УДК 528.3 **Украина**

Предприятие «Геоинформцентр»

76000, г. Ивано-Франковск, ул. Сахарова, 26/5, тел. (03422) 27331, 23783; E – mail: rostok@itc.if.ua

ОТЧЁТ

по научно – исследовательской работе «Системы геодезических координат и их преобразование»

Руководитель НИР
Кандидат техн. наук, проф. **Р. Г. Пилипюк**

Ведущий инженер **Р. Р. Пилипюк**

2002г.

Реферат

Отчет о научно – исследовательской работе: 48 стр., 1 рис., 2 табл., 16 источников.

Объект исследования – системы координат, используемые в геодезии для определения местоположения.

Цель исследования – разработка алгоритмов, устанавливающих связь между системами координат и позволяющих осуществлять преобразование координат из одной системы в другую.

С введением в геодезическую практику навигационных спутниковых систем определения местоположения появилась возможность определять координаты точек земной поверхности в общеземной системе пространственных координат. В то же время, карты земной поверхности составляются в различных картографических проекциях, использующих, как правило, системы плоских прямоугольных координат для отображения объектов местности.

Установлена возможность перевычислений координат из одной системы в другую, разработаны алгоритмы таких перевычислений.

Результаты НИР могут быть использованы на производстве при определении точек местоположения точек земной поверхности.

Ключевые слова: Эллипсоид, референц – эллипсоид, *WGS* (World Geodetic System), *GRS* (Geodetic Reference System).

С о д е р ж а н и е

Техническое задание

1. **Цель работы:** Разработка алгоритма перевычисления координат из системы зональных прямоугольных координат *X, Y* Гаусса – Крюгера и геодезических координат *B, L, H* отнесенных к референц-эллипсоиду Ф. Н. Красовского к системе международных координат, отнесенных к эллипсоиду *WGS-84*.
2. **Обоснование для выполнения работы:** Заказ ОАО «Центральная геофизическая экспедиция» г. Москва.
3. **Характеристика заказа:** Создание алгоритма, позволяющего перевычислять координаты в систему, отнесенную к международному эллипсоиду и в системы координат других стран.
4. **Исходные данные:** Для апробации алгоритма задаются точки земной поверхности с известными исходными координатами. Перечень точек прилагается отдельно.
5. Этапы работ:

5.1 Разработка алгоритма

5.2 Проверка работы алгоритма

5.3 Оформления отчета и сдача работы.

6. Срок выполнения работы: До 31.04.2002г.
7. Обязанности сторон:

Заказчик обеспечивает исполнителя необходимыми данными для проверки работы разработанного алгоритма.

Исполнитель обязуется:

- выполнить работу в обусловленный срок;
- описание алгоритма
- указать возможности его использования.

8. **Оплата выполненной работы:** Работа оплачивается в соответствии с договоренностью сторон и предоплатой в размере 25% от оговоренной стоимости.

9. Обязанности сторон:

Заказчик обязан предоставить в срок необходимые исходные данные для решения задачи и оплатить в пределах оговоренной стоимости все работы. Исполнитель обязуется в оговоренный срок представить заказчику в виде отчета, разработанный алгоритм с необходимыми объяснениями.

Исполнитель	Заказчик
___________ Пилипюк Р. Г.	**Генеральный директор ОАО «ЦГЭ»**
	_______________ Кашик А. С.
«___» _____________2002г.	**«____»_____________2002г.**

ВВЕДЕНИЕ

С начала 90 – х годов XX столетия в мировую практику определения местоположения все больше входят навигационные системы, базирующиеся на использовании спутников в качестве носителей координат.

Использование в практике современных спутниковых технологий определения местоположения имеет ряд преимуществ, среди которых наиболее важными являются: определение общеземных координат произвольной точки пространства вне ее связи с другими точками земной поверхности или пространства; возможность изучения топографии и гидрографии Земли, исследования океанической поверхности и ее изменений; возможность уверенно анализировать гравитационное поле Земли, определять движения земной коры.

Вместе с тем практика внедрения современных спутниковых технологий показала, что их эффективное использование во многих случаях невозможно из – за несовпадения спутниковых и картографических координатных систем. Многие страны мира для целей картографирования своих территорий используют как различные референц – эллипсоиды, так и различные картографические проекции, среди которых наибольшее распространение получили проекция Гаусса – Крюгера, конформная поперечно – цилиндрическая проекция Меркатора (UTM), коническая равноугольная проекция Ламберта и ряды других.

Параметры референц – эллипсоидов, что используются для картографирования в этих проекциях, их ориентирование, как правило отличаются от параметров общего земного эллипсоида *WGS* (World Geodetic System), используемый навигационной системой *GPS* в качестве базового для спутниковой координатной системы.

На это обстоятельство обращает внимание международные организации, которые на проведенных Генеральных ассамблеях Еврогеографике в1999г. (Франция) и в 2000г. (Ирландия) рекомендуют членам Евросоюза и другим странам определится с использованием исходных геодезических данных как для получения пространственной информации о местности, так и по использованию картографических проекций.

Настоящее исследование и ставит задачей установление функциональной зависимости между координатными системами различных референц – эллипсоидов, разработку алгоритмов перевычисления координат из одной системы в другую разработку алгоритмов связи между системами картографических и референцных координат точек.

1. ЗЕМНОЙ ЭЛЛИПСОИД И ЕГО ПАРАМЕТРЫ

Местоположение точек на земной поверхности в настоящее время, в основном, определяется с помощью глобальной системы определения местоположения GPS, которая использует в качестве базового эллипсоида систему WGS – 84 (World Geodetic System). Для картографирования земной поверхности в общемировом масштабе с конца XX столетия используется общеземной эллипсоид GRS – 80 (Geodetic Reference System), параметры которого близки к эллипсоиду системы WGS – 84.

Для картографирования отдельных регионов земной поверхности используются эллипсоиды с иными параметрами, отличающимися от эллипсоидов WGS – 84 и GRS – 80, приспособленные для лучшего отображения на своей поверхности этих регионов. Наиболее часто в практике используются референц-эллипсоиды Красовского, Бесселя, Кларка [4, 5, 11].

Основные параметры этих эллипсоидов приведены в таблице 1.

Таблица 1 Параметры эллипсоидов

№№ п/п	Название эллипсоида	Экваториальный радиус	Полярное сжатие
1	WGS – 84	6 378 137	1/298.257223563
2	GRS – 80	6 378 137	1/298.257222101
3	Красовского (1940)	6 378 245	1/298.3
4	Кларка (1880)	6 378 249.145	1/298.465
5	Бесселя (1841)	6 377 397.155	1/299.1528128
6	Южноамериканский (1969)	6 378 160	1/298.25

В последние десятилетие в геодезической практике отдельных государств и на отдельных континентах получили распространение следующие референцные системы координат [6]:

- ITRS – земная международная референцная система;

- ETRS – 89 – земная европейская референцная система 1989г.;
- ПЗ – 90 – геоцентрическая система координат1990г.;
- СК – 95 – единая государственная система геодезических координат Российской федерации 1995г.;
- СК – ГК – геоцентрическая система координат на эллипсоиде Красовского;
- СК – 42М – модернизированная система координат 1942г.

Системы координат ITRS и ETRS используют в качестве исходного эллипсоид GRS – 80 (табл. 1). Для системы координат ПЗ – 90 исходным эллипсоидом принят эллипсоид с параметрами:

большая полуось, ***a = 6 378 136м.,***

сжатие α ***= 1:298,257839303,***

начальный меридиан проходит через Гринвич. Система координат ПЗ – 90 является геоцентрической, пространственно прямоугольной и служит координатной системой навигационной системы ГЛОНАСС (Российской Федерации). В этой системе начало координат совпадает с центром масс Земли, ось z направлена в Условный полюс Земли, как это рекомендуется Международной службой вращения Земли, ось $\boldsymbol{X}$ – в точку пересечения плоскости экватора с начальным (нулевым) меридианом, а ось $\boldsymbol{Y}$ дополняет данную систему до правой.

Единая государственная система геодезических координат СК – 95 (Российская Федерация) создана так, что ее координатные оси параллельны осям пространственной системы координат ПЗ – 90. Поверхностью относимости в СК – 95 принят эллипсоид Красовского, параметры которого приведены в таблице 1. Эта же система рекомендуется в качестве референцной системы для стран СНГ.

Геоцентрическая система геодезических координат СК – ГК базируется на параметрах эллипсоида Красовского (табл. 1), но с учетом таких требований:

1) геометрический центр эллипсоида совмещается с началом координат общеземной системы ITRS, т. е. с центром масс Земли;
2) большая полуось эллипсоида ориентирована по направлению большой полуоси системы, ITRS, т. е. по направлению оси ***X*** общеземной системы;
3) малая полуось эллипсоида системы СК – ГК совпадают с малой полуосью эллипсоида системы ITRS, т. е. направлена по оси ***Z*** общеземной системы.

Система координат СК – 42М соответствует основным принципам системы координат 1942г., базирующейся на эллипсоиде Красовского, как отсчетной поверхности. Модернизация системы СК – 42 состоит в использовании спутниковых радионавигационных наблюдений для уточнения референцной системы.

Для определения координат пунктов на поверхности эллипсоида, решения задач на его поверхности используются и другие параметры, характеризующие его поверхность.

Приведем формулы, используемые для вычислений этих параметров.

1) Первый эксцентриситет эллипсоида

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \tag{1.1}$$

2) Второй эксцентриситет эллипсоида

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}; \tag{1.2}$$

где a – экваториальная, а b – полярная полуось эллипсоида.

3) Полярное сжатие

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \tag{1.3}$$

4) Главные радиусы кривизны в точке исследования:

а) меридиана $M = \dfrac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 \sin^2 B\right)^{3/2}}$, (1.4)

б) первого вертикала $N = \dfrac{a}{\left(1-e^2 \sin^2 B\right)^{1/2}}$; (1.5)

где B – геодезическая широта точки.

5) Вспомогательные величины:

$$n = \frac{a-b}{a+b}, \tag{1.6}$$

$$m = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \tag{1.7}$$

$$c = \frac{a^2}{b}. \tag{1.8}$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Системой отсчета, в которой обрабатываются результаты GPS – наблюдений является Всемирная геодезическая референцная система 1984г. – WGS – 84. Именно в этой системе определяются координаты наземных пунктов за результатами обработки GPS – наблюдений. Использование этих координат ограничено в связи с тем, что все топографические материалы создаются в локальных системах координат, связанных с определенным референц – эллипсоидом.

Рассмотрим алгоритмы преобразования координат, наиболее употребляемые в практике.

2.1. Преобразование координат *X, Y, Z* пространственной прямоугольной системы WGS в геодезические координаты (*B, L, H*) этого же эллипсоида.

Известна [4] зависимость между пространственными прямоугольными и геодезическими координатами

$$\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L, \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L, \\ Z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N+H\right)\sin B, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где H – геодезическая высота пункта наблюдения.

Пусть известными величинами будут координаты (X, Y, Z). На основании (2.1) алгоритм вычислений геодезических координат итерационным методом будет таким [3, 7, 9]:

1) Определяем вспомогательную величину:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2}; \tag{2.2}$$

2) Вычисляем значение геодезической широты B_0 в первом приближении по формуле:

$$tgB_{0_{WGS}} = \frac{Z}{P}\left(1 - e^2\right)^{-1}; \tag{2.2}$$

3) Определяем в первом приближение радиус кривизны первого вертикала эллипсоида:

$$N_{0_{WGS}} = \frac{a^2}{\left(a^2 \cos^2 B_0 + b^2 \sin^2 B_0\right)^{1/2}}; \tag{2.3}$$

4) Вычисляют в первом приближении геодезическую высоту H_0. Имеем:

$$H_{0_{WGS}} = \frac{P}{\cos B_0} - N_0; \tag{2.4}$$

5) Уточняем значения геодезической широты:

$$tgB_{WGS} = \frac{Z}{P}\left(1 - e^2 \frac{N_0}{N_0 + H}\right)^{-1}; \tag{2.5}$$

Если $B_{WGS} = B_{0\ WGS}$ то процесс итерации окончен. Если $B_{WGS} \neq B_{0\ WGS}$, то принимаем $B_{0\ WGS} = B_{\ WGS}$ и продолжаем вычисления с шага 3.

6) Определяем:

$$tgL_{WGS} = \frac{Y}{X}. \tag{2.6}$$

В результате определяем *B, L, H*, относящиеся к эллипсоиду WGS – 84.

2.2 Преобразование геодезических координат *B, L, H*, отнесенных к общеземному эллипсоиду WGS – 84, в геодезические координаты *B, L, H*, отнесенные к произвольному референц – эллипсоиду

Перевычисление геодезических координат, вычисленных с использованием параметров эллипсоида WGS – 84, в геодезические координаты, определяемые на произвольном референц-эллипсоиде RGS, выполняется на основании общеизвестных зависимостей:

$$\begin{aligned} B_{RGS} &= B_{WGS} + \Delta B, \\ L_{RGS} &= L_{WGS} + \Delta L, \\ H_{RGS} &= H_{WGS} + \Delta H. \end{aligned} \tag{2.7}$$

где B_{RGS}, L_{RGS}, H_{RGS} – геодезические широты, долготы и высоты в произвольной референцной геодезической системе координат *RGS*.

Приращения координат ΔB, ΔL, ΔH определяют на основании дифференциальных формул для системы геодезических координат [9], которые запишутся так:

$$\Delta B'' = \frac{\rho''}{M+H}\left[\frac{N}{a}e^2 \sin B \cos B \Delta a + \left(\frac{N^2}{a^2}+1\right)N \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\sin B + \Delta z \cos B\right] -$$

$$- \omega_x \sin L\left(1 + e^2 \cos 2B\right) + \omega_y \cos L\left(1 + e^2 \cos 2B\right) - \rho'' m e^2 \sin B \cos B, \tag{2.8}$$

$$\Delta L'' = \frac{\rho''}{(N+H)\cos B}(-\Delta x \sin L + \Delta y \cos L) + tgB(1-e^2)(\omega_x \cos L + \omega_y \sin L) - \omega_z. \qquad (2.9)$$

$$\Delta H = -\frac{a}{N}\Delta a + N\sin^2 B\frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta x \cos L + \Delta y \sin L)\cos B + \Delta z \sin B - Ne^2 \sin B \cos B\left(\frac{\omega_x}{\rho''}\sin L - \frac{\omega_y}{\rho''}\cos L\right) +$$

$$+\left(\frac{a^2}{N} + H\right)m. \qquad (2.10)$$

В формулах (2.8), (2.9), (2.10) радиусы кривизны меридиана M и первого вертикала N вычисляют по (1.4) и (1.5), первый эксцентриситет e^2 – по (1.1).

Приращения параметров эллипсоида определяют из выражений:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_{RGS} - a_{WGS}, \\ \Delta e^2 &= e^2_{RGS} - e^2_{WGS}. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Элементы преобразования Δx, Δy, Δz - характеризуют смещение начала координат референцной системы *RGS* относительно начала геоцентрических координат *WGS – 84*, а угловые элементы ω_x, ω_y, ω_z - характеризуют поворот локальных координатных систем относительно осей координат системы *WGS – 84*; m – масштабный коэффициент, характеризующей изменение масштаба при переходе от одной системы координат к другой.

При переходе от системы геоцентрических координат *WGS – 84* к референцным системам координат, все элементы формул (2.8 – 2.10) вычисляются по геодезическим координатам *B, L, H*, отнесенным к системе *WGS – 84*. Формулы (2.8 – 2.10) можно использовать и для обратного перехода от геодезических координат, вычисленных в референцной системе *RGS*, в геодезические координаты системы *WGS – 84*. В этом случае элементы формул (2.8 – 2.10) вычисляются по геодезическим координатам в системе *RGS*, и полученные приращения координат используют для вычисления соответствующих геоцентрических координат по формулам (2.7).

Рассмотрим методику определения элементов взаимного ориентирования эллипсоидов *WGS – 84* и *RGS* (Reference Geodetic System).

2. 3 Алгоритм определения элементов взаимного ориентирования двух эллипсоидов с помощью геодезических координат и высот общих пунктов

Для осуществления однозначного определения элементов перехода от общеземного эллипсоида *WGS – 84* к локальным эллипсоидам *RGS* необходимо знать семь элементов:

- элементы Δx, Δy, Δz - характеризующие смещение центра эллипсоида *RGS* относительно центра эллипсоида *WGS*;
- элементы ω_x, ω_y, ω_z - характеризующие непаралельность соответствующих координатных осей;
- m – масштабный коэффициент.

Если в процессе перевычислений неизвестными являются и точные значения параметров эллипсоида *RGS* – большая полуось *«а»* и первый эксцентриситет e^2 (сжатие), то необходимо определять дополнительные неизвестные Δa и Δe^2.

Для определения этих неизвестных необходимо иметь не менее трех общих пунктов с известными координатами *B, L, H* как в системе координат *WGS*, так и в системе координат *RGS*.

Каждый общий пункт двух систем координат позволяет составить три линейных уравнения вида (2.8), (2.9), (2.10).

Алгоритм определения элементов ориентирования референц – эллипсоида разработан на основании формул преобразования Гельмерта, описанных в [3, 5, 7, 9, 10, 11].

Пусть известны для общего пункта геодезические координаты и высоты B, L, H – на эллипсоиде WGS и B', L', H' – на эллипсоиде RGS, а также известны параметры этих эллипсоидов (табл. 1).

Рассмотрим алгоритм вычислений.

1) Определяют разности координат и высот пункта

$$\begin{aligned} \Delta B &= B' - B, \\ \Delta L &= L' - L, \\ \Delta H &= H' - H. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2) Определяют приращения параметров эллипсоидов на основании (2.11). Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_{RGS} - a_{WGS}, \\ \Delta e^2 &= e^2_{RGS} - e^2_{WGS}. \end{aligned}$$

В (2.11) e^2 рассчитываем из формул

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \tag{2.13}$$

где a и b – значения большой и малой полуоси соответствующего эллипсоида.

Для определения значения e^2 можно использовать и такую зависимость:

$$e^2 = 2\alpha, \tag{2.14}$$

где α - сжатие соответствующего эллипсоида.

3) На основании (2.8), (2.9), (2.10) составляют систему из трех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y + a_{13}\Delta z + a_{14}\omega_x + a_{15}\omega_y + a_{17}m + l_{11} = 0,\\ &a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y + a_{24}\omega_x + a_{15}\omega_y + a_{16}\omega_z + l_{21} = 0,\\ &a_{31}\Delta x + a_{32}\Delta y + a_{33}\Delta z + a_{34}\omega_x + a_{35}\omega_y + a_{37}m + l_{31} = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

В (2.15) коэффициент a_{ij} и свободные члены l_{in} находят из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = -\rho^{"} \frac{\cos L \sin B}{M+H},\\
&a_{12} = -\rho^{"} \frac{\sin L \sin B}{M+H},\\
&a_{13} = \rho" \frac{\cos B}{M+H},\\
&a_{14} = -\sin L\left(1 + e^2 \cos 2B\right),\\
&a_{15} = \cos L\left(1 + e^2 \cos 2B\right),\\
&a_{16} = 0,\\
&a_{17} = -\rho^{"} e^2 \sin B \cos B,\\
&l_{11} = \rho^{"} \frac{N}{a(M+H)} e^2 \cdot \sin B \cos B \Delta a + \rho^{"}\left(\frac{N^2}{a^2} + 1\right) \cdot \frac{N}{M+H} \cdot \sin B \cos B \frac{\Delta e^2}{2} - \Delta B^{"},\\
&a_{21} = -\rho^{"} \frac{\sin L}{(M+H)\cos B},\\
&a_{22} = \rho^{"} \frac{\cos L}{(M+H)\cos B},\\
&a_{23} = 0,\\
&a_{24} = \left(1 - e^2\right) \cdot tgB \cos L,\\
&a_{25} = \left(1 - e^2\right) \cdot tgB \sin L,\\
&a_{26} = -1,\\
&a_{27} = 0,\\
&l_{21} = -\Delta L^{"},\\
&a_{31} = \cos L \cos B,\\
&a_{32} = \sin L \cos B,\\
&a_{33} = \sin B,\\
&a_{34} = -\frac{Ne^2}{\rho^{"}} \sin L \sin B \cos B,\\
&a_{35} = \frac{e^2 N}{\rho^{"}} \cos L \sin B \cos B,\\
&a_{36} = 0,\\
&a_{37} = \frac{a^2}{N} + H, \qquad (2.16)\\
&l_{31} = -\frac{a}{N}\Delta a + N \sin^2 B \frac{\Delta e^2}{2} - \Delta H.
\end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов a_{ij} и свободных членов l_{in} используются значения геодезических координат пункта в системе координат эллипсоида *WGS*. Через M и N в (2.16) обозначены радиусы кривизны меридиана и первого вертикала эллипсоида *WGS* в точке "n". Для их определения используют формулы (1.4) и (1.5).

$$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}, \tag{2.17}$$

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}. \tag{2.18}$$

Линейные уравнения вида (2.15) составляют для всех общих пунктов двух эллипсоидов. Таких пунктов должно быть не менее трех, что позволяет составить девять линейных уравнений вида (2.15).

4) Совместно решают все линейные уравнения по способу наименьших квадратов под условием

$$\sum VV = \min.$$

Из решения уравнений определяют необходимые неизвестные.

5) Определив неизвестные Δx, Δy, Δz, ω_x, ω_y, ω_z и m приступают к вычислению геодезических координат и высот необходимых пунктов на эллипсоиде *RGS*. Для этого вычисленные элементы сдвига референц – эллипсоида Δx, Δy, Δz, элементы ориентирования ω_x, ω_y, ω_z и масштабный коэффициент m подставляют в формулы (2.8), (2.9) и (2.10) и определяют приращения геодезических координат и высот ΔB, ΔL, ΔH. Координаты пункта и высоты вычисляют затем по формулах (2.7).

2. 4 Алгоритм определения элементов взаимного ориентирования двух эллипсоидов с помощью пространственных прямоугольных координат *X,Y,Z* общих пунктов

Пусть для трех точек земной поверхности известны пространственные координаты X_0, Y_0, Z_0 в системе геоцентрических координат, относящихся к эллипсоиду *WGS – 84*, и для этих же пунктов известны пространственные координаты *X*, *Y*, *Z*, которые определены относительно системы координат *RGS*, центр которой совпадает с центром референц-эллипсоида, ось ***Z*** направлена по его оси вращения, а полность *XOY* совмещена с плоскостью экватора и ось *X* лежит в плоскости начального меридиана.

Если на эллипсоиде *RGS* координаты общих пунктов заданы в геодезической системе координат *B, L, H*, то их перевычисляют в пространственные координаты *X*, *Y*, *Z* с помощью формул (2. 1), с учетом определения *M* и *N* по формулам (1. 4) и (1. 5).

Решение поставленной задачи базируется на уравнении преобразования Гельмерта которое устанавливает связь между двумя системами координат и в матричной форме запишется так [4]:

$$\begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \mu \cdot R' \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}, \qquad (2.17)$$

где *x, y, z* – координаты вектора, который определяет положение центра референцной системы координат относительно центра геоцентрической системы координат *WGS – 84*, R' – трансформированная матрица, характеризующая повороты осей одной системы относительно другой, μ - масштабный множитель.

В большинстве случаев практики углы ω , характеризующие поворот координатных осей небольшие по величине и матрица поворота R запишется так:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Приняв масштабный множитель $\mu = 1 \pm \Delta\mu$, а координаты центра референц-эллипсоида $x = x' + \Delta x$, $y = y' + \Delta y$ и $z = z' + \Delta z$, где x', y', z' – приближенное значение соответствующих координат, записываем на основании (2.17) и (2.18)для отдельно взятой общей точки систему уравнений в линейном виде:

$$\begin{aligned} &(X_i + X_i') - x_{0_i} = \Delta\mu \cdot X_{0_i} + \omega_y \cdot Z_{0_i} - \omega_z \cdot Y_{0_i} - \Delta x_i \\ &(y_i + y_i') - y_{0_i} = \Delta\mu \cdot y_{0_i} - \omega_x \cdot z_{0_i} + \omega_z \cdot x_{0_i} - \Delta y_i \\ &(z_i + z_i') - z_{0_i} = \Delta\mu \cdot z_{0_i} + \omega_x \cdot y_{0_i} - \omega_y \cdot x_{0_i} - \Delta z_i \end{aligned} \tag{2.19}$$

На основании (2.19) алгоритм определения элементов ориентирования и элементов положения референц-эллипсоида, с помощью пространственных прямоугольных координат трех общих точек запишется так. Пусть для общих точек известны координаты $x_{0_i}, y_{0_i}, z_{0_i}$ на общеземном эллипсоиде *WGS – 84*, и для этих же точек известны координаты X_i, Y_i, Z_i - на референц –эллипсоиде. Тогда последовательность вычислений будет такой:

1) Вычисляют приближенные координаты центра референц-эллипсоида

$$x' = \frac{\sum\left(X_i - X_{0_i}\right)}{3},$$
$$y' = \frac{\sum\left(Y_i - Y_{0_i}\right)}{3}, \qquad (2.20)$$
$$z' = \frac{\sum\left(Z_i - Z_{0_i}\right)}{3},$$

где $i = 1, 2, 3$ – номер точки.

2) Определяют значение свободного члена линейных уравнений поправок

$$l_{x_i} = X_{0_i} - \left(X_i + x_i'\right),$$
$$l_{y_i} = Y_{0_i} - \left(Y_i - y_i'\right), \qquad (2.21)$$
$$l_{z_i} = Z_{0_i} - \left(Z_i - z_i'\right).$$

3) Составляют девять уравнений погрешностей для трех общих точек:

$$\begin{aligned}
&\Delta\mu \cdot X_{0_1} + \omega_y \cdot Z_{0_1} - \omega_z \cdot Y_{0_1} - \Delta x + l_{x_1} = v_1,\\
&\Delta\mu \cdot y_{0_1} - \omega_x \cdot z_{0_1} + \omega_z \cdot x_{0_1} - \Delta y + l_{y_1} = v_2,\\
&\Delta\mu \cdot z_{0_1} + \omega_x \cdot y_{0_1} - \omega_y \cdot x_{0_1} - \Delta z + l_{z_1} = v_3,\\
&\Delta\mu \cdot x_{0_2} + \omega_y \cdot z_{0_2} - \omega_z \cdot y_{0_2} - \Delta x + l_{x_2} = v_4,\\
&\Delta\mu \cdot y_{0_2} - \omega_x \cdot z_{0_2} + \omega_z \cdot x_{0_2} - \Delta y + l_{y_2} = v_5,\\
&\Delta\mu \cdot z_{0_2} + \omega_x \cdot y_{0_2} - \omega_y \cdot x_{0_2} - \Delta z + l_{z_2} = v_6,\\
&\Delta\mu \cdot x_{0_3} + \omega_y \cdot z_{0_3} - \omega_z \cdot y_{0_3} - \Delta x + l_{x_3} = v_7,\\
&\Delta\mu \cdot y_{0_3} - \omega_x \cdot z_{0_3} + \omega_z \cdot x_{0_3} - \Delta y + l_{y_3} = v_8,\\
&\Delta\mu \cdot z_{0_3} + \omega_x \cdot y_{0_3} - \omega_y \cdot x_{0_3} - \Delta z + l_{z_3} = v_9,
\end{aligned} \qquad (2.22)$$

4) Решают систему уравнений погрешностей по способу наименьших квадратов под условием $\sum vv = \min$ и определяют семь неизвестных элементов характеризующих масштаб изображения по осям координат, положение и ориентировку референц – эллипсоида относительно общего земного эллипсоида $WGS - 84$.

2. 5 Алгоритм перевычисления пространственных прямоугольных координат *X, Y, Z* заданных в системе координат эллипсоида *WGS – 84* в систему пространственных прямоугольных координат *X, Y, Z*, относящихся к системе референцных координат *RGS* на произвольном эллипсоиде

Пусть из *GPS* наблюдений определены координаты X_{WGS} ,Y_{WGS} , Z_{WGS} произвольной точки. Как известно, они определяются в системе геоцентрических прямоугольных пространственных координат отнесенных к эллипсоиду *WGS – 84*.

При известных элементах взаимного размещения двух эллипсоидов (см. пункты 2.4 и 2.5) перевычисление координат X_{WGS} ,Y_{WGS} , Z_{WGS} в соответствующие координаты X_{RGS} ,Y_{RGS} , Z_{RGS} выполняют по таким формулам:

$$
\begin{aligned}
X_{RGS} &= X_{WGS} - x + \mu \cdot X_{WGS} + \omega_y \cdot Z_{WGS} - \omega_z \cdot Y_{WGS}, \\
Y_{RGS} &= Y_{WGS} - y + \mu \cdot Y_{WGS} - \omega_x \cdot Z_{WGS} + \omega_z \cdot X_{WGS}, \\
Z_{RGS} &= Z_{WGS} - z + \mu \cdot Z_{WGS} + \omega_x \cdot Y_{WGS} - \omega_y \cdot X_{WGS}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

В формулах (2.23) *x, y, z* – координаты центра референц эллипсоида *RGS* относительно центра эллипсоида *WGS – 84*; μ - масштабный множитель; ω_x, ω_y, ω_z – углы, характеризующие поворот координатных систем относительно друг друга.

Для некоторых референцных систем координат значения этих семи элементов ориентирования и размещения известны априорно [10, 11] и ими можно воспользоваться для перевычисления координат по формулам (2.23). Приведем значения этих элементов для наиболее распространенных референцных систем координат, полученных в Годдардеком центре космических исследований НАСА США при выводе модели Земли *GEM – 6* [10].

Таблица 2. 1 Элементы ориентирования и размещения референцных систем координат

Наименование референцных систем координат	Элементы ориентирования и размещения						
	Δx, м	Δy, м	Δz, м	ω_x''	ω_y''	ω_z''	μ, 10^{-6}
Североамериканская	-24	+151	+187	-0.2	-0.1	-0.8	+1.7
Австралийская	-135	-39	+133	-1.0	-1.2	+0.4	+2.4
Южно – американская	-63	0	-32	+0.6	-0.2	0.0	-1.3
Европейская	-83	-116	-120	+0.6	+0.4	-0.6	-0.3

3. ПЕРЕВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КООРДИНАТ В ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

3.1 Алгоритм вычисления плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса – Крюгера

В теории проекции Гаусса – Крюгера известны [1, 3, 12] следующие формулы, устанавливающие связь между геодезическими координатами B, L и плоскими прямоугольными зональными координатами x, y:

$$
\begin{aligned}
x &= X + \frac{N}{2\rho''^2}\sin B\cos B\cdot l''^2 + \frac{N}{24\rho''^4}\sin B\cos^3 B\left(5 - tg^2 B + 9e'^2\cos^2 B - 4e'^4\cos^4 B\right)\cdot l''^4 + \\
&+ \frac{N}{720\rho''^6}\sin B\cos^5 B\left(61 - 58\cdot tg^2 B + tg^4 B + 270\cdot e'^2\cos^2 B - 330\cdot tg^2 B\cdot e'^2\cos^2 B\right)\cdot l''^6 + \ldots\ldots, \\
y &= \frac{N}{\rho''}\cos B\cdot l'' + \frac{N}{6\rho''^3}\cos^3 B\left(1 - tg^2 B + e'^2\cos^2 B\right)\cdot l''^3 + \frac{N}{120\rho''^5}\cos^5 B\times \\
&\times\left(5 - 18\cdot tg^2 B + tg^4 B + 14\cdot e'^2\cos^2 B - 58\cdot tg^2 B\cdot e'^2\cos^2 B\right)\cdot l''^5 + \frac{N}{5040\,\rho''^7}\cos^7 B\left(61 - 479\cdot tg^2 B + 179\cdot tg^4 B - tg^6 B\right) + \ldots..
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

В (3.1) e'^2 – второй эксцентриситет эллипсоида, вычисляемый по формуле:

$$
e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad (3.2)
$$

и для эллипсоида Красовского имеющий значение $e'^2 = 0.006738525415$.

Для вычисления на ЭОМ формулы (3.1) неудобны, поэтому преобразуем их к виду удобному для программирования. С учетом разработок в [9] и [11] запишем рабочую формулу для вычисления координаты x так:

$$x = X + \frac{1}{2} a_2 \cdot l^2 \left(0.5 + a_4 \cdot l^2 + a_6 \cdot l^4 + a_8 \cdot l^6\right). \qquad (3.3)$$

Величины, входящие в (3.3) определяются из таких формул:

$$\begin{aligned}
X &= 6367558.497 \cdot B - a_0 \sin B \cos B, \\
a_0 &= \left(0.7032 \cos^2 B - 135.3277\right)\cos^2 B + 32140.4046, \\
a_2 &= \left(\left(0.605 \sin^2 B + 107.155\right)\sin^2 B + 21346.142\right)\sin^2 B + 6378245 \sin B \cos B, \\
a_4 &= \left(\left(7.6 \cdot 10^{-6} \cos^2 B + 0.0025262\right)\cos^2 B + 0.25\right)\cos^2 B - 0.0416667, \\
a_6 &= \left(\left(0.00562 \cos^2 B + 0.16358\right)\cos^2 B - 0.08333\right)\cos^2 B + 0.0139.
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Рабочая формула для вычисления координаты y запишется так:

$$y = b_1 \cdot l\left(1 + b_3 \cdot l^2 + b_5 \cdot l^4 + b_7 \cdot l^6\right). \qquad (3.5)$$

Коэффициенты в (3.5) вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(\left(0.605 \sin^2 B + 107.155\right)\sin^2 B + 21346.142\right)\sin^2 B + 6378245 \cos B, \\
b_3 &= \left(1.12309 \cdot 10^{-3} \cos^2 B + 0.3333333\right)\cos^2 B - 0.16666667, \\
b_5 &= \left(\left(4.043 \cdot 10^{-3} \cos^2 B + 0.196743\right)\cos^2 B - 0.166667\right)\cos^2 B + 0.808333, \\
b_7 &= \left(\left(0.1429 \cos^2 B - 0.1667\right)\cos^2 B + 0.0361\right)\cos^2 B - 0.0002
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

В формулах (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) величины B и l выражены в радианах, а значения координат определяют в метрах.

Величина l характеризует разность долгот точки наблюдения L и осевого меридиана L_0 шестиградусной зоны в проекции Гаусса – Крюгера, т. е.

$$l = L - L_0 \qquad (3.7)$$

Долготу осевого меридиана L_0 определяют так:

- находят число T ближайшее к долготе L но большее ее и кратное шести;
- находят частное $n = \frac{T}{6}$; (3.8)
- вычисляют долготу осевого меридиана зоны

$$L_0 = (6 \cdot n - 3)^0. \tag{3.9}$$

Разность долгот l может быть как положительной, так и отрицательной, и от знака l будет зависеть знак координаты y.

С учетом вышеизложенного алгоритм вычисления плоских координат x и y в проекции Гаусса – Крюгера будет таким:

1) По известной долготе L, по формулам (3.8) и (3.9) вычисляют долготу осевого меридиана L_0 и по формуле (3.7) разность долгот l;
2) Заносят в память компьютера исходные значения B и L в радианной мере;
3) По формулам (3.4) и (3.6) вычисляют значения коэффициентов a_i и b_i;
4) По формулам (3.3) и (3.5) вычисляют координаты x и y в проекции Гаусса – Крюгера;
5) Преобразуют ординату y к условному виду с учетом переноса начала координат в каждой зоне на 500 км. к западу и с учетом номера зоны:

$$y^{'} = 500000.000 + y = ny^{'} \tag{3.10}$$

Число n ставится в (3.10) перед условной ординатой $y^{'}$ и оно определяет номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса – Крюгера. Число n определяется по (3.8).

Рассмотренные формулы и методика вычислений обеспечивают определение координат *x*, *y* только для эллипсоида Красовского, ибо все коэффициенты в этих формулах определены по параметрам этого эллипсоида.

В случае использования других эллипсоидов в качестве поверхности относимости необходимо выполнять вычисления, используя формулы, которые приводятся ниже.

Для вычисления *X* в формуле (3.3) необходимо использовать формулу [11]:

$$X = A_0 \cdot B - A_2 \sin 2B + A_4 \sin 4B - A_6 \sin 6B + ..., \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= a\left(1-e^2\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+.....\right), \\ A_2 &= 0.5a\left(1-e^2\right)\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+.....\right), \\ A_4 &= 0.25a\left(1-e^2\right)\left(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+.....\right), \\ A_6 &= 0.167a\left(1-e^2\right)\left(\frac{35}{512}e^6+.....\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

В (3.12) a – большая полуось соответствующего эллипсоида, а e^2 – первый эксцентриситет этого же эллипсоида, определяемый по формуле (1.1) или через сжатие эллипсоида α с учетом того что $e^2 \approx 2\alpha$.

Остальные коефициенты a_i формулы (3.3) вычисляют по таким формулам:

$$\begin{aligned} a_2 &= a\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-1/2}\cdot \sin B\cos B, \\ a_4 &= 0.0416667\cos^2 B\left(5-tg^2 B+9e'^2\cos^2 B-4e'^4\cos^4 B\right), \\ a_6 &= 0.00139\cos^4 B\left(61-58tg^2 B+tg^4 B+270e'^2\cos^2 B-330tg^2 B\cdot e'^2\cos^2 B\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Вычисление коэффициентов b_i в формуле (3.5) следует выполнять по формулам:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-1/2}\cos B,\\
b_3 &= 0.16666667\cdot\cos^2 B\left(1-tg^2B+e'^2\cos^2 B\right),\\
b_5 &= 0.008333\cdot\cos^4 B\left(5-18tg^2B+tg^4B+14e'^2\cos B-58tg^2B\cdot e'^2\cos^2 B\right),\\
b_7 &= 1.98413\cdot 10^{-4}\cos^6 B\left(61-479tg^2B+179tg^4B-tg^6B\right).
\end{aligned} \qquad (3.14)
$$

В (3.13) и (3.14) e'^2 - второй эксцентриситет эллипсоида. Для его вычисления используют формулу (1.2).

После вычисления коэффициентов a_i и b_i определяют координаты x и y в проекции Гаусса – Крюгера по формулам (3.3) и (3.5), при этом алгоритм вычислений остается прежним.

3. 2 Алгоритм вычисления геодезических координат по плоским прямоугольным координатам в проекции Гаусса – Крюгера.

Вычисление геодезических координат B и L по известным плоским прямоугольным координатам x и y в проекции Гаусса – Крюгера выполняют по таким формулам [4, 5, 11, 12]:

$$
\begin{aligned}
B &= B_x-\frac{tgB_x}{2N_x^2}\left(1+e'^2\cos^2 B_x\right)\cdot y^2+\frac{tgB_x}{24N_x^4}(5+3tg^2B_x+6e'^2\cos^2 B_x-6tg^2B_xe'^2\cos^2 B_x-\\
&-3e'^4\cos^4 B_x-9tg^2B_xe'^4\cos^4 B_x)\cdot y^4-\frac{tgB_x}{720N_x^6}\left(61+90tg^2B_x+45tg^4B_x\right)\cdot y^6+.....,\\
l &= \frac{y}{N_x\cos B_x}-\frac{y^3}{6N_x^3\cos B_x}\left(1+2tg^2B_x+e'^2\cos^2 B_x\right)+\frac{y^5}{120N_x^5\cos B_x}(5+28tg^2B_x+24tg^4B_x+\\
&+6e'^2\cos^2 B_x+8tg^2B_x\cdot e'^2\cos^2 B_x)+.....
\end{aligned} \qquad (3.15)
$$

В приведенных формулах (3.15) l – разность геодезических долгот пункта наблюдения L и осевого меридиана зоны в проекции Гаусса –

Крюгера L_0, а B_x – геодезическая широта, соответствующая длине дуги осевого меридиана, численно равной абсциссе пункта наблюдения x.

Широта B_x определяет как функция этой координаты из формулы [11]:

$$B_x = \overline{A}_0 x + \overline{A}_2 \sin\left(2\overline{A}_0 x\right) + \overline{A}_4 \sin\left(4\overline{A}_0 x\right) + \overline{A}_6 \sin\left(6\overline{A}_0 x\right), \tag{3.16}$$

где коэффициенты $\overline{A}_i$ определяются на основании коэффициентов $\overline{A}_i$ (формулы (3.12)) из таких соотношений:

$$\begin{aligned}
\overline{A}_0 &= \frac{1}{A_0}, \\
\overline{A}_2 &= \frac{A_2}{A_0} + \frac{A_2 \cdot A_4}{A_0^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3, \\
\overline{A}_4 &= -\frac{A_4}{A_6} + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2, \\
\overline{A}_6 &= \frac{A_6}{A_0} - 3\frac{A_2 \cdot A_4}{A_0^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^3.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Формула (3.16) определяет B_x в радиальной мере.

В соответствии с приведенными формулами алгоритм вычисления геодезических координат для произвольного эллипсоида будет таким:

1) записывают параметры эллипсоида a, $e^2(\alpha)$ и исходные координаты x, y';
2) преобразуют условною ординату y' в истинную зональную ординату y на основании формулы (3.10) *$y = y'$ (без номера зоны n) – 500000м.;*
3) вычисляют по параметрам эллипсоида a, e^2 и по формулам (3.12) значения коэффициентов A_i, а по формулам (3.17) значения коэффициентов $\overline{A}_i$;

4) Пользуясь коэффициентами $\overline{A}_i$ и координатой x в метрах, находят по формуле (3.16) геодезическую широту B_x в радианах;
5) вычисляют коэффициенты формул (3.15) в соответствии с выражениями:

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_2 &= -\frac{tgB_x}{2N_x^2}\left(1+e'^2\cos B_x\right),\\
\overline{a}_4 &= +\frac{tgB_x}{24N_x^4}\left(5+3tg^2B_x+6e'^2\cos^2 B_x-6tg^2B_xe'^2\cos^2 B_x-3e'^4\cos^4 B_x-9tg^2B_xe'^4\cos^4 B_x\right),\\
\overline{a}_6 &= -\frac{tgB_x}{720N_x^6}\left(61+90tg^2B_x+45tg^4B_x\right),\\
\overline{b}_1 &= +\frac{1}{N_x\cos B_x},\\
\overline{b}_3 &= \frac{1}{6N_x^3\cos B_x}\left(1+2tg^2B_x+e'^2\cos^2 B_x\right),\\
\overline{b}_5 &= \frac{1}{120N^5\cos B_x}\left(5+28tg^2B_x+24tg^4B_x+6e'^2\cos^2 B_x+8tg^2B_xe'^2\cos^2 B_x\right).
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

6) вычисляют геодезическую широту B и геодезическую долготу L:

$$
\begin{aligned}
B &= B_x+\overline{a}_2\cdot y^2+\overline{a}_4\cdot y^4+\overline{a}_6\cdot y^6,\\
l &= \overline{b}_1\cdot y+\overline{b}_3\cdot y^3+\overline{b}_5\cdot y^5
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

и долготу $L = L_0 + l$,

где L_0 – долгота осевого меридиана зоны в проекции Гаусса – Крюгера.

Формулы (3.19) определяют B и L в радианной мере.

Алгоритм вычисления на ЭОМ геодезических координат B и L с помощью формул (3.15) можно представить и на основании таких процессов.

1) по (3.16), с учетом (3.12) и (3.17), вычисляют геодезическую широту B_x, соответствующую заданной координате x;

2) вычисляют радиус кривизны первого вертикала эллипсоида для точки с широтой B_x по формуле:

$$N_x = \left(\left(0.605\sin^2 B_x + 107.155\right)\sin^2 B_x + 21346.142\right)\sin^2 B_x + 6378245, \qquad (3.20)$$

в случае использования в качестве отсчетного эллипсоида Красовского и

$$N_x = a\left(1 - e^2 \sin^2 B_x\right)^{-1/2} \qquad (3.21)$$

для эллипсоида с произвольными параметрами;

3) определяют вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} &\eta_x^2 = e'^2 \cos^2 B_x \\ &u \\ &t_x = tgB_x \end{aligned} \qquad (3.22)$$

где $e'^2 = 0.0067385254$ – второй эксцентриситет эллипсоида Красовского, а для произвольного эллипсоида его определяют из вычислений по формуле:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \qquad (3.23)$$

в которой a и b – значения большой и малой полуосей эллипсоида;

4) вычисляют коэффициенты:

$$\begin{aligned} &k_0 = 1 + \eta_x^2, \\ &k_1 = 1 + 2t_x^2 + \eta_x^2, \\ &k_2 = 5 + 3t_x^2 + 6\eta_x^2 - 6t_x^2 \cdot \eta_x^2 - 3\eta_x^4 - 9t_x^2 \cdot \eta_x^4, \\ &k_3 = 5 + 28t_x^2 + 24t_x^4 + 6\eta_x^2 + 8t_x^2 \cdot \eta_x^2, \\ &k_4 = 61 + 90t_x^2 + 45t_x^4; \end{aligned} \qquad (3.24)$$

5) определяют значение коэффициентов $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_i$ по формулам:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_2 &= \frac{t_x}{2N_x^2}, \\
\bar{a}_4 &= \frac{1}{12N_x^2}, \\
\bar{a}_6 &= \frac{1}{30N_x^2}, \\
\bar{b}_1 &= \frac{1}{N_x \cos B_x}, \\
\bar{b}_3 &= \frac{1}{6N_x^2}, \\
\bar{b}_5 &= \frac{1}{20N_x^2};
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

6) вычисляют геодезические координаты точки по формулам:

$$
\begin{aligned}
B &= B_x - \bar{a}_2 y^2 \left(k_0 + \bar{a}_4 y^2 \left(k_2 - \bar{a}_6 k_4 y^2\right)\right), \\
l &= \bar{b}_1 y \left(1 - \bar{b}_3 y^2 \left(k_1 - \bar{b}_5 y^2 k_3\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

По разности долгот l вычисляют геодезическую долготу $L = L_0 + l$, где L_0 – долгота осевого меридиана зоны в проекции Гаусса – Крюгера. Значения B и L по формуле (3.26) определяют в радианной мере, а знак l соответствует знаку координаты y.

3. 3 Алгоритм вычисления плоских прямоугольных координат *x* и *y* по геодезическим координатам в универсальной поперечно – цилиндрической проекции *UTM* (Universal Transverse Mercator projection)

Проекция Меркатора *UTM* получила достаточно широкое распространение в геодезических и картосоставительных работах англоязычных стран, в том числе и США.

В проекции *UTM* земной эллипсоид также делится на *60* зон по 6^0 каждая, однако нумерация зон начинается с меридиана противоположного Гринвичскому, т. е. с долготой 180^0 и номера зон возрастают на восток. Так в проекции Меркатора (*M*) осевой меридиан первой зоны *M1*имеет долготу 177^0W (западной долготы), зоны $M2 - 171^0W$, а зоны $M31 - 3^0E$ (восточной долготы) и будет соответствовать осевому меридиану первой зоны проекции Гаусса – Крюгера.

При вычислении плоских прямоугольных координат в проекции *UTM* принят масштабный коэффициент $m_0 = 0.9996$. Введя обозначения

$$\begin{aligned} &t = tgB, \\ &\eta^2 = e'^2 \cos^2 B. \end{aligned} \tag{3.27}$$

в соответствии с [13] запишем формулы для вычисления плоских прямоугольных координатах *x* и *y* в проекции *UTM*:

$$\begin{aligned} x &= m_0 \left\{ \begin{aligned} &X + \frac{l''^2}{2\rho''^2} N \sin B \cos B + \frac{l''^4}{24\rho''^4} N \sin B \cos^3 B\left(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4\right) + \\ &+ \frac{l''^6}{720\rho''^6} N \sin B \cos^5 B\left(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2\right) \end{aligned} \right\}, \\ y &= m_0 \left\{ \begin{aligned} &\frac{l''}{\rho''} N \cos B + \frac{l''^3}{6\rho''^3} N \cos^3 B\left(1 + \eta^2 - t^2\right) + \\ &+ \frac{l''^5}{120\rho''^5} \cos^5 B\left(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2\right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Сопоставляя (3.28) с (3.1) устанавливаем, что эти формулы отличаются только масштабным множителем m_0. Поэтому алгоритм вычисления координат x и y в проекции *UTM* будет таким:

1) по геодезической долготе L определяют долготу осевого меридиана L_0 в зональной системе координат проекции Меркатора *UTM*:

$$L_0 = (m - 30) \cdot 6 - 3^0, \tag{3.29}$$

где m – номер зоны в проекции Меркатора, а отрицательное значение L_0, вычисляемое по (3.29), означает западную долготу;

2) определяют разность долгот $l = L - L_0$;

3) используя параметры заданного эллипсоида a и e^2 вычисляют по формуле (3.12) значения коэффициентов A_i и по формуле (3.11) значение длины дуги осевого меридиана X, то есть:

$$\begin{aligned}
A_0 &= a(1-e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \ldots\right),\\
A_2 &= \frac{1}{2}a(1-e^2)\left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \ldots\right),\\
A_4 &= \frac{1}{4}a(1-e^2)\left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \ldots\right),\\
A_6 &= \frac{1}{6}a(1-e^2)\left(\frac{35}{512}e^6 + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

и

$$X = A_0 B - A_2 \sin 2B + A_4 \sin 4B - A_6 \sin 6B + \ldots; \tag{3.11}$$

4) вычисляют по (3.27) величины t и η^2 и по приведенным ниже формулам, значения коэффициентов k_i:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1+\eta^2 - t^2,\\
k_2 &= 5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4,\\
k_3 &= 5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2,\\
k_4 &= 61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2,
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

а также коэффициенты a_i:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= N\cos B,\\
a_2 &= N\cos B\sin B;
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

5) вычисляют плоские прямоугольные координаты x, y в проекции UTM:

$$
\begin{aligned}
x &= m_0 X + m_0 a_2 l^2\left(0.5 + l^2\cos^2 B\left(0.0416667\cdot k_2 + 0.0013889\cdot k_4\cdot l^2\cos^2 B\right)\right),\\
y &= m_0 a_1 l\left(1 + l^2\cos^2 B\left(0.1666667\cdot k_1 + 0.0833333\cdot k_3\cdot l^2\cos^2 B\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

При вычислениях по формулах (3.32) разность долгот *“l”* определяется в радианах.

3. 4. Алгоритм вычисления геодезических координат *B*, *L* по плоским прямоугольным координатам *x*, *y*, заданным в проекции Меркатора *UTM*.

Исходя из сути проекции UTM и формул преобразования координат B, L в координаты x, y, алгоритм преобразования координат x, y в координаты B, L описывается такими процедурами.

1) Определяют дугу осевого меридиана X по формуле:

$$
X = \frac{x}{m_0}. \tag{3.33}
$$

2) По параметрам эллипсоида a и e^2 с помощью формул (3.12) определяют коэффициент A_i и по ним, в соответствии с формулами (3.17), коэффициенты $\overline{A}_i$.

3) Вычисляют широту B_x (формула 3.16), как функцию координаты X (формула 3.33), т.е.:

$$B_x = \overline{A}_0 \cdot X + \overline{A}_2 \sin\left(2\overline{A}_0 \cdot X\right) + \overline{A}_4 \sin\left(4\overline{A}_0 \cdot X\right) + \overline{A}_6 \sin\left(6\overline{A}_0 \cdot X\right). \qquad (3.34)$$

4) Вычисляют вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} t_x &= tgB_x, \\ \eta_x^2 &= e'^2 \cos^2 B_x. \end{aligned} \qquad (3.35)$$

5) Находят значения коэффициентов k_i в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + \eta_x^2 + 2t_x^2, \\ k_2 &= 5 + 3t_x^2 + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \cdot t_x^2, \\ k_3 &= 5 + 28t_x^2 + 24t_x^4 + 6\eta_x^2 + 8\eta^2 t_x^2, \\ k_4 &= 61 + 90t_x^2 + 45t_x^2 - 90\eta_x^2 \cdot t_x^4 - 252\eta_x^2 \cdot t_x^2. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

6) Определяют радиусы кривизны меридиана M_x и первого вертикала N_x по широте B_x. Имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= a\left(1 - e^2\right)\left(1 - e^2 \sin^2 B_x\right)^{-3/2}, \\ N_x &= a\left(1 - e^2 \sin^2 B_x\right)^{-1/2}. \end{aligned} \qquad (3.37)$$

где a и e^2 – большая полуось и первый эксцентриситет эллипсоида.

7) Находят значение коэффициентов a_i в соответствии с формулами:

$$\bar{a}_1 = \frac{\sec B_x}{m_0 N_x},$$
$$\bar{a}_2 = \frac{t_x}{m_0^2 M_x N_x}, \qquad (3.38)$$
$$\bar{a}_3 = \frac{1}{m_0^2 N_x^2}.$$

8) Вычисляют геодезические координаты *B, L* по формулам:

$$B = B_x - \bar{a}_2 y^2 \left(0.5 - \bar{a}_3 \cdot y^2 \left(0.04166667 \cdot k_2 - 0.00138889 k_4 \cdot \bar{a}_3 \cdot y^2\right)\right),$$
$$l = \bar{a}_1 \cdot y \left(1 - \bar{a}_3 \cdot y^2 \left(0.1666667 \cdot k_1 - 0.00833333 \cdot k_3 \cdot \bar{a}_3 \cdot y^2\right)\right). \qquad (3.39)$$

и определяют долготу пункта

$$L = L_0 + l. \qquad (3.40)$$

3. 5 Алгоритм вычисления плоских прямоугольных координат *x*, *y* на плоскости в проекции Ламберта по известным геодезическим координатам

Для обработки геодезических измерений и составления карт проекция Ламберта применяется США, Франции, Испании, Сирии и других странах [16].

Система плоских координат *x*, *y* задается осью ОХ, которая совпадает с центральным меридианом картографируемой территории с геодезической долготой L_0. За начало координат *O* принимают точку пересечения среднего меридиана с южной (или данной) параллелью изображаемой территории, геодезическая широта которой B_0.

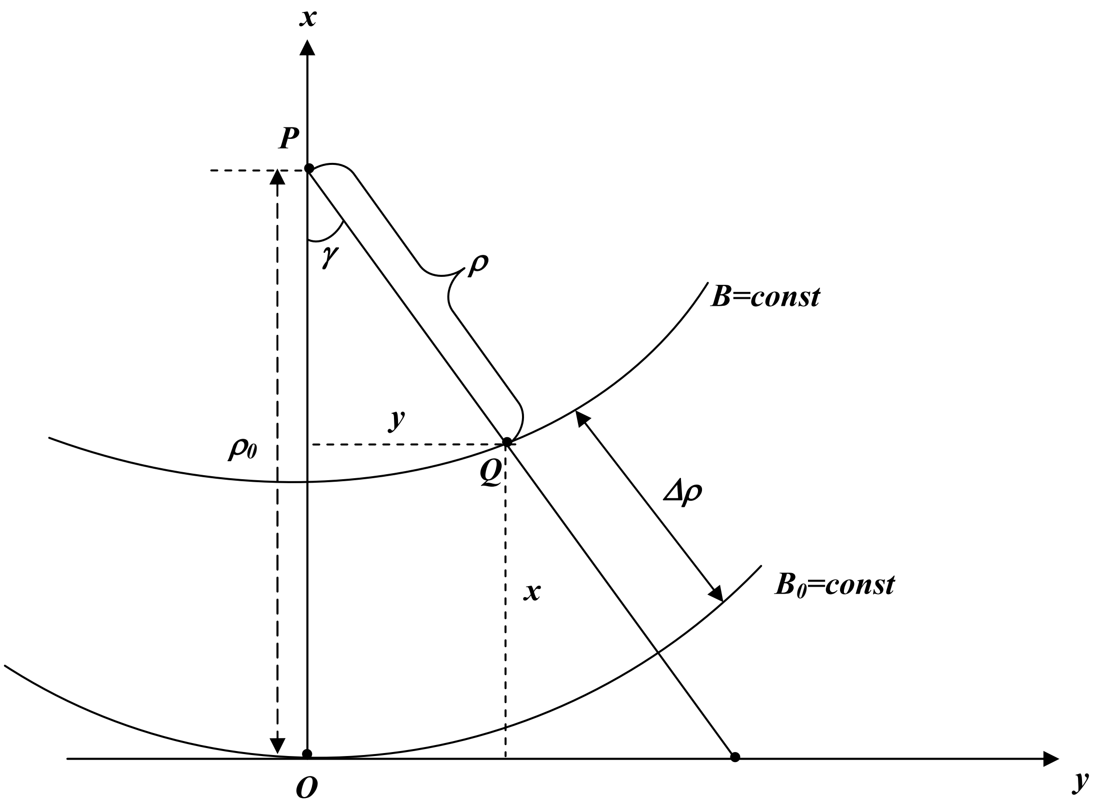

Рис. 3.1 Конформная коническая проекция Ламберта

Масштаб по оси *Ox* принимают, как правило, равным единице, т. е. $m_0 = 1$, что свидетельствует об отсутствии линейных искажений по этому направлению. Положение произвольной точки *Q* в этой проекции определяют декартовыми координатами *x* и *y* (рис. 3.1) или полярными координатами ρ и γ.

Пусть для заданной карты в проекции Ламберта известны геодезические координаты B_0 и L_0, определяющие систему координат и требуется для произвольной точки, заданной геодезическими координатами *B* и *L* определить ее декартовые координаты *x*, *y*.

Алгоритм вычисления на основании [9]будет определяться таким:

1. Определяют радиус кривизны первого вертикала

$$N_0 = a\left(1 - e^2 \sin^2 B_0\right)^{-1/2}, \tag{3.41}$$

где a и e^2 – параметры (большая полуось a и первый эксцентриситет e^2) принятого эллипсоида.

2. Находят полярный радиус ρ_0 и постоянный коэффициент β по формулам:

$$\rho_0 = N_0 ctgB_0, \tag{3.42}$$

$$\beta = \sin B_0. \tag{3.43}$$

3. Зная приращение широты $\Delta B = B - B_0$, вычисляют разность изометрической широты Δq из формулы:

$$\Delta q = t_1\Delta B + t_2\Delta B^2 + t_3\Delta B^3 + t_4\Delta B^4 + t_5\Delta B^5 + t_6\Delta B^6 + ..., \tag{3.44}$$

где

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{V_0^2 \cos B_0}, \\
t_2 &= \frac{t_0}{2V_0^4 \cos B_0}\left(1 + 3\eta_0^2\right), \\
t_3 &= \frac{1}{6\cos B_0}\left(1 + 2t_0^2 + \eta_0^2 + 6\eta_0^4 \cdot t_0^2 - 3\eta_0^4 + ...\right), \\
t_4 &= \frac{t_0}{24\cos B_0}\left(5 + 6t_0^2 - \eta_0^2 - 6\eta_0^4 \cdot t_0^2 + 21\eta_0^4 + ...\right), \\
t_5 &= \frac{1}{120\cos B_0}\left(5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 - \eta_0^2 + ...\right), \\
t_6 &= \frac{t_0}{720\cos B_0}\left(61 + 180t_0^2 + 120t_0^4 + ...\right).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

и

$$\begin{aligned}
t_0 &= tgB_0, \\
\eta_0^2 &= e'^2 \cos^2 B_0, \\
V_0^2 &= 1 + \eta_0^2.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

В (3.46) e'^2 второй эксцентриситет эллипсоида, вычисляемый через его полуоси a и b по формуле:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \tag{3.47}$$

4. Определяют значение полярного радиуса ρ как:

$$\rho = \rho_0 - \Delta\rho, \tag{3.48}$$

где

$$\Delta\rho = \rho_0 \left(\beta \cdot \Delta q - \frac{1}{2}(\beta \cdot \Delta q)^2 + \frac{1}{6}(\beta \cdot \Delta q)^3 - \frac{1}{24}(\beta \cdot \Delta q)^4 + \frac{1}{120}(\beta \cdot \Delta q)^5 - \ldots \right). \tag{3.49}$$

5. Вычисляют полярный угол:

$$\gamma = \beta \cdot l, \tag{3.50}$$

где $l = L - L_0$.

6. Вычисляют искомые координаты пункта:

$$\begin{aligned} x &= \rho_0 - \rho \cos\gamma, \\ y &= \rho \sin\gamma. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Анализ приведенного алгоритма показывает, что величина ρ_0, β и коэффициент t_i являются общими для всех точек, расположенных внутри изображаемой области в пределах допустимых значений ΔB и l и, поэтому, эти величины могут многократно использоваться при вычислениях координат.

3. 6 Алгоритм вычисления геодезических координат *B* и *l* по заданным плоским координатам *x* и *y* в проекции Ламберта

Алгоритм решения поставленной задачи разработан на основании формул подраздела 3.5 и состоит из таких действий:

1. По заданному значению широты исходной параллели B_0, по формулам (3.41), (3.42) и (3.43) определяют N_0, β, ρ_0.
2. Вычисляют полярный угол γ

$$\gamma = arctg\left(\frac{y}{\rho_0 - x}\right). \tag{3.52}$$

3. Определяют геодезическую долготу заданной точки:

$$l = \frac{\gamma}{\beta} \tag{3.53}$$

и $L = L_0 + l.$ (3.54)

4. Вычисляют $\Delta\rho$. Имеем:

$$\Delta\rho = x - \frac{y^2}{2\rho_0} - \frac{xy^2}{2\rho_0^2} + ... \tag{3.55}$$

5. Определяют разность изометрических широт Δq:

$$\Delta q = \beta^{-1}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3 + ...\right). \tag{3.56}$$

6. Определяют приращение геодезической широты ΔB:

$$\Delta B = t_1' \cdot \Delta q + t_2' \cdot \Delta q^2 + t_3' \cdot \Delta q^3 + t_4' \cdot \Delta q^4 + t_5' \cdot \Delta q^5 + ... \tag{3.57}$$

В (3.57) коэффициенты $t_i^{'}$ $(i=1,\ 2,\ 3...)$ вычисляют по формулах обращения коэффициентов степенного ряда:

$$
\begin{aligned}
t_1^{'} &= \frac{1}{t_1}, \\
t_2^{'} &= -\frac{t_2}{t_1^3}, \\
t_3^{'} &= \frac{1}{t_1^5}\left(2t_2^2 - t_1 \cdot t_3\right), \\
t_4^{'} &= \frac{1}{t_1^7}\left(5t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 - t_1^2 \cdot t_4 - 5t_2^3\right), \\
t_5^{'} &= \frac{1}{t_1^9}\left(6t_1^2 \cdot t_2 \cdot t_4 + 3t_1^2 \cdot t_3^2 + 14t_2^4 - t_1^3 \cdot t_5 - 21t_1 \cdot t_2^3 \cdot t_3\right).
\end{aligned}
\qquad (3.58)
$$

7. Вычисляют геодезическую широту заданной точки:

$$B = B_0 + \Delta B. \qquad (3.59)$$

Все угловые величины в подразделах 3.5 и 3.6 следует выражать в радианной мере, и только конечные результаты переводить в градусную меру.

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Разработанные в настоящем исследовании алгоритмы позволяют решить следующие задачи:

1. Определить элементы взаимного ориентирования двух референцных систем координат, смещение центров этих референцных систем координат и изменение масштаба при переходе от одной системы к другой; разработанные алгоритмы позволяют определять эти параметры как по геодезическим координатам *B, L, H* (подраздел 2.3), так и с помощью пространственных прямоугольных координат *X, Y, Z* (подраздел 2.4);
2. Преобразовывать пространственные прямоугольные координаты *X, Y, Z*, полученные в результате обработки наблюдений спутников в системе *GPS* в геодезические координаты *B, L, H* (подраздел 2.1);
3. Выполнить преобразование геодезических координат *B, L, H*, заданных параметрами эллипсоида *WGS – 84* в геодезические координаты, отнесенные к произвольному референц – эллипсоиду

В разделе 2 (подраздел 2.5) разработан алгоритм непосредственного перевычисления пространственных прямоугольных координат *X, Y, Z* одного эллипсоида в систему таких же пространственных координат *X, Y, Z*, отнесенных к другому референц – эллипсоиду.

Формулы, входящие в эти алгоритмы обеспечивают точность вычисления координат в линейной мере до $0.001 м.$, а в угловой мере – до $0''.0001$.

Все угловые величины в рассмотренных алгоритмом необходимо выражать в радиальной мере.

В третьем разделе НИР разработаны алгоритмы перевычисления геодезических координат в плоские прямоугольные координаты, отнесенные к той или иной картографической проекции.

В соответствии с техническим заданием эти задачи решены для координат в проекции Гаусса – Крюгера (подраздел 3.1 и 3.2), для координат в универсальной поперечно – цилиндрической проекции Меркатора UTM (Universal Transverse Mercator Projection) (подразделы 3.3 и 3.4), конформной конической проекции Ламберта (подразделы 3.5 и 3.6).

В этих подразделах разработаны алгоритмы решения как прямой задачи на координаты – определение плоских прямоугольных координат *x, y* по геодезическим координатам *B, L*, так и обратной задачи на координаты – определение геодезических координат *B, L* по плоским прямоугольным координатам *x, y* соответствующей проекции.

В разработанных алгоритмах угловые величины должны выражаться в радиальной мере.

Точность решения задач по разработанным алгоритмам соответствует миллиметровой точности в определяемых координатах *x, y* и $0\overset{''}{.}001$ в геодезических координатах.

Литература

1. Савчук С. Г. Вища геодезія – Львів.: Ліга - Прес, 2000
2. Баранов В. Н. и др. Космическая геодезия. – М., Недра, 1986
3. Машимов М. М. Уравнивание геодезических сетей. – М.: Недра, 1979
4. Христов В. К. Координаты Гаусса – Крюгера на эллипсоиде вращения. М., Геодезиздат, 1998
5. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия. – М.: Недра, 1978
6. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения в 6т. – М.: Геодезиздат, 1953. – т. 1
7. Медведев П. П. Исследование гравитационного поля и фигуры Земли, методики космической геодезии. Итоги науки и техники, серия «Геодезия и аэрофотосъемка». – М.: 1980
8. Moritz M.; "Geodetic Reference System 1980"; Bulletin Geodesique: Vol. 54, No 3; Paris, France; 1980.
9. Закатов П. С. Курс высшей геодезии М. Недра, 1976
10. Schmitt G., Iller M. Jager R. Transformations probleme. Deutsher Verein fur Vermessungs wesen, special issue: GPS und integration von GPS in bestehende geodatishe Netze, vol. 38, 1991
11. Czarnecki K. Geodezja wspolczesna w zarysie Warszawa, Wydawnictwo Wiedza i Zycie, 1998
12. Вахромеев Л. А., Бугаевский Л. М., Казакова З. Л. Математическая картография. – М.: Недра. 1986.
13. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии М. Недра, 1979
14. Гофманн – Велленгоф Б., Ніхтенеггер Г., Коллінз Д. Глобальна система визначення місцеположення (GPS): теорія і практика. – Київ.: Наукова думка, 1996
15. Кучер О., Ренкевич О. Лепетюк Б. Дослідження референцних систем координат для території України. В збірнику „Сучасні досягнення

геодезичної науки та виробництва”. – Львів: видавництво Ліга – прес, 2002.

16. Malys S., Slater J., Smith R., Kunz L., Kenyon S.: “Refine ments to the World Geodetic System 1984”; proceedings of GPS ION – 97; Kansas City, MO; September 1997.