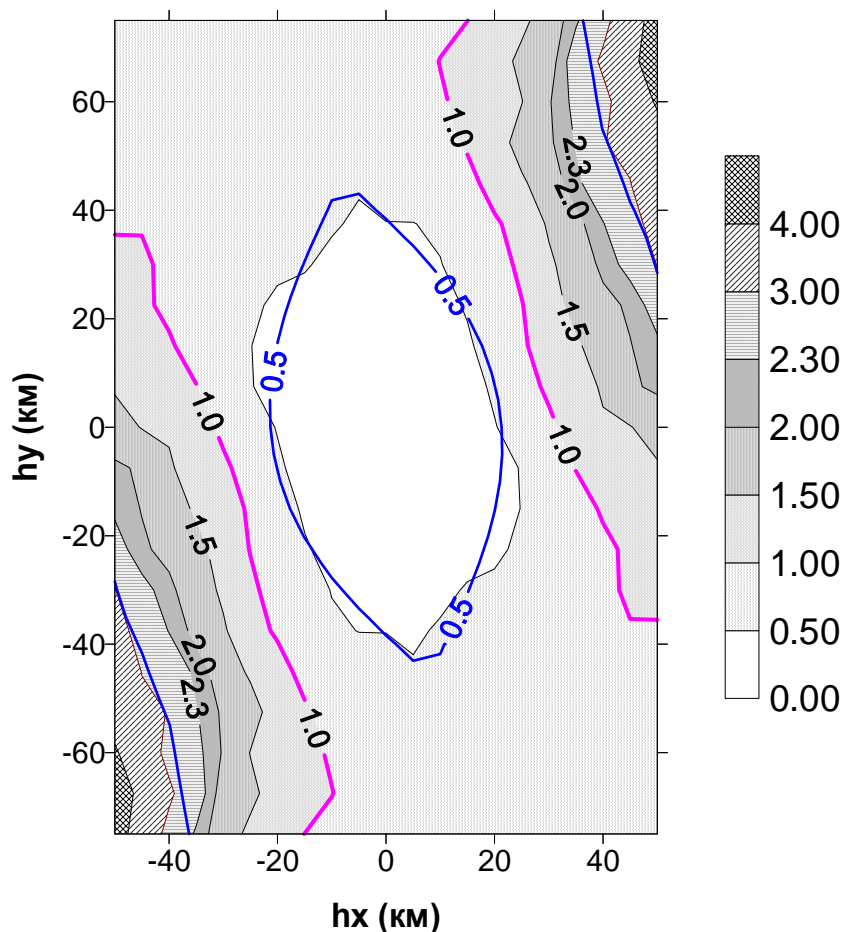


Рис. 4. Изолинии экспериментальной вариограммы (штриховка) и ее модели (толстые сплошные линии) для нормализованных значений ^{137}Cs .

Метод последовательного Гауссового моделирования бы применен к данным с использованием подобранной анизотропной модели вариограмм. Было получено 50 равновероятных реализаций пространственного распределения ^{137}Cs . Примеры двух реализаций приведены на рисунке 5. Из них видно, что полученные распределения не являются сглаженными, как в случае интерполяции/оценки. Все реализации сохраняют одномерное распределение (гистограммы) и пространственную корреляционную структуру исходных данных. Гистограмма промоделированных значений приведена на Рис. 6. Итоговая статистика реализаций и исходных данных собрана в Таблице 2.

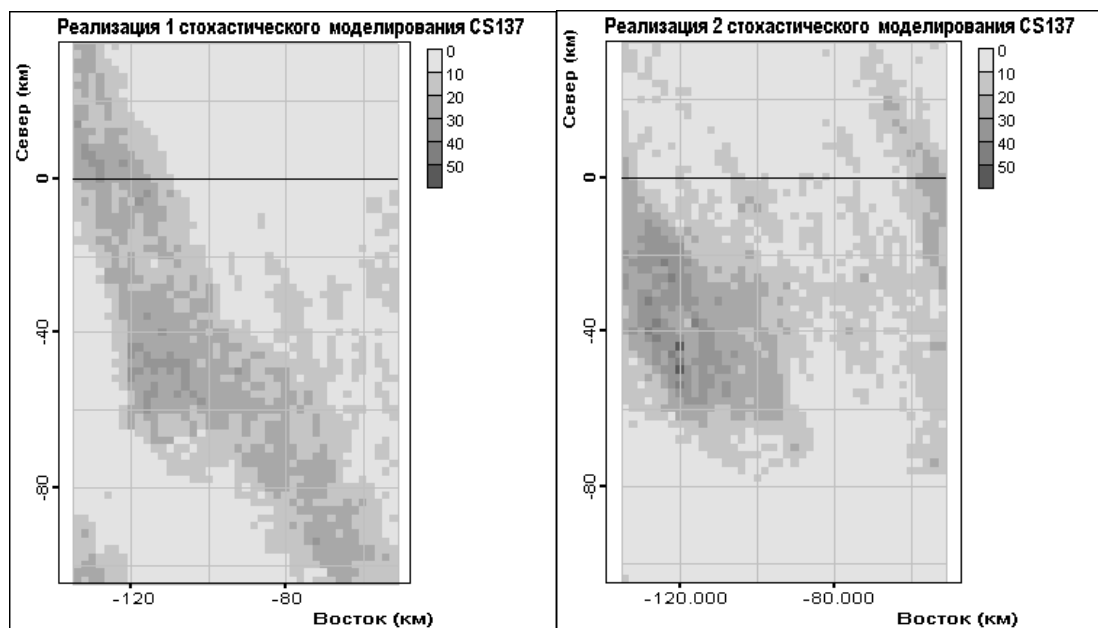


Рис. 5. Пример двух реализаций стохастического моделирования ^{137}Cs (Ки/кв.км).

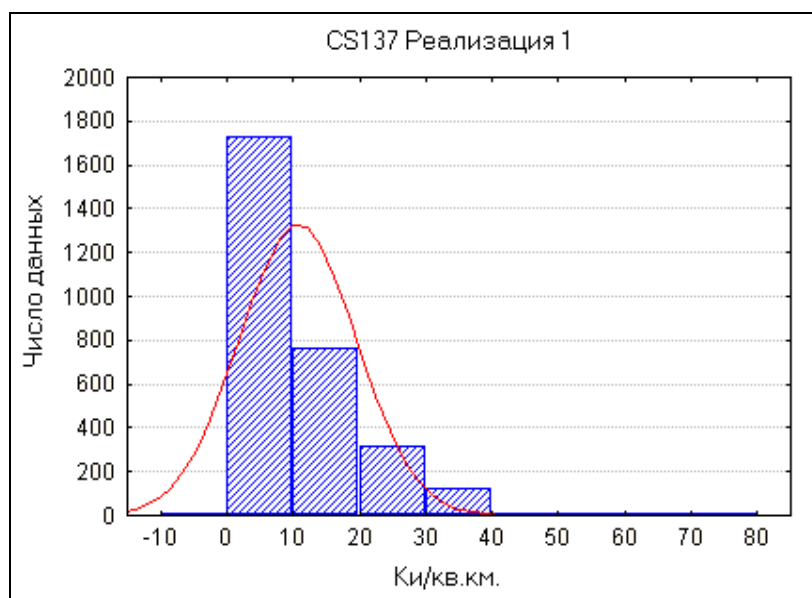


Рис. 6. Гистограмма промоделированных значения ^{137}Cs , реализация 1.

Таблица 2. Итоговая статистика ^{137}Cs смоделированных реализаций и исходных данных.

Статистика	^{137}CS		
	Реализация 1	Реализация 2	измерения
Среднее значение	10.761	10.688	8.9907
Вариация	70.053	77.747	97.637

Стандартное отклонение	8.3698	8.8174	9.8811
Коэффициент симметрии	6.7265	1.3848	2.7156
Эксцесс	-0.55401	2.2615	13.956
Минимум	0.13	0.13	0.03
Нижняя квартиль (25%)	3.8325	4.3823	2.09
Медиана	8.6326	8.564	6.1
Верхняя квартиль (75%)	16.636	14.133	12.74
Максимум	39.828	70.075	97.470

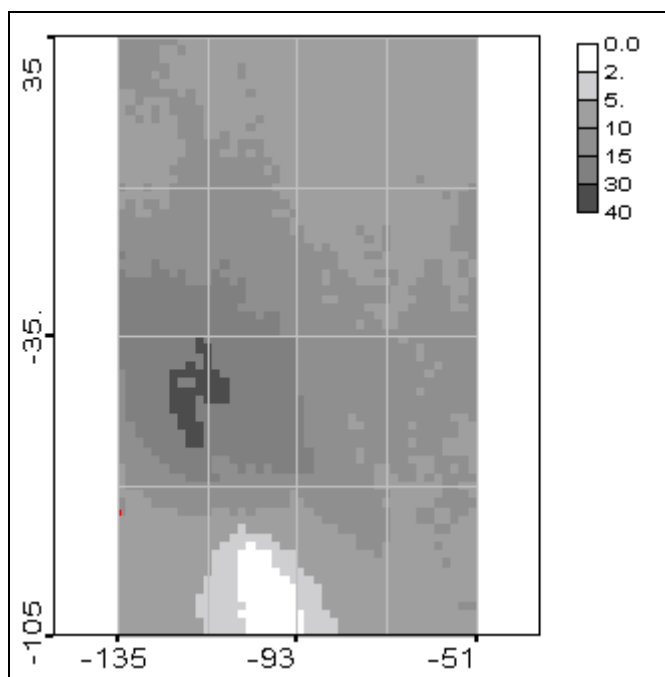


Рис. 7. Средняя оценка (E-типа) (E-type) стохастического моделирования ^{137}Cs (Ки/кв.км).

На основе полученных 50-ти реализаций путем их обработки были получены карты оценок для поддержки принятия решений. Набор промоделированных значений в каждой узле сетки оценивания дает локальное распределение. Среднее значение по всем реализациям дает оценку E-типа (E-type)(см. Рис. 7), которую можно сравнивать с оценками, полученными методами интерполяции или кригинга. На основе локальных функций распределения были построены оценки вероятности превышения заданных уровней: 5, 10, 15, 20 Ки/кв.км. (см. Рис. 8). Аналогично получены оценки с заданной вероятностью превышения 10%, 50% и 90% (которые могут быть превышены истинными значениями с заданной вероятностью) (см. Рис. 9).

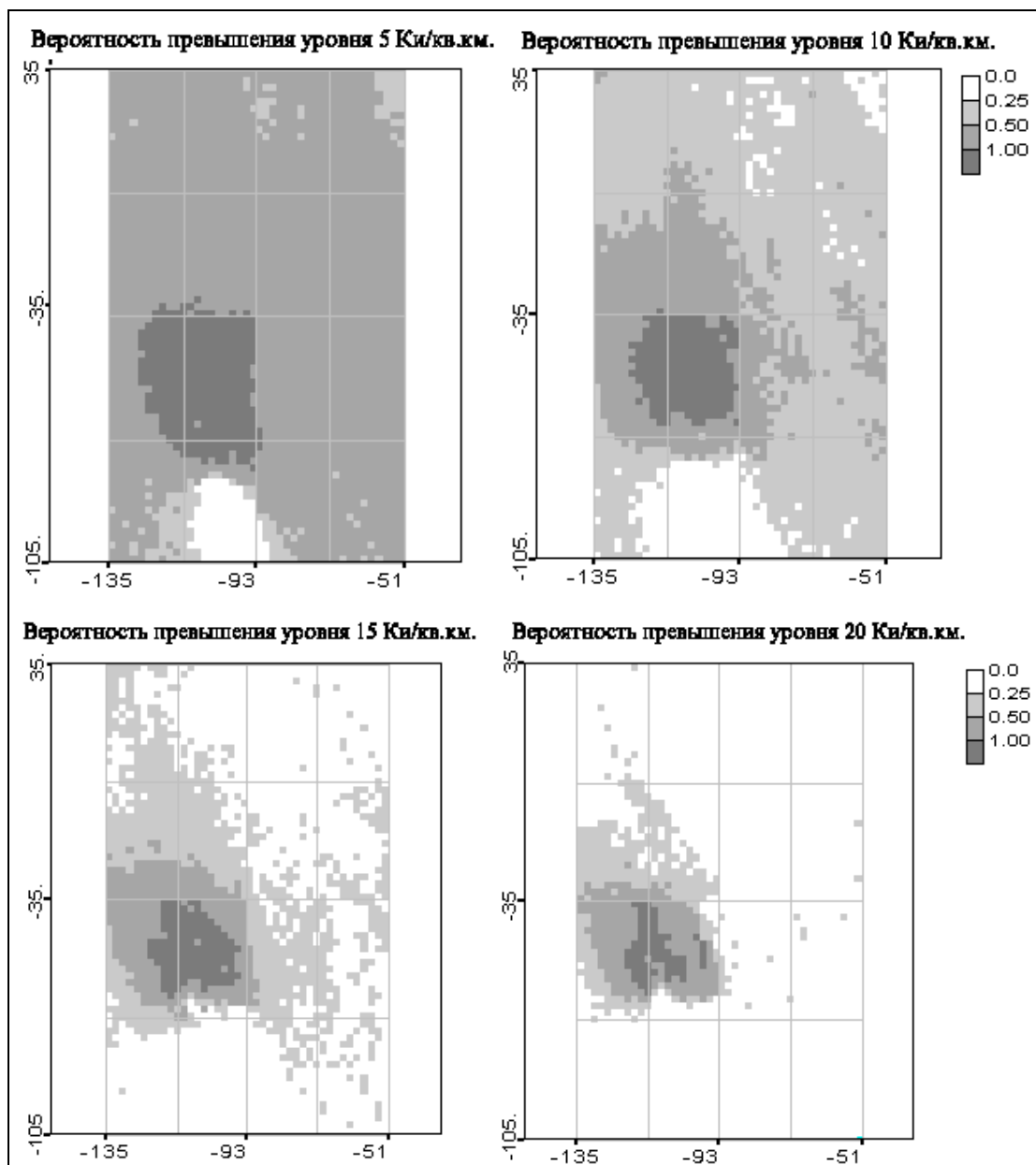


Рис. 8. Оценки вероятности превышения уровней значений загрязнения ^{137}Cs : 5, 10, 15, 20 Ки/кв.км.



Рис. 9. Оценки ^{137}Cs (Ки/кв.км) с заданной вероятностью превышения: 10%, 50% и 90%.

Заключение

Стохастическое моделирование является альтернативным подходом по отношению к пространственным интерполяциям. Оно позволяет получить не единственное значение оценки в точке, что позволяет описать ее неопределенность. Стохастическое моделирование, в отличие от интерполяции не сглаживает исходные данные и позволяет охарактеризовать пространственную вариабельность распределения. Важным практическим результатом стохастического моделирования являются карты оценок вероятности превышения заданных уровней вмешательства и карты оценок с заданной вероятностью превышения.

Литература

1. F.Alabert (1987). The Practice of Fast Conditional Simulations Through the LU Decomposition of the Covariance Matrix. *Mathematical Geology*. vol. 19, No.5, pp.369-386.
2. N. Cressie. *Statistics for Spatial Data*. John Wiley & Sons, N.Y. 1991.
3. C. Deutsch, A.G. Journel. *GSLIB, Geostatistical Software Library and User's Guide*. Oxford University Press. 1992.
4. C.Daly, and G.W. Verly. (1994). *Geostatistics and Data Integration*. In: *Geostatistics For the Next Century* (Ed.: R. Dimitrakopoulos), Kluwer Academic Publishers, pp. 94-107.
5. Goovaerts P. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, 1997.
6. A.G. Journel, C.J. Huijbregts, *Mining Geostatistics*, London, Academic Press, 1978.

7. A.G.Journel, and F.Alabert. (1989). Non-Gaussian data expansion in the Earth Sciences. TERRA Nova, 1, pp. 123-143.
8. Journel A.G., Resampling from stochastic simulations. Environmental and Ecological Statistics, 1, 63-91, 1994.
9. M. Kanevsky, R. Arutyunyan, L. Bolshov, S. Chernov, V. Demyanov, I. Linge, N. Koptelova, E. Savelieva, T. Haas, M. Maignan. Chernobyl Fallouts: Review of Advanced Spatial Data Analysis. geoENV I – Geostatistics for Environmental Applications, ed. A. Soares, J. Gomez-Hernandes, R. Froidvaux, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 389-400.
10. M. Kanevsky, Arutyunyan R., Bolshov L., Demyanov V., Linge I., Savelieva E., Shershakov V., Haas T., Maignan M. Geostatistical Portrayal of the Chernobyl Fallout. Geostatistics Wollongong '96, ed. E.Y. Baafi, N.A. Schofield, Kluwer Academic Publishers, 1996, volume 2, pp.1043-1054.
11. М. Каневский, В. Демьянов. Непараметрическая геостатистика, стохастическое моделирование и анализ радиоэкологических данных. Препринт NSI-10-95, Москва, 1995.
12. Каневский М.Ф. Стохастическое моделирование пространственной вариабельности Чернобыльских выпадений. Известия РАН. Энергетика, вып.3, 1995, с. 47-55.
13. Kanevsky M. Chernobyl Fallout: Stochastic Simulation of Spatial Variability and Probabilistic Mapping. Preprint ИБРАЭ, NSI-23-94. Moscow, 1994.