

С.В. Смолич, К.С. Смолич

**РЕШЕНИЕ
ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ “МОНТЕ-КАРЛО”**

Чита - 2004

**Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Читинский государственный университет**

С.В. Смолич, К.С. Смолич

**РЕШЕНИЕ
ГОРНО-ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ "МОНТЕ-КАРЛО"**

Учебное пособие для студентов
горно-геологических специальностей

Чита 2004

УДК [519.6:622](075)
ББК [22.18:33]я 7
С 512
ISBN 5-9293-02978-8

Смолич С.В., Смолич К.С. Решение горно-геологических задач методом "Монте-Карло": Учеб. пособие. – Чита: ЧитГУ, 2004. - 103 с.

Табл. - 5

Ил. - 33

Библ. - 18 наим.

Рассматривается теория и практика решения горнотехнических, эксплуатационных, геолого-разведочных и задач процесса обогащения полезных ископаемых методом Монте-Карло. В пособии дается представление о сущности метода Монте-Карло и его особенностях применения при решении некоторых типовых задач. Приведены конкретные примеры решения некоторых задач.

Для студентов, аспирантов и инженерных работников, выполняющих исследования и принимающих решения в области горнорудного производства.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом горного института ЧитГУ.

Ответственный за выпуск к.т.н., доц; зав.каф. А.Е. Беляков

Рецензенты:

- 1) В.М. Лизункин, д.т.н., проф., зав. горным отделом ИПРЭК СО РАН;
- 2) кафедра "Прикладная информатика" Забайкальского института предпринимательства, Сибирского университета потребительской кооперации (зав. кафедрой, к.г.-м.н., проф. В.Г, Романов).

© Читинский государственный университет, 2004

© Смолич С.В., Смолич К.С., 2004

Предисловие



"Бог не играет в кости!"

А. Эйнштейн

Применение математических методов и ЭВМ при решении горнотехнических и геологических задач требует разработки определенной технологии анализа и обобщения теоретико-эмпирических данных. Необходимость таких разработок стала очевидной при создании различных видов предметно ориентированных автоматизированных систем решения задач.

Важное значение в этой связи, приобрели вопросы расчленения процесса решения задач на формализуемые и не формализуемые звенья и "увязки" промежуточных результатов, которые отличаются большой неопределенностью. Как правило, эта неопределенность оказывалась вне поля зрения исследователя. При традиционных построениях ее учет если и осуществлялся, то на интуитивном уровне, так как в распоряжении специалистов не было средств, позволяющих получать представление о том, как могут меняться окончательные результаты в зависимости от погрешностей в исходных данных, от не-

определенности отдельных исходных пояснений. Отсутствие таких средств, приводило к потере информации и при решении геологических задач на базе математических методов. Эти методы учитывали лишь погрешность, вызванную неполной адекватностью модели, и игнорировали неточность исходных данных.

Вследствие внедрения математических методов появилось большое число моделей различной степени сложности и вида. В этих условиях оценка суммарных погрешностей результатов с помощью методических приемов, рекомендуемых в теории ошибок, является недостаточно корректной, так как не учитывает реальных функций распределения вероятностей исходных данных.

Опыт российских и зарубежных исследователей показывает, что для подобного рода ситуаций целесообразно использовать метод Монте-Карло, который позволяет применять любые методы анализа исходных данных при интервально-вероятностном задании последних. Представление окончательных результатов в виде вероятностных кривых облегчает работу геолога на всех этапах обработки данных с целью вскрытия закономерностей размещения и формирования, прогноза, поиска и оценки месторождений полезных ископаемых.

Таким образом, метод Монте-Карло позволяет количественно оценивать неопределенность получаемых решений в условиях, когда информация о некоторых данных несет нечеткий, "расплывчатый" характер. Необходимо подчеркнуть, что благодаря методу Монте-Карло и исходя из ожидаемого (полученного с его помощью) спектра решений можно более четко сформулировать требования к точности, с которой должны представляться исходные данные.

Введение

Данное пособие написано в рамках курсов, читаемых для специальностей горного и геологического профиля. Пособие предназначено в первую очередь для студентов и аспирантов, выполняющих научные, исследовательские работы и дипломные проекты, включающие исследовательскую часть. Авторы попытались изложить материал так, чтобы он был понятен любому специалисту, даже никогда не сталкивавшемуся с теорией вероятности и математической статистикой. Это особо важно для специалистов прикладников, когда излагаемый математический аппарат в курсах "высшей математики" и "прикладной математики" очень далек от практического применения в производственных задачах. В силу ограниченного объема, авторы также не претендуют на полное и исчерпывающее изложение теоретических основ этих разделов математики, и ограничиваются только минимумом, необходимым для понимания поставленной задачи. Все, даже сложные математические выкладки, авторы попытались изложить с приведением простых и понятных примеров.

Глава 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло – это один из математических методов исследования, а точнее метод, в основе которого положены базовые понятия теории вероятностей и математической статистики. Иногда его называют методом статистических испытаний, но это не совсем так. Метод статистических испытаний имеет более широкое применение, так как он может выполняться с использованием как математической модели исследуемого объекта (собственно метод Монте-Карло), так и в процессе натуральных экспериментов. В последнем случае все испытания выполняются на реальном объекте исследования. В результате экспериментатор получает самую точную информацию о поведении исследуемого объекта. Однако, надо заметить, что натуральный эксперимент, как правило, очень дорогостоящее мероприятие, в результате которого экспериментатор несет большие материальные затраты, а в отдельных случаях такие эксперименты могут приводить даже к техногенным катастрофам (эксперименты с испытанием ядерного оружия и т.п.).

Официальной датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 год, когда в журнале *Journal of American Statistical Association* была опубликована соответствующая статья С. Улама и Н. Метрополиса. Впрочем, сам термин появился еще во время Второй мировой войны, когда Джон фон Нейман и Станислав Марцин Улам работали в Лос-Аламосе (США) над моделированием нейтронной диффузии в расщепляемом материале, пытаясь совместно с Н. Метрополисом, Г. Каном и Э. Ферми создать первую атомную бомбу.

Свое экзотическое название этот метод получил от названия

района и города Монте-Карло (Monte-Carlo). Монте-Карло – один из крупнейших игорных центров Европы (рис. 1.1), занимающий часть государства (княжества) Монако, расположенного на побережье Средиземного моря. Государство Монако имеет территорию площадью всего в 1,9 км², и большую часть этой территории занимает Монте-Карло. Город получил название в 1866 году по имени первого казино, открытого в 1860 г. [1].



Рис. 1.1. Казино Монте-Карло вскоре после его открытия в 1860 г.

Понятие Монте-Карло непосредственно связано с игорным бизнесом, которому собственно мы и обязаны появлением теории вероятности и математической статистики. Человечеству всегда хотелось обмануть "случай". Независимо, играет оно в рулетку или ведет поиск полезного ископаемого, оно сталкивается со случайными событиями, которые управляют этими процессами, а нам приходится только ожидать счастливого случая, который может наступить для нас сегодня и сейчас, а может не наступить никогда.

Метод Монте-Карло по праву можно отнести к численным ме-

тодам, использующим моделирование входных (исходных) случайных величин, дальнейшее их математическое преобразование в соответствии с исследуемым процессом и построение выходных статистических оценок для искомых величин. Метод Монте-Карло – это практически та самая игорная рулетка, когда процесс повторяется большое число раз. Результаты таких розыгрышей накапливаются, анализируются и на основе наблюдений делаются выводы о наилучшей стратегии выполнения каких-либо процедур.

Надо заметить, что данный метод и в настоящее время применяются не так часто, хотя ему посвящено достаточно много литературы, и даже проводятся специальные конференции. Очень многое о методе Монте-Карло можно почерпнуть в Internet. В чем же здесь причина? Дело в том, что метод требует очень большого числа математических вычислений и даже современным компьютерам требуется значительное время для решения не очень сложных задач. Конечно, можно сделать и меньшее число вычислений, но тогда точность полученных результатов будет неудовлетворительна. Вот почему, например, для моделирования ядерных процессов, где многое основано на случайных событиях синтеза ядер атомов, требуются не просто компьютеры, а так называемые суперкомпьютеры.

Еще одной причиной достаточно редкого применения метода Монте-Карло является то, что все операции проводятся с математической моделью объекта, процесса или системы, которые мы хотим исследовать. А такую модель исследуемого объекта еще надо создать, и не известно будет ли она удачной, а точнее адекватной природному объекту. Вот почему часто данный метод относят к имитационному моделированию, т.е. моделированию на имитациях реального объекта или на математических моделях. В связи с выше сказанным, нам сле-

дует рассмотреть и такие понятия как модель, моделирование и качество моделей.

Слово "модель" происходит от латинского *modus*, что означает "мера", "объем", "образ". В. Даль в толковом словаре живого великорусского языка, например, дает такое определение: модель – это образец в малом виде; предмет, особенно строительный (церковь, корабль, мост) в уменьшенном размере [6].

Нас же должно интересовать значение модели как средства научного познания. Имеется много определений понятия модель. Вот только некоторые из них.

Модель – это:

- эвристический (познавательный) заместитель исследуемого объекта;
- материальная или мысленная имитация реально существующих систем;
- видимое пространственное изображение поверхности сфотографированного объекта при стереоскопическом рассматривании (стереоскопическая и голографическая модели);
- совокупность точек пересечения соответственных проектирующих лучей (геометрическая модель);
- совокупность абстрактных объектов, свойства которых и отношения между которыми удовлетворяют данным аксиомам (модели математической логики);
- устройство, воспроизводящее, имитирующее строение и действие какого-либо другого (моделируемого) устройства в научных, производственных и др. целях;
- аналог, макет или иной вид какого-либо процесса, системы или явления в существенных или наиболее важных для теории и практики их чертах, свойствах и результатах.

Таким образом, модель в широком смысле — это любой образ мысленный, условный или материальный. Это слепок, изображение, символическое описание или выражение, схема, чертеж, график, карта и т. п. какого-либо объекта, процесса, системы или явления (оригинала), используемый в качестве его представителя. Дадим окончательную формулировку.

Модель - это объект любой природы, который способен замещать исследуемый объект так, что его изучение дает новые знания об изучаемом объекте.

С этой формулировкой перекликаются определения модели В.А. Веникова (1964), А.Б. Вистелиуса и др. [3-5,8,9]. Некоторые исследователи склонны приписывать моделированию всеобъемлющее значение в познании. Так, Н.М. Амосов считает, что любая "...информация есть сведения о системе, ее структуре и функции, выраженные моделью... Информация — это всегда модель, всегда упрощение... оригинала, будь то структура или функция".

Согласно определению, модель, с одной стороны, всегда бывает приближенной, упрощенной, в чем-то непременно искажающей действительность; с другой стороны, признаком удачной модели является получение новых сведений об объекте. Это возможно в том случае, если модель правильно отражает главные черты изучаемого явления.

Парадоксальным кажется высказывание Р.А. Нинде: "слишком хорошая модель бесплодна, слишком отдаленная модель вводит в заблуждение" [18]. Более того, как отмечает В.А. Штофф, существование каких-либо определенных различий между моделью и оригиналом является непременным условием тех функций в познании, которые модель выполняет [15,16]. С помощью абстракции и идеализации отбрасываются случайные и несущественные связи, производится от-

влечение от чрезмерной сложности объекта и выделение основных сторон, отображаемых моделью.

Модели делятся на две большие категории: материальные (вещественные) и идеальные. Материальные модели в свою очередь подразделяются на пространственно подобные, физически подобные и математически подобные. Идеальные модели — на образные (иконические), образно-знаковые и знаковые (символические) (Штофф, 1966). Предложены и иные классификации. Так, П. Хаггет и Р. Чорли (1971) подразделяют модели в зависимости от материальной природы на вещественные (в том числе экспериментальные), теоретические, символические, концептуальные и умозрительные, а вещественные модели в свою очередь — на репродукционные и аналоговые. Подобных классификаций не перечислить и мы не будем подробно на них останавливаться, так как нас будут интересовать только математические модели, применяемые в методе Монте-Карло [11].

В науке любой эксперимент, производимый для исследования тех или иных закономерностей изучаемого явления или для проверки правильности границ применимости найденных теоретическим путем результатов, по существу представляет собой моделирование, так как объектом эксперимента является конкретная модель. В научной литературе моделирование понимается довольно широко, как создание образа какого-либо явления или процесса. Моделями в науках о Земле и обществе служат географические (геологические, социологические и т. п.) описания, теории и гипотезы, карты, аэрокосмические снимки, таблицы, профили и диаграммы, математические и логические формулы, уравнения и символы. Моделированием называют опосредствованное практическое или теоретическое исследование какого-либо объекта или явления, при котором изучается не сам объект или явление, а некий его заменитель, вспомогательная искусственная или

естественная система (Новик, Уемов, 1968). При этом модель должна находиться в определенном объективном соответствии с изучаемым процессом или явлением, замещая его на отдельных этапах познания и давая, в конечном счете, сведения о самом моделируемом объекте.

Таким образом, моделирование – это исследование объектов познания на их моделях, иначе - построение и изучение моделей, замещающих реально существующие предметы, явления, процессы и т. п.

Существует три основных метода моделирования: математический, физический и смешанный.

Математические модели отличаются от оригиналов по физической природе, а имеют сходство в том, что описываются одними и теми же математическими соотношениями.

Физические модели схожи с оригиналом по физической природе и геометрическим формам и отличаются от оригинала по размерам, скорости процесса и другим точно учитываемым свойствам. При физическом моделировании между процессом - оригиналом и процессом - моделью должны быть установлены некоторые соотношения подобия.

Физической моделью может считаться установка, в которой осуществлено полное или частичное подобие и соответственно моделирование, что позволяет по характеристикам модели получать все необходимые характеристики оригинала пересчетом с помощью масштабных коэффициентов.

Примерами физических моделей служат макеты вентиляционных сетей шахты, действующие макеты обогатительных аппаратов, установки для изучения процессов разрушения горных пород и др.

Смешанная модель - это сочетание математической и физической моделей, причем та часть процесса, которая наиболее трудна

или не поддается математическому описанию, моделируется физически.

Если на процесс функционирования сложной системы оказывают действие случайные факторы, то применяются как статистические, так и аналитические модели.

Классификация основных методов моделирования представлена на рис. 1.2.

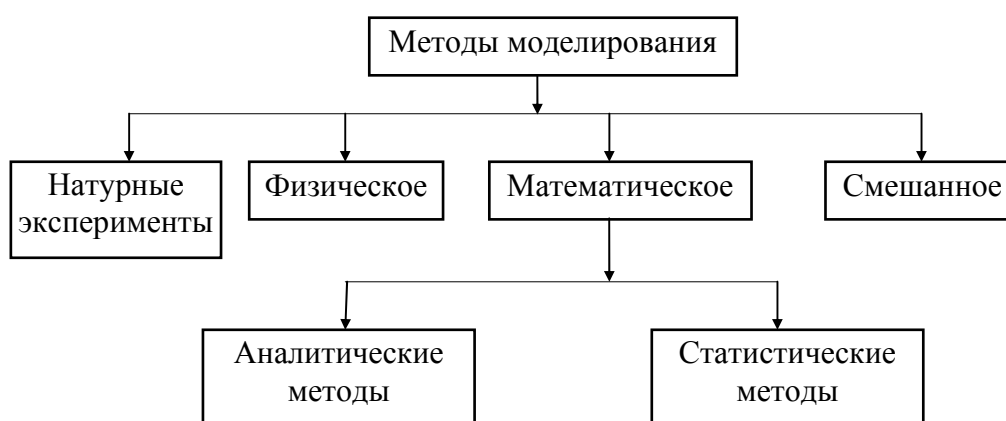


Рис. 1.2. Классификация методов моделирования

За последнее время в связи с развитием вычислительной техники возможности моделирования значительно возросли. Поэтому моделированию как методу отображения реальной действительности или как методу изучения объективных законов, гносеологическим аспектам моделирования, методам построения моделей объектов и решению ряда других общетеоретических проблем за последнее время уделяется значительное внимание [7-10,14]. Высокая эффективность и возрастающая роль моделирования как общего метода изучения явлений материального мира очевидны. Сейчас, пожалуй, нет такой отрасли знаний, где бы оно ни применялось. Требование к точности и достоверности характеристик производственного процесса при наличии случайных факторов обусловило бурное развитие и совершенствование различных разделов прикладной математики. На основе этого

возникло быстро развивающееся направление математического исследования сложных стохастических процессов - так называемое имитационное моделирование [12].

Современные ЭВМ, обладающие мультипрограммным режимом работы, большим объемом памяти, независимой передачей информации между различными видами памяти и другими особенностями организации вычислительного процесса, позволяют реализовать модели весьма большой сложности.

Реализуемый, например, на ЭВМ метод имитационного моделирования уже находит применение при исследованиях, связанных с совершенствованием организации производства, технологии, автоматизации, планирования, учета и управления в промышленности, на транспорте и в других областях народного хозяйства.

Быстрое развитие этого метода является следствием современного развития науки и техники, необходимостью исследования появившихся за последние годы в народном хозяйстве крупных технологических, транспортных, информационных и других комплексов, которые представляют собой весьма сложные системы, имеющие большое число взаимодействующих между собой элементов и оснащенные средствами автоматизированного управления.

Несмотря на развитую теорию аналитических методов, качественный и количественный анализ сложных систем (производственных процессов) аналитическими методами иногда встречает значительные трудности. Аналитические модели по сравнению с статистическими являются более грубыми, так как составлены на основании принятых допущений и упрощений. В этих случаях для исследования сложных систем используют имитационное моделирование, в основе которого лежит численный метод Монте-Карло.

Сущность этого метода при исследовании систем состоит в том,

что процесс имитируется с помощью арифметических и логических операций в той последовательности элементарных актов, которая характерна для моделируемого процесса. При этом в качестве математической модели функционирования системы выступает моделирующий алгоритм, в соответствии с которым в ЭВМ вырабатывается информация, описывающая элементарные явления исследуемого процесса с учетом их взаимного влияния.

Использование моделирующего алгоритма позволяет получить не только конкретные значения характеристик процесса, но и провести качественные исследования для данной системы.

Имитационное моделирование в общем случае включает в себя следующие основные стадии:

- 1) постановка задачи и определение цели эксперимента;
- 2) изучение исследуемой системы;
- 3) формулировка математической модели системы;
- 4) планирование машинных экспериментов;
- 5) составление машинной программы и проведение эксперимента на ЭВМ;
- 6) проверка адекватности математической модели;
- 7) формулировка выводов по данным моделирования и практическое использование результатов моделирования.

Некоторые авторы объединяют часть стадий и выделяют только четыре этапа.

Первый этап — формулирование законов, связывающих основные объекты модели (и объекты реальной изучаемой системы). Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

Второй этап — исследование математических задач, к которым приводит математическая модель. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи, т. е. получение в результате анализа модели выходных данных для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретает математический аппарат, необходимый для анализа математической модели, и вычислительная техника — мощное средство для получения количественной выходной информации как результата решения сложных математических задач. Часто математические задачи, возникающие на основе математической модели различных явлений, бывают одинаковыми (например, основная задача линейного программирования отражает ситуации различной природы). Это даёт основание рассматривать такие типичные математические задачи как самостоятельный объект, абстрагируясь от изучаемых явлений.

Третий этап — выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетическая модель критерию практики, т. е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена (все параметры её были заданы), то определение отклонений теоретических следствий от наблюдений даёт решения прямой задачи с последующей оценкой отклонений. Если отклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые её характеристики остаются не определёнными. Задачи, в которых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, называются обратными задачами. Если математическая модель тако-

ва, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений. Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира.

Четвёртый этап — последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. В процессе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях всё более и более уточняются и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании существующей математической модели, не соответствуют нашим знаниям о явлении. Таким образом, возникает необходимость построения новой, более совершенной математической модели.

Типичным примером, иллюстрирующим характерные этапы в построении математической модели, является модель Солнечной системы. Наблюдения звёздного неба начались в глубокой древности. Первичный анализ этих наблюдений позволил выделить планеты из всего многообразия небесных светил. Таким образом, первым шагом было выделение объектов изучения. Вторым шагом явилось определение закономерностей их движений. Вообще определение объектов и их взаимосвязей является исходными положениями — «аксиомами» — гипотетической модели. Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд последовательных усовершенствований. Первой была модель Птолемея (2 в. н. э.), исходившая из положения, что планеты и Солнце совершают движения вокруг Земли - геоцентрическая модель, и описывавшая эти движения с помощью

правил (формул), многократно усложнявшихся при накоплении наблюдений.

Развитие мореплавания поставило перед астрономией новые требования к точности наблюдений. Н. Коперником в 1543 была предложена принципиально новая основа законов движения планет, полагающая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружности - гелио-центрическая модель. Это была качественно новая (но не математическая) модель Солнечной системы. Однако в данной модели не существовало многих параметров системы (радиусов окружностей и угловых скоростей движения), приводящих количественные выводы теории в должное соответствие с наблюдениями, так что Н. Коперник был вынужден вводить поправки в движения планет по окружности (эпициклы).

Следующим шагом в развитии математической модели Солнечной системы были исследования И. Кеплера (нач. XVII в.), в которых он сформулировал законы движения планет. Положения Н. Коперника и И. Кеплера давали кинематическое описание движения каждой планеты обособленно, не затрагивая ещё причин, обуславливающих эти движения.

Принципиально новым шагом были работы И. Ньютона, предложившего во 2-й половине XVII в. динамическую модель Солнечной системы, основанную на законе всемирного тяготения. Динамическая модель согласуется с кинематической моделью, предложенной И. Кеплером, т. к. из динамической системы двух тел «Солнце — планета» следуют законы Кеплера.

К 40-м гг. XIX в. выводы динамической модели, объектами которой были видимые планеты, вошли в противоречие с накопленными к тому времени наблюдениями. Именно, наблюдаемое движение Урана уклонялось от теоретического вычисляемого движения. У. Лаверье

в 1846 расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетической планетой, названной им Нептуном. Пользуясь новой математической моделью Солнечной системы, определил массу и закон движения новой планеты так, что в новой системе противоречие в движении Урана было снято. Планета Нептун была открыта в месте, указанном У. Лерверье. Аналогичным методом, используя расхождения в теоретической и наблюдаемой траектории Нептуна, в 1930 была открыта планета Плутон.

Метод математического моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математическим задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технические средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники; проектировать новые явления. Математические модели проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономического планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления.

Метод моделирования может быть успешно использован и на стадии проектирования производственных процессов. В этом случае возможность использования статистических данных при составлении математических моделей ограничивается, так как прямое использование статистических данных, возможно только тогда, когда в проектируемый комплекс включается оборудование, ранее применявшееся в других производственных процессах в аналогичных условиях.

Таким образом, исходные данные для построения модели на стадии проектирования являются весьма приближенными. При этом

приближенными являются и данные, характеризующие взаимодействие между отдельными элементами оборудования.

Эти обстоятельства не должны умалять достоинств метода моделирования и не свидетельствуют об отказе от него. В этом случае просто нецелесообразно строить точные модели, учитывающие второстепенные факторы. Для исследования вновь проектируемых процессов обычно строятся грубые модели, отражающие только наиболее существенные стороны процесса.

Моделирование дает возможность вскрыть слабые стороны и дефекты проекта, узкие места и случаи недостаточной согласованности во времени и по производительности отдельных элементов оборудования. Эти данные могут быть полезны для того, чтобы внести окончательные коррективы в проект, сделать принятый вариант более оптимальным, а его характеристики более обоснованными. Особенно большую роль могут найти имитационные модели в автоматизации проектирования. Как известно, одной из проблем автоматизации проектирования является построение модели, имитирующей функционирование проектируемого объекта.

Имитационные модели, в которых имитируется функционирование объекта в различных условиях, снимут с проектировщика всю тяжесть рутинной работы по расчетам и экспериментам. При этом имитационные модели оставят за ним только творческий труд по анализу вариантов, их сравнению и оценке.

Контрольные вопросы:

- 1) Что такое метод "Монте-Карло"?
- 2) Какие методы моделирования существуют?
- 3) Что такое модель?
- 4) Что такое имитационное моделирование?

- 5) Чем вызвано появление метода "Монте-Карло"?
- 6) Где впервые был использован метод "Монте-Карло"?
- 7) Что такое метод статистических испытаний?
- 8) С какой целью применяют математическое моделирование?
- 9) Каким требованиям должна удовлетворять модель?

Рекомендуемая литература:

1. Даль В. Толковый словарь живого великорусского языка. В 4т. Т. 2. - М.: Рус. Яз., 1979. – 779 с.
2. Вайкс А. Энциклопедия азартных игр. Пер. с англ. – М.: Товарищество "Ефрат", 1994. - 240 с.
3. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 312 с.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.
5. Штофф В.А. Моделирование и философия. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1966. - 301 с.: ил.

Глава 2

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. ПОНЯТИЯ И ТЕРМИНЫ

Базовым понятием в методе Монте-Карло, как и в теории вероятностей, является понятие вероятность события.

Событие (случайное событие) – это такое событие, которое при определенной совокупности условий (во время испытаний) может произойти или не произойти. Каждому событию из множества возможных соответствует вероятность события. События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании. События называются **независимыми**, если появление одного события не изменяет вероятности появления другого события. Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытаний появится хотя бы одно из них.

Вероятность – это мера объективной возможности наступления случайного события.

Под вероятностью события A понимают отношение числа наступления этого события (M) к общему числу произошедших событий (N):

$$P(A) = \frac{M}{N}. \quad (2.1)$$

Такое определение иногда называют классическим. В математической статистике под выражением (2.1) понимается "**частота**" – частота наступления определенного события. Вероятность любого

случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей: $0 \leq P \leq 1$. Чем ближе вероятность к единице, тем событие достовернее. Вероятность достоверного события, которое должно обязательно произойти, равна единице $P=1$. Вероятность невозможного события равна нулю $P = 0$. Иногда вероятность выражают в процентах $0\% \leq P \leq 100\%$. Например, если на карьере из десяти работающих экскаваторов два экскаватора (но не одни и те же) постоянно находятся на ремонте вследствие поломок, это означает, что вероятность поломки рабочего экскаватора равна $2/10 = 0,2$. Или как говорят, вероятность выхода экскаваторного парка на работу равна 80%, а вероятность поломки экскаватора составляет 20%. Если рассматриваемые события взаимоисключающие (экскаватор может только работать или не работать) и образуют полную группу – сумма их вероятностей должна быть равна единице или 100%, $80\% + 20\% = 100\%$, а сами события называют противоположными.

Приведем классический пример с однократным бросанием монеты. В результате подбрасывания монеты мы имеем всего 2 события: 1 – монета падает вверх "Орлом"; 2 - монета падает вверх "Решкой". Событие, когда монета может встать на ребро, мы в расчет не принимаем, хотя такое и возможно, но с очень малой вероятностью. Так как события 1 и 2 взаимно исключающие – монета может упасть вверх только "Орлом" или только "Решкой", число выпадений при однократном бросании монеты любого из событий равно единице, а всего возможных событий два. Иначе, вероятность появления события 1 - монета падает вверх "Орлом" равна $P(1) = \frac{1}{2} = 0,5$. Вероятность появления события 2 - монета падает вверх "Решкой" также равна $P(2) = \frac{1}{2} = 0,5$. При этом оба события образуют полную группу, а их суммарная вероятность равна единице $P(1) + P(2) = 1$. Данный результат мы получили на основе теории вероятности.

Можно ли решить эту задачу методом Монте-Карло? Да, можно. Если мы попытаемся провести эксперимент с бросанием монеты не один раз, а несколько - 100, 200, 500 или 1000 раз. И, например, будем отмечать какое количество раз у нас выпал "Орел", то мы заметим, что отношение числа выпадения "Орла" к общему числу бросаний приближается к значению 0,5. Причем, тем ближе, чем большее число бросаний мы произведем. И это естественно. Ведь число выпадений "Орла" и "Решки" будет приблизительно одинаково. Т.е. различие будет, но не таким большим. А делить нам с каждым разом придется все на большее число бросаний. То есть, относительная разность количества событий выпадения "Орла" и "Решки" будет стремиться к нулю

$$[M(1)-M(2)]/N \rightarrow 0,$$

а вероятности выпадения "Орла" или "Решки" будут стремиться к одной второй.

$$[M(1)]/N \rightarrow 0,5,$$

$$[M(2)]/N \rightarrow 0,5,$$

$$\text{при } N \rightarrow \infty,$$

где $M(1)$ – число выпадений "Орла";

$M(2)$ – число выпадений "Решки";

N – общее число испытаний.

Вот мы впервые и применили метод Монте-Карло. Собственно, до появления теории вероятностей человечество так и проверяло свои шансы на выигрыш. Таблица 2.1, приведенная нами, показывает результаты испытаний, проведенные с простой монетой.

Удивительно то, что и сегодня, в век бурного развития космонавтики и информационных технологий, плохие знания в области теории вероятностей заставляют нас "гадать на кофейной гуще". В результате этого, малодостоверная информация принимается за истину,

соответственно принимается ошибочное решение, а в последствии прилагаются огромные усилия, чтобы исправить положение.

Таблица 2.1

Результаты эксперимента по подбрасыванию монеты

Исследователь	Число подбрасываний	Вероятность
Жорж Бюффон	4040	0,507
Огастес де Морган	4092	0,5005
Уильям Джеворнс	20480	0,5068
Вс. Романовский	80640	0,4923
Карл Пирсон	24000	0,5005
Уильям Феллер	10000	0,4979

Конечно на практике, ни кто уже не бросает монету или кости, чтобы получить случайные события. Все эти процедуры за человека выполняют ЭВМ.

2.2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина - это переменная величина x , которая в результате опыта может принимать неизвестное заранее одно из значений x_1, x_2, \dots, x_n , имеющих определенные вероятности p_1, p_2, \dots, p_n .

Случайные величины могут быть:

- *дискретными* или прерывными, если их значения можно перечислить до опыта. Например, при трехкратном бросании монеты "Орел" может выпасть 3, 2, 1 или ни одного (0) раза.

- *непрерывными*, когда случайная величина может принимать бесконечное множество значений. Например: результаты измерения скорости воздушной струи в горной выработке или содержание ценного компонента в геологических пробах.

Так как случайные числа образуют полную группу, сумма их вероятностей должна быть равна единице.

Совокупность значений случайных величин и соответствующих вероятностей называют законом распределения случайной величины.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы плотности распределения для дискретных случайных величин (табл.2.2).

Таблица 2.2

Распределение дискретной случайной величины

X	X₁	X₂	X₃	...	X_n	Итого
P _x	P ₁	P ₂	P ₃	...	P _n	$\sum P_x = 1$

Для непрерывной случайной величины закон распределения задается с помощью функции распределения $F(x)$, представляющей собою вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньше x , т. е.

$$F(x) = P(X < x) .$$

Функция распределения $F(x)$ (иногда называют интегральной или кумулятивной) является неотрицательной и изменяется от нуля при $X = -\infty$ до единицы при $X = +\infty$, то есть $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$ (рис. 2.1).

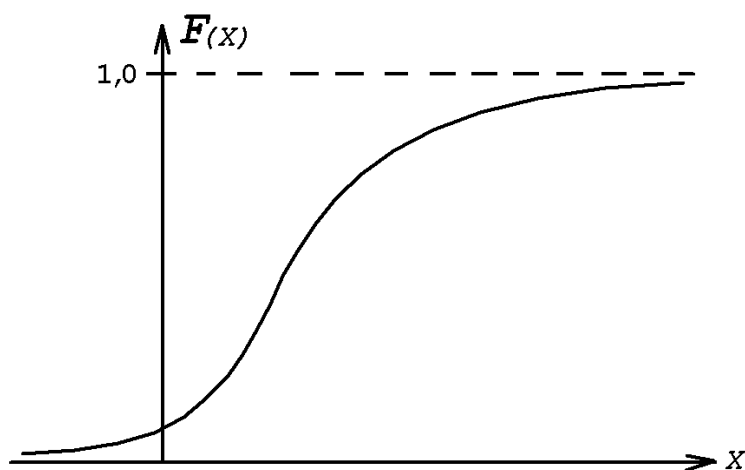


Рис. 2.1. Функция распределения $F(x)$ непрерывной величины X

Вместо функции распределения часто пользуются функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$, которая является производной от функции распределения $F(x)$ (рис. 2.2).

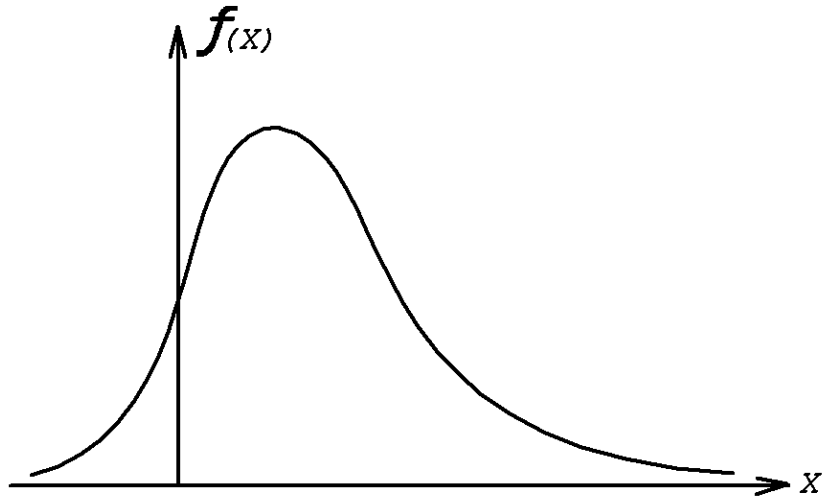


Рис. 2.2. Функция плотности распределения вероятностей $f(x)$

Таким образом,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

или

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения вероятностей неотрицательна, а интеграл от плотности распределения по всей оси абсцисс равен единице, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Вероятность попадания случайной величины x в произвольный интервал (a, b) равна разности значений функций распределения в крайних точках интервала:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a),$$

или

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

2.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Совокупности случайных величин обладают набором определенных характеристик, по которым можно судить о их индивидуальных особенностях и сравнивать между собой.

Математическое ожидание $M(X)$ или среднее значение непрерывной случайной величины X , называется число, определяемое по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx .$$

Для дискретной случайной величины его определяют как сумму произведения всех возможных значений на соответствующие вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P_i ,$$

где X_i – значение i -ой дискретной величины;

P_i – вероятность появления i -ой дискретной величины;

i – общее количество значений дискретной величины.

Мода (M_o) – значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность $f(x)_{\max}$.

Медиана (M_e) - значение случайной величины, которое делит распределение на две равные части. Площади слева и справа от медианы равны (рис. 2.3 и 2.4). Ее значение соответствует вероятности 0,5 на интегральной функции.

Дисперсия $D(X)$ непрерывной случайной величины X - это математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от ее среднего значения, т. е.

$$D(X) = M[x - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx .$$

Для дискретной случайной величины дисперсия равна

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 P_i .$$

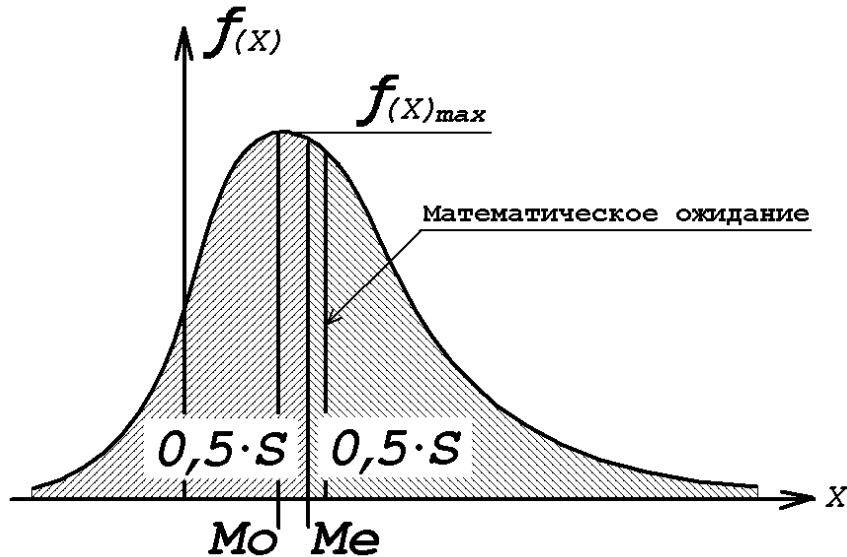


Рис. 2.3. Числовые характеристики распределения непрерывной случайной величины X

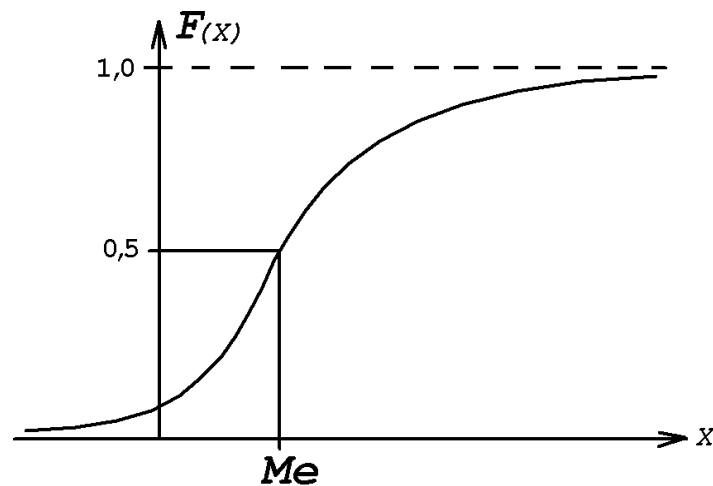


Рис. 2.4. Значение медианы непрерывной случайной величины соответствует накопленной плотности вероятности равной 0,5

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ (иногда называют стандартом) равно квадратному корню из дисперсии

$$\sigma(X) = \pm \sqrt{D(X)} .$$

Коэффициент вариации V – относительная мера общего разброса или колеблемости случайных чисел

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} 100\% .$$

Математическое ожидание и дисперсия обладают рядом свойств:

- математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) ;$$

- математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) ;$$

- среднее квадратическое отклонение среднего арифметического для n одинаково распределенных и взаимно независимых случайных величин в \sqrt{n} раз меньше среднего квадратического отклонения для каждой случайной величины, т. е.

$$\sigma[M(X)] = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} ;$$

- дисперсия постоянной величины K равна нулю:

$$D(K) = 0 \quad \text{при} \quad K = const ;$$

- дисперсия суммы или разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) ,$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) .$$

Или, как говорят, средние квадратические отклонения складываются квадратично

$$\sigma_{(X+Y)}^2 = \sigma_{(X)}^2 + \sigma_{(Y)}^2 ,$$

$$\sigma_{(X-Y)}^2 = \sigma_{(X)}^2 + \sigma_{(Y)}^2 .$$

Контрольные вопросы:

- 1) Что такое случайное событие?
- 2) Что называется вероятностью?
- 3) Дайте определение дискретной и непрерывной случайной величины?
- 4) Что показывает функция плотности распределения вероятностей?
- 5) Что такое математическое ожидание, мода и медиана непрерывной случайной величины?
- 6) Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины?
- 7) Что такое среднее квадратическое отклонение?
- 8) Как вычислить коэффициент вариации?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.

Глава 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Существует очень большое количество распределений непрерывных случайных величин, имеющих математическое выражение. Наиболее распространенными являются следующие распределения непрерывных случайных величин: равномерное, нормальное, показательное (экспоненциальное), логарифмически нормальное, гамма-распределение, Вейбулла и др.

3.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина X , принимающая значения в интервале (a, b) , имеет равномерное распределение, если плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 1 & \text{при } x > b \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ равномерного распределения в интервале (a, b) показаны на рис. 3.1 и 3.2.

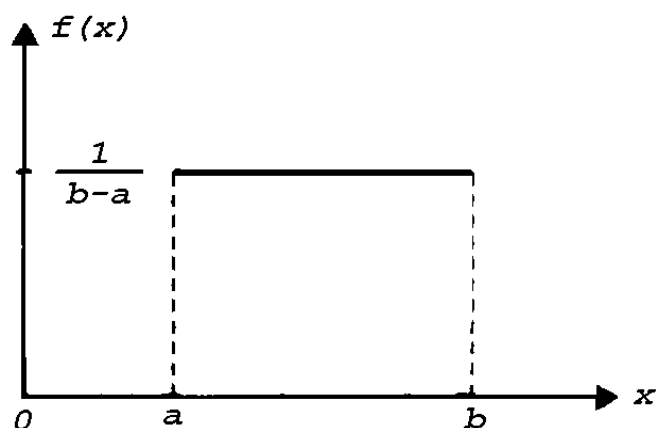


Рис. 3.1. График функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ равномерного распределения в интервале (a, b)

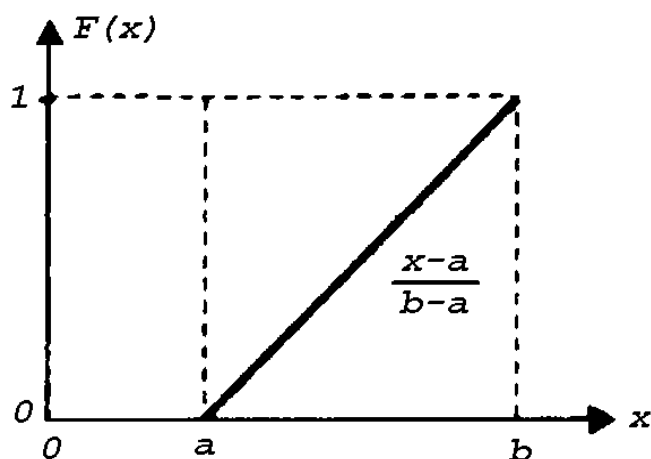


Рис. 3.2. График функции распределения $F(x)$ равномерного распределения в интервале (a, b)

Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины, то есть ее средняя, и медиана определяются как

$$M(X) = Me(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Равномерное распределение используется для генерирования псевдослучайных чисел и при изучении ошибок округления результатов измерений.

3.2. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Это распределение часто называют **законом Гаусса-Лапласа**. Вывел нормальный закон распределения вероятностей француз Де-Муавр. В разработку этого закона, основные идеи которого впервые были использованы в теории ошибок измерений, в XIX в. внесли существенный вклад К. Гаусс и А. Лаплас. К. Гаусс исходил из признания наиболее вероятным значением случайной величины - средней арифметической. Общие условия возникновения нормального закона распределения установил А. М. Ляпунов.

Нормальная кривая этого закона описывается следующей формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x-M(x)]^2}{2\sigma^2}},$$

где x - случайная величина;

$M(x)$ - математическое ожидание или среднее арифметическое;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Функция распределения в этом случае определяется как интеграл плотности распределения вероятностей

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{[x-M(x)]^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Существенными факторами, определяющими центр группирования и форму нормальной кривой, являются параметры математическое ожидание $M(x)$ и среднее квадратическое отклонение σ . График функции плотности распределения представлен на рис. 3.3.

Нормальное распределение признака наблюдается в тех случаях, когда на величину признака явления действует множество случайных независимых или слабо зависимых факторов, каждый из

которых играет в общем итоге относительно незначительную роль (отсутствуют доминирующие факторы).

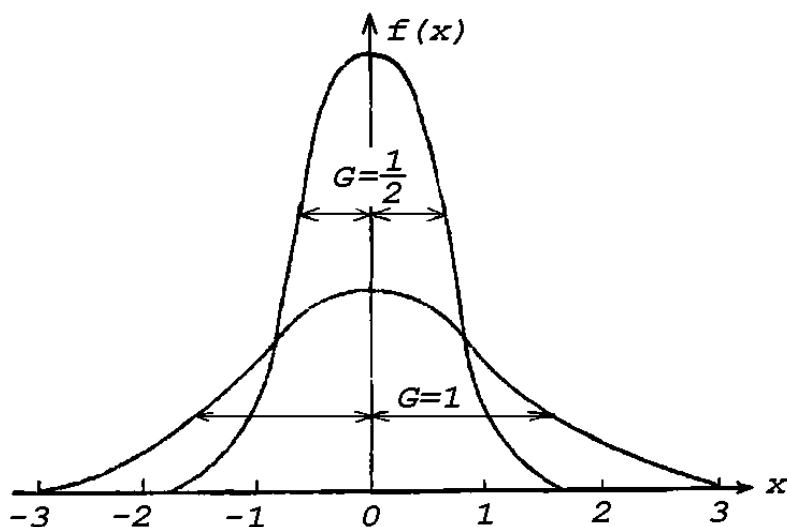


Рис. 3.3. Графики плотности распределения вероятностей при разных значениях среднего квадратического отклонения для нормального распределения непрерывной случайной величины

А. М. Ляпунов доказал, что если изучаемый признак представляет собой результат суммарного действия многих факторов, каждый из которых мало связан с большинством остальных, и влияние каждого фактора на конечный результат намного перекрывается суммарным влиянием всех остальных факторов, то распределение становится близким к нормальному. В математической статистике нормальное распределение играет роль некоторого стандарта, с которым сравнивают другие распределения.

При $M(x) = 0$ и $\sigma = 1$ нормальную кривую называют нормированной кривой или распределением нормальным в каноническом виде. Для такого распределения составлены таблицы функции Лапласа, по выражению имеющему вид:

$$\Phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

С помощью табличной функции Лапласа можно определить вероятность попадания случайной величины x в заданный интервал (a, b) по формуле:

$$P(a < x < b) = \Phi_0\left(\frac{b - M(x)}{\sigma(x)}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - M(x)}{\sigma(x)}\right).$$

3.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Случайная величина называется распределенной логарифмически нормально, если логарифм этой случайной величины распределен нормально.

Логнормальное распределение образуется в результате умножения большого числа независимых или слабо зависимых неотрицательных случайных величин, дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией результата.

Таким образом, в основе логарифмически нормального распределения лежит мультипликативный (умножающий) процесс формирования случайных величин, то есть такой, в котором действие каждого добавочного фактора на случайную величину пропорционально достигнутому ею уровню. Иными словами, когда наблюдаемое значение составляет случайную долю ранее наблюдаемого значения (распределение размера доходов, суммы вкладов в сберкассы, времени безотказной работы приборов и т. д.). В этом случае имеет место симметричность распределения не по отношению к средней арифметической из вариантов, а по отношению к средней арифметической из логарифмов вариантов.

Кривая, изображающая такое распределение, круто поднимается слева и полого спускается справа (умеренная правосторонняя асимметрия рис. 3.4).

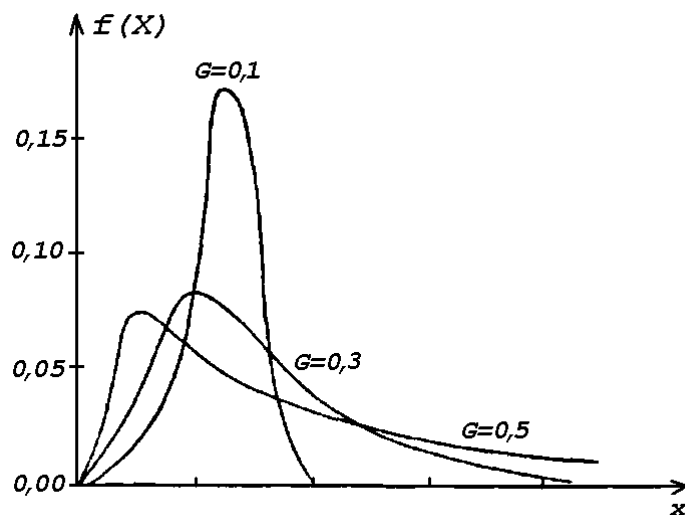


Рис. 3.4. Типовые графики плотности распределения логарифмически нормального закона

Функция плотности логарифмически нормального распределения имеет такой же вид, как и у нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{\log} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\{\ln(x) - M[\ln(x)]\}^2}{2\sigma_{\log}^2}},$$

где x - случайная величина;

$M[\ln(x)]$ - математическое ожидание логарифма случайной величины;

σ_{\log} - среднее квадратическое отклонение логарифмов случайной величины.

Логнормальное распределение определяется двумя параметрами:

средней
$$\overline{\ln x} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i) \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

и среднеквадратическим отклонением логарифмов σ_{\log} .

$$\sigma_{\log} = \sqrt{(\ln x)^2 - (\overline{\ln x})^2}, \text{ или } \sigma_{\log} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\bar{x}^2}\right)};$$

$$\overline{(\ln x)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}.$$

где P_i – вероятность появления случайного числа x_i ;

σ – среднее квадратичное случайных чисел x ;

\bar{x} – среднее арифметическое случайных чисел x .

Если $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, приведенные выражения значительно упрощаются.

При малой дисперсии логнормальное распределение близко к нормальному (см. рис. 3.4).

Отметим некоторые особенности логнормального распределения:

$$\ln Mo = \overline{\ln x} - \sigma_{\log}^2, \text{ или } Mo = e^{(\overline{\ln x} - \sigma_{\log}^2)},$$

$$\ln Me = \overline{\ln x}, \text{ или } Me = e^{\overline{\ln x}},$$

$$\ln \bar{x} = \overline{\ln x} + 0,5\sigma_{\log}^2, \text{ или } \bar{x} = e^{\left(\overline{\ln x} + \frac{\sigma_{\log}^2}{2}\right)},$$

$$\sigma = \bar{x} \sqrt{\left(\frac{\bar{x}}{Me}\right)^2 - 1}, \text{ или } \sigma^2 = \bar{x}^2 \left(e^{\sigma_{\log}^2} - 1\right),$$

$$\text{или } \sigma^2 = e^{2\overline{\ln x} + \sigma_{\log}^2} (e^{\sigma_{\log}^2} - 1),$$

$$Mo < Me < \bar{x},$$

где $\overline{\ln x}$ – среднее из логарифма случайных чисел;

$\ln \bar{x}$ – логарифм арифметического среднего случайных чисел;

\bar{x} – арифметическое среднее случайных чисел;

σ , σ_{\log} – среднее квадратичное отклонение случайных чисел и их логарифмов соответственно.

Опыт показывает, что логарифмически нормальному распределению подчиняются заработная плата рабочих, дебит нефтяных скважин, размеры частиц при их дроблении, содержание редких металлов в руде и т. п.

3.4. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина x , принимающая неотрицательные значения в интервале $(0, \infty)$, имеет показательное распределение, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, \quad x > 0.$$

Функция распределения в этом случае имеет вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}}, \quad x > 0.$$

Числовые характеристики показательного распределения определяются по следующим формулам:

$$M(X) = a,$$

$$D(X) = a^2,$$

$$\sigma(X) = a = M(X).$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ численно равны. Следовательно, показательное распределение имеет только один параметр - интенсивность $\lambda = \frac{1}{a}$.

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ показательного распределения приведены на рис. 3.5 и 3.6.

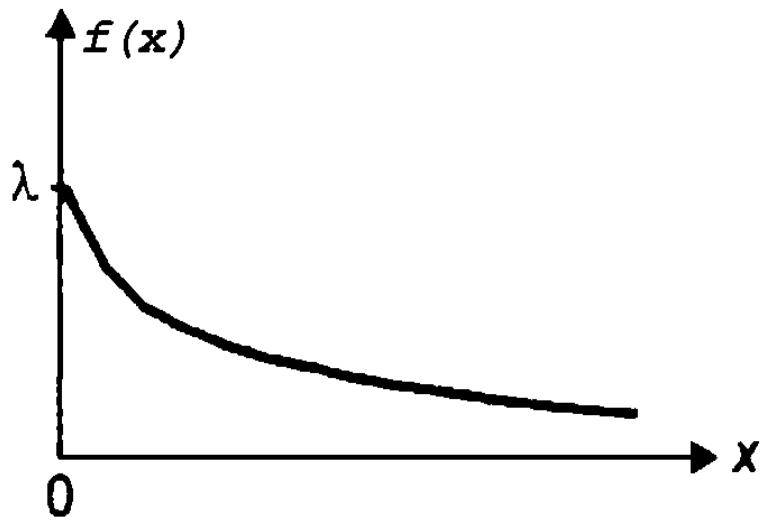


Рис. 3.5. Графики функций плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины с показательным распределением

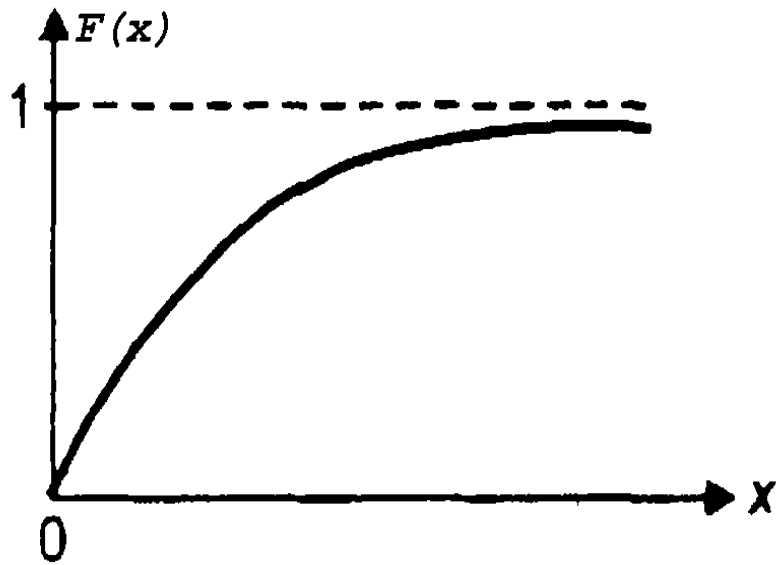


Рис. 3.6. Графики функции распределения $F(x)$ случайной величины с показательным распределением

3.5. ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Это обобщение показательного распределения. Оно представляет собой третий тип кривых Пирсона. Плотность вероятности гамма-распределения равна:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

а интегральная функция

$$F(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx,$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

Для вычисления гамма-функции имеются таблицы нормированного гамма-распределения. Параметры α и β – любые положительные числа. При $x > 0$ для $\alpha = 4$, $\alpha = 2$ и $\alpha = 1$ графики плотности гамма-распределения приведены на рис. 3.7.

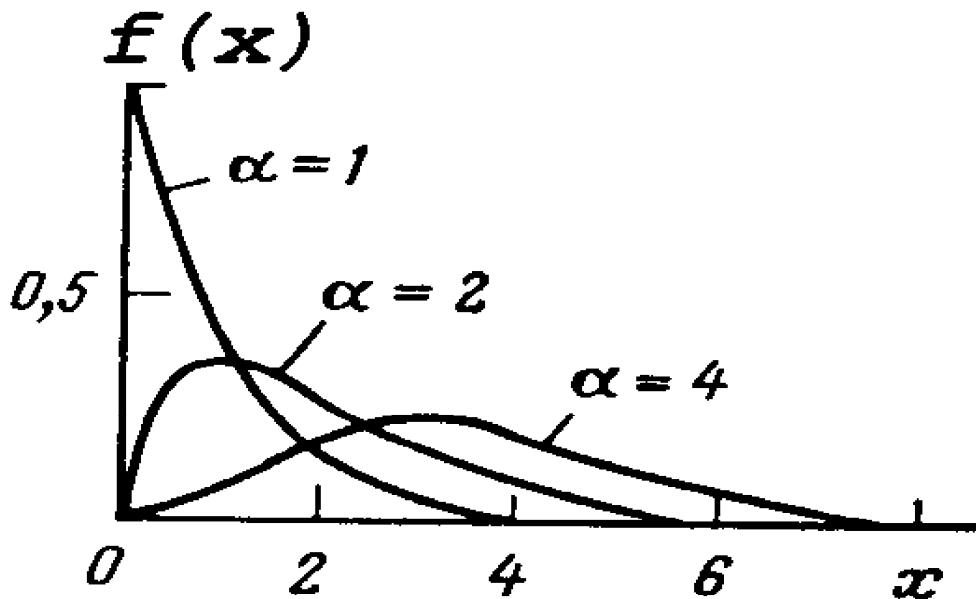


Рис. 3.7. Типовые графики плотности гамма-распределения при $\beta=1$

При $\alpha = 4$ получается нормальное распределение. При $\alpha = 1$ мы получаем экспоненциальное распределение. В зависимости от соотношения параметров α и β кривая плотности распределения имеет различный вид

$$\alpha = \frac{\bar{x}^{-2}}{\sigma^2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{x}$$

где \bar{x} - среднее арифметическое случайной величины или ее математическое ожидание.

Гамма-распределение хорошо описывает распределение величин, ограниченных с одной стороны ($0 \leq x < \infty$), например, время, необходимое для появления ровно k независимых событий (при условии появления событий с постоянной интенсивностью). Используется в теории массового обслуживания, теории надежности и других для построения распределения времени между моментами пополнения запасов.

Частными случаями являются распределения Эрланга, экспоненциальное и распределение χ^2 (хи-квадрат).

3.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙБУЛЛА

Распределение является обобщением показательного и Релеевского распределения для неотрицательных величин x . В математической статистике оно возникает как одно из предельных распределений наименьшего значения выборки. Название этого распределения связывается с именем инженера Вейбулла, который использовал его впервые для анализа прочности на разрыв. Плотность вероятности его при $x > 0$

$$f(x) = nkx^{n-1} e^{-kx^n},$$

а интегральная функция

$$F(x) = 1 - e^{-kx^n}.$$

Параметры распределения k и n любые положительные числа. Основные характеристики распределения Вейбулла.

Математическое ожидание

$$M(X) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) k^{\frac{1}{n}}.$$

Дисперсия

$$D(X) = k^{\frac{2}{n}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right].$$

Мода:

при $n > 1$
$$Mo(X) = \left(\frac{n-1}{kn}\right)^{\frac{1}{n}};$$

при $n < 1$
$$Mo(X) = 0.$$

Медиана

$$Me(X) = \left(\frac{\ln 2}{k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

На характер кривой плотности распределения в большей степени оказывает влияние параметр n . При $n > 1$ кривая имеет вершину, при $n \leq 1$ она асимптотически приближается к оси x . При $n = 2$ распределение Вейбулла преобразуется в распределение Релея, а при $n = 1$ - в показательное.

Параметр k связан с параметром n и средней величиной \bar{x} соотношением

$$k = \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\bar{x}} \right]^n.$$

Параметр n связан с коэффициентом вариации через гамма-функцию

$$V = 100 \sqrt{\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1},$$

это позволяет табулировать параметры k и n относительно коэффициента вариации V , составив соответствующую таблицу (см. табл.3.1) или аппроксимировав эти зависимости уравнениями регрессии

$$n = 0,00591 + 103,57962/v + 123,15992/v^2,$$

$$k = 0,98117 - 0,00388v + 0,00004v^2.$$

Таблица 3.1

Значения параметров k и n в зависимости от коэффициента вариации V

V	n	k	V	n	k	V	n	k
6,2	20,0	0,973	52,3	2,0	0,886	143	0,714	1,24
11,0	10,0	0,951	54,7	1,9	0,887	155	0,667	1,35
19,5	6,0	0,927	57,5	1,8	0,889	167	0,625	1,43
22,4	5,0	0,918	60,5	1,7	0,892	180	0,588	1,54
24,5	4,5	0,913	64,0	1,6	0,897	194	0,556	1,68
28,1	4,0	0,906	68,1	1,5	0,903	208	0,526	1,83
31,6	3,5	0,900	72,3	1,4	0,911	224	0,500	2,00
36,0	3,0	0,893	77,5	1,3	0,924	240	0,476	2,20
40,0	2,7	0,889	83,7	1,2	0,941	257	0,455	2,42
42,8	2,5	0,887	91,0	1,1	0,965	275	0,435	2,68
44,4	2,4	0,887	100,0	1,0	1,00	293	0,417	2,98
46,1	2,3	0,886	110	0,909	1,05	314	0,400	3,32
48,0	2,2	0,886	121	0,833	1,10			
49,6	2,1	0,886	132	0,769	1,17			

Кривые Вейбулла весьма разнообразны (рис. 3.8.)

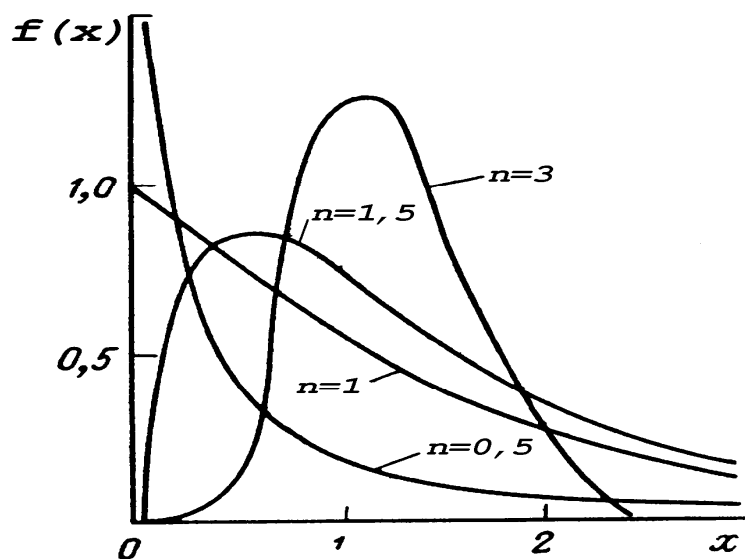


Рис. 3.8. Типовые графики плотности распределения Вейбулла

3.7. УСЕЧЕННОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Усеченное нормальное распределение непрерывной случайной величины x задается четырьмя параметрами: математическим ожиданием $M(x)$, средним квадратичным отклонением $\sigma(x)$, а также максимальными и минимальными значениями x_1 и x_2 (точками усечения).

Функция распределения случайной величины x определяется равенством

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1 \\ A[\Phi_0(t) - \Phi_0(t_1)] & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ 1 & \text{при } x > x_2 \end{cases}$$

где $A = \frac{1}{\Phi_0(t_2) - \Phi_0(t_1)}$, $t = \frac{x - M(x)}{\sigma(x)}$,
 $t_1 = \frac{x_1 - M(x)}{\sigma(x)}$, $t_2 = \frac{x_2 - M(x)}{\sigma(x)}$.

Контрольные вопросы:

- 1) Что такое равномерное распределение?
- 2) Чему равны среднее, медиана и дисперсия равномерного распределения?
- 3) Как еще называют нормальное распределение случайных величин?
- 4) Перечислите особенности логарифмически нормального распределения?
- 5) Какие процессы подчиняются логнормальному распределению?
- 6) Какой вид имеет функция распределения показательного распределения?
- 7) Какими параметрами определяется Гамма-распределение?
- 8) Каковы характерные особенности распределения Вейбулла?

9) Какие еще распределения вы знаете?

10) Какие распределения используются наиболее часто для исследований в горной промышленности?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.

2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.

Глава 4

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Центральная предельная теорема теории вероятностей (теорема А. М. Ляпунова) содержит доказательства того, что если случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n независимы, одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания $M(x_i)$ и дисперсии $D(x_i)$, то распределение суммы этих случайных величин при неограниченном увеличении числа измерений n неограниченно приближается к нормальному распределению. Теорема А. М. Ляпунова сформулирована для непрерывной случайной величины, хотя исторически формулировка ее идеи связана с именами Муавра и Лапласа.

На практике теорему Ляпунова можно использовать уже при $n > 10$. Однако в горно-геологической практике, когда случайные величины имеют значительные по уровню дисперсии (разброс случайных величин может достигать 300%), а количество измерений ограничено и их взаимная независимость не достаточно определена, возможны значительные отклонения от нормального закона распределения.

Теорема Бернулли – при неограниченном увеличении числа независимых наблюдений n частость (m/n) события A сходится (неограниченно приближается) к вероятности этого события P_A . Другими словами, при исследованиях какого либо явления частость его встречи соответствует вероятности его появления.

Данная теорема является основополагающей при постановке экспериментальных исследований. Но, как и в предыдущем случае, ограниченное число наблюдений может приводить к ошибочным результатам.

Контрольные вопросы:

- 1) Сформулируйте теорему А.М. Ляпунова?
- 2) На что указывает теорема Бернулли?
- 3) Какому закону распределения подчиняется наблюдаемая случайная величина при неограниченном росте числа наблюдений?
- 4) Чему равна частота события при неограниченном росте числа наблюдений?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.

Глава 5

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика используется для обработки результатов испытаний (статистических данных) методами теории вероятностей и определения ряда **оценок** статистической выборки.

К задачам математической статистики относятся:

- оценка неизвестной вероятности события;
- оценка неизвестной функции распределения;
- оценка параметров распределения, вид которого известен;
- оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин;
- проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или величине параметров распределения, вид которого известен и др.

Для изучения совокупности однородных объектов или явлений в математической статистике чаще всего используется выборочное исследование.

Генеральная совокупность - множество всех объектов, из которых производится статистическая выборка.

Выборка (статистическая выборка) - совокупность случайно отобранных объектов.

Выборка должна быть **репрезентативной** – представительной или достаточной, то есть в полном объеме представлять генеральную совокупность исследуемых объектов.

Оценка – приближенное значение искомой величины, полученное на основании результатов выборочного наблюдения, обеспечивающее возможность принятия обоснованного решения о неизвестных параметрах генеральной совокупности.

Оценки представляют собой случайные величины. Вот некоторые из оценок: максимально правдоподобное, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее логарифмическое, среднее квадратичное и т.п. Так как существует большое многообразие оценок, в статистике разработаны четыре критерия, которым хорошая оценка должна удовлетворять. То есть оценка должна быть:

- 1) **состоятельной** – стремящейся к своему математическому ожиданию по мере увеличения числа наблюдений;
- 2) **несмещенной** – математическое ожидание выборочной средней такой оценки равно генеральной средней;
- 3) **эффективной** - обладать наименьшей дисперсией;
- 4) **достаточной** (или исчерпывающей) – обеспечивать полноту использования всей содержащейся в выборке информации, то есть такая оценка дает максимальную информацию о выборке.

Контрольные вопросы:

- 1) Что такое генеральная совокупность?
- 2) Что такое выборка из случайных величин?
- 3) Какое понятие вкладывается в слово оценка?
- 4) Каким требованиям должны удовлетворять оценки случайных величин?
- 5) Что такое достаточная оценка?
- 6) Какая особенность у эффективной оценки случайной величины?

- 7) Что означает выражение "состоятельная оценка"?
- 8) Какую особенность имеет несмещенная оценка?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.

Глава 6

ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

6.1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Генеральным средним \bar{X}_G называют среднее арифметическое значений некоторого признака генеральной совокупности. Если все значения x_1, x_2, \dots, x_N различны, то

$$\bar{X}_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

где N – объем генеральной совокупности.

Выборочным средним \bar{x} называют среднее арифметическое значений некоторого признака генеральной совокупности. Если все значения x_1, x_2, \dots, x_n различны, то

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где n – объем выборки.

Выборочное среднее является случайной величиной. В свою очередь, выборочное среднее является несмещенной оценкой и состоятельной. Его математическое ожидание равно генеральному среднему, т.е.

$$M(\bar{x}) = \bar{X}_G.$$

Генеральной дисперсией D_G называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от генерального среднего. Если все значения x_1, x_2, \dots, x_N различны, то

$$D_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X}_G)^2.$$

Выборочной дисперсией D называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от выборочного среднего. Если все значения x_1, x_2, \dots, x_N различны, то

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2.$$

Математическое ожидание выборочной дисперсии:

$$M(D) = \frac{n-1}{n} D_r,$$

то есть выборочная дисперсия является смещенной оценкой относительно генеральной дисперсии. Поэтому в вычислениях лучше использовать исправленную несмещенную оценку дисперсии

$$D_{II} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2.$$

Необходимо заметить, что генеральное среднее и генеральную дисперсию как правило знать не возможно, если только они не получены теоретическим путем. Они представляют собой истинные значения величины, о которой мы судим только по результатам ограниченных опытов. Мы только можем приближаться к истине, а она все время будет оставаться за горизонтом.

Выборочное среднее квадратическое отклонение (стандартное отклонение - стандарт) называется квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

При использовании вычислительных машин лучше использовать выражение вида

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}}.$$

Среднее квадратическое отклонение выборочного среднего – в корень из n (числа измерений) меньше выборочного среднего квадратического отклонения

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕБУЕМОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ

В различных исследованиях часто встает вопрос о количестве опытов. Найденные по данным выборки различные оценки исследуемых параметров представляют собой случайные величины и необходимо знать возможную их ошибку.

Доверительная вероятность – вероятность, которую можно признать достаточной для суждения о достоверности характеристик, полученных на основе выборочных наблюдений.

Предполагая, что случайные ошибки измерений (опыта) подчиняются нормальному закону распределения, в качестве доверительной вероятности принимают $p = 0.68$, $p = 0.95$ или $p = 0.997$. Эти вероятности соответствуют границам колебания полученного результата $\pm 1\sigma$, $\pm 2\sigma$ и $\pm 3\sigma$ соответственно, где 1, 2 и 3 коэффициенты вероятности (иногда обозначаемые как t). Другими словами, если вы установили доверительную вероятность $p = 0,95$ (95% доверительную вероятность), то при большом количестве испытаний, например $n = 100$, только 5 результатов ваших измерений возможно выйдут за эти границы. Если установить доверительную вероятность $p = 0,997$, то при количестве испытаний $n = 1000$, только 3 результата измерений возможно выйдут за эти границы.

Таким образом, доверительная вероятность показывает пределы

границ вероятных колебаний полученного результата

$$(\bar{X} - t\sigma_{\bar{X}}) < \bar{X} < (\bar{X} + t\sigma_{\bar{X}}).$$

Если случайная величина x имеет нормальное распределение, то после определения оценок, характеризующих ее параметры:

$$\text{выборочное среднее} - \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

выборочное среднее квадратическое отклонение –

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}},$$

среднее квадратическое отклонение выборочного среднего –

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Можно утверждать, что найденное выборочное среднее с вероятностью, например 95%, будет лежать в интервале

$$(\bar{X} - 2\sigma_{\bar{X}}) < \bar{X} < (\bar{X} + 2\sigma_{\bar{X}})$$

Ответ на вопрос о количестве испытаний или измерений всегда получают путем решения обратной задачи из выражения

$$n = \left(\frac{\delta}{\sigma_{\bar{X}}} \right)^2,$$

где δ – средняя квадратическая ошибка одного измерения (погрешность испытания);

$\sigma_{\bar{X}}$ - необходимая средняя квадратическая ошибка выборочного среднего из результатов измерений.

Контрольные вопросы:

- 1) Что называется генеральным средним?
- 2) Что такое выборочное среднее из измеренных случайных величин?

- 3) Какое понятие вкладывается в слово генеральная дисперсия?
- 4) Какое понятие вкладывается в слово выборочная дисперсия?
- 5) Что такое выборочное среднее?
- 6) В чем суть выборочных оценок?
- 7) Что означает выражение "доверительная вероятность"? Как она определяется?
- 8) Как определить достаточный объем выборки?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.

Глава 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Процесс получения возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей называется моделированием (или разыгрыванием) случайной величины. Случайные величины можно получать различными способами: по специальным таблицам, механически - бросание монеты или кости (рис. 7.1), измерением шума в электронных лампах или полупроводниках и численным методом.



Рис. 7.1. Примеры древнегреческих и древнеримских костей

Из теории вероятностей известно [2,7], что достаточно научиться находить выборку значений случайной величины, подчиненной какому-нибудь одному закону распределения (будем называть ее "стандартной"), чтобы потом, подбирая соответствующие функции от стандартной случайной величины, моделировать случайные величины с требуемым законом распределения. В инженерной практике, лучшим способом получения случайной величины, конечно, является численный способ с использованием ЭВМ, так как использование таблиц

случайных чисел сильно громоздко, а применение специальных датчиков случайных чисел экономически не выгодно.

Обычно в качестве стандартной случайной величины выбирают непрерывную случайную величину равномерно распределенную в интервале $(0,1)$. Равномерное распределение было рассмотрено нами выше. Основные параметры такого распределения: математическое ожидание $M(X) = 0,5$ и дисперсия $D(X) = 1/12$.

Иногда требуется получить равномерное распределение на интервале (a,b) . Его можно получить простым преобразованием из значений равномерного распределения R на интервале $(0,1)$

$$X_i = a + (b - a) \cdot R_i.$$

Математическое ожидание такого распределения равно

$$M(X) = 0,5 \cdot (a + b),$$

а дисперсия

$$D(X) = (b - a)/12.$$

Большинство современных программных средств, предназначенных для использования на ЭВМ, имеют датчики псевдослучайных чисел равномерного распределения на интервале $(0,1)$ (например: все современные языки программирования Basic, C++, Delphi, электронные таблицы Microsoft Excel, математические процессоры MathCad, MatLab и др.). Псевдослучайные числа обладают как преимуществами, так и недостатками. Обычно в этих программных продуктах применяются рекуррентные формулы, а запас случайных чисел, полученных по любой формуле, ограничен, хотя обычно достаточен для решения практических задач.

Большое преимущество использования псевдослучайных чисел, это возможность воспроизведения одной и той же последовательности случайных чисел в случае контрольных просчетов или отладки программы. Кроме того, программа для расчета псевдослучайных чисел

занимает мало места в памяти ЭВМ, и числа генерируются очень быстро. Однако при особо ответственных расчетах, требуется проверка качества работы датчиков (число нулей и единиц в каждом разряде должно появляться одинаково часто), так как псевдослучайные числа получают специальными вычислительными приемами и в некоторых случаях в цепочке таких чисел начинает проявляться периодичность их появления. Тогда приходится применять более сложные алгоритмы получения случайных чисел или использовать специальные датчики, основанные на шумовых свойствах электронных ламп, транзисторов или радиоактивных элементов.

Контрольные вопросы:

- 1) Какие способы вы знаете генерирования случайных величин?
- 2) Какое распределение случайных величин используют в качестве стандартного?
- 3) Какие параметры имеет стандартное равномерное распределение случайной величины?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

Глава 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

8.1. УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД

Для моделирования случайных величин с непрерывным распределением можно воспользоваться методом обратной функции. Если $F(x)$ - непрерывная и строго монотонная функция распределения, то $F^{-1}(y)$ - обратная к ней функция, полученная путем решения относительно y уравнения $F(y)=x$, преобразует равномерно распределенную на интервале $(0,1)$ величину x в y с требуемой плотностью $f(y)$.

На этом основании можно сделать следующий вывод. Чтобы получить случайное число, принадлежащее последовательности случайных чисел (y) , имеющих функцию плотности $f(y)$, необходимо разрешить относительно y_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{y_i} f(v)dv = x_i,$$

где x_i – случайное число с равномерным распределением в интервале $(0,1)$

На рис. 8.1 показано, как это можно сделать, получив с помощью генератора случайных чисел очередное число x_i , находим точку пересечения прямой с графиком интегральной функции распределения и определяем абсциссу этой точки, которая и будет равна искомому значению случайного числа.

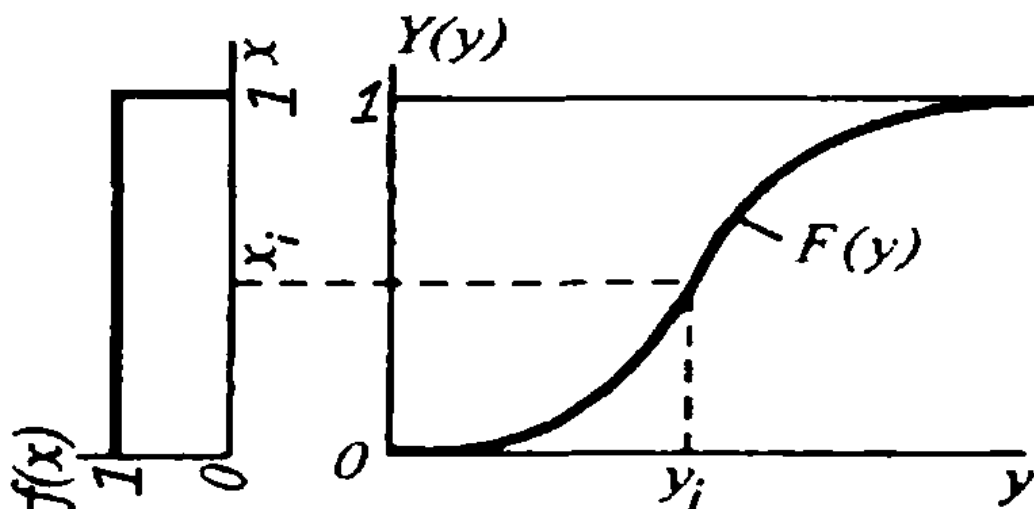


Рис. 8.1. Генерирование случайной величины заданной функции распределения из случайной величины с равномерным законом распределения

Иногда такую задачу удастся решить аналитически и получить замкнутую формулу для генерирования случайных чисел с заданным законом распределения. Но часто не удастся выразить обратную функцию $F^{-1}(y)$ через элементарные, что затрудняет использование "универсального" метода моделирования непрерывной случайной величины.

8.1.1. Показательное распределение

Пусть, например, требуется осуществить генерацию случайных чисел y , с *показательным распределением*, которое задано уравнением

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{y}{a}}, \quad y > 0.$$

Приравняв

$$1 - e^{-\frac{y_i}{a}} = x_i$$

и разрешив уравнение относительно y_i , получим функцию, обратную к функции распределения

$$F^{-1}(R) = -a \ln(1 - R), \quad 0 < R < 1,$$

где R – равномерно распределенная случайная величина на интервале $(0,1)$.

Тогда значения случайной величины y будут получаться по формуле

$$y_i = -a \ln(1-R).$$

Так как случайные величины R и $1-R$ имеют одно и то же равномерное распределение, то в качестве алгоритма моделирования случайной величины y с показательным распределением можно принять несколько более простую формулу

$$y_i = -a \ln(R_i),$$

где R_i – значения датчика случайных чисел с равномерным распределением на интервале $(0,1)$.

Ниже, приведем еще несколько примеров с использованием универсального метода использующего обратные функции, однако без подробных выводов.

8.1.2. Распределение Лапласа

Распределение задается плотностью вида

$$f(y) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|y-m|}{a}}, \quad y \in (-\infty, \infty),$$

и нередко называется *двусторонним показательным распределением*.

Это распределение содержит два параметра: $a > 0$ и $-\infty < m < \infty$.

Функция распределения Лапласа имеет вид

$$F(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y-m}{a}}, & y \leq m \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{y-m}{a}}, & y > m. \end{cases}$$

Алгоритм моделирования случайной величины y_i с распределением Лапласа имеет вид

$$y_i = m + a \ln(2R_i),$$

если получаемая от датчика случайных чисел величина R имеет значение в промежутке $(0, \frac{1}{2}]$,

и $y_i = m - a \ln[2(1-R_i)],$

если величина R имеет значение в промежутке $(\frac{1}{2}, 1)$.

8.1.3. Логистическое распределение

Оно задается функцией распределения

$$F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Функция называется логистической без каких-либо на то причин. Выведена она Верхюлстом в 1845 г. Плотность логистического распределения выражается как

$$f(y) = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2}.$$

Для математического ожидания и дисперсии логистического распределения имеем

$$M(Y) = 0, \quad D(Y) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Отметим, что логистическое распределение широко используется в исследованиях по дозиметрии. Оно является также асимптотическим распределением полусуммы наибольшего и наименьшего значений выборки для симметричного распределения экспоненциального типа.

Алгоритм моделирования логистической случайной величины можно задать формулой

$$y_i = \ln \frac{R_i}{1 - R_i}.$$

8.1.4. Общее логистическое распределение

Его можно определить как распределение случайной величины

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma Z + a,$$

где Z – случайная величина с функцией распределения

$$F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Из этого определения получаем

$$M(Y) = a, \quad D(Y) = \sigma^2.$$

Моделируя случайную величину Z по формуле

$$y_i = \ln \frac{R_i}{1 - R_i},$$

будем получать значения общей логистической случайной величины

$$Y_i = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma \ln \frac{R_i}{1 - R_i} + a.$$

8.1.5. Распределение Вейбулла

Если случайная величина имеет функцию распределения

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{y - \varepsilon}{\nu - \varepsilon} \right)^k \right\}, \quad y \geq \varepsilon,$$

а плотность распределения Вейбулла имеет вид

$$f(y) = \frac{k}{\nu - \varepsilon} \left(\frac{y - \varepsilon}{\nu - \varepsilon} \right)^{k-1} \exp \left\{ - \left(\frac{y - \varepsilon}{\nu - \varepsilon} \right)^k \right\}, \quad \text{для } y \geq \varepsilon,$$

где ε - параметр положения (начала отсчета), $\varepsilon \geq 0$;

ν - параметр масштаба, $\nu > 0$;

k – параметр формы, $k > 0$.

Распределение имеет математическое ожидание

$$M(Y) = \varepsilon + \frac{(\nu - \varepsilon)^2}{k} \Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$$

и дисперсию

$$D(Y) = \frac{(\nu - \varepsilon)^2}{k} \left\{ 2\Gamma\left(\frac{2}{k}\right) - \frac{1}{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right) \right\}.$$

Алгоритм моделирования случайной величины с распределением Вейбулла

$$y_i = \varepsilon + \left[-\ln R_i \right]^{\frac{1}{k}}.$$

Если в распределении Вейбулла $\varepsilon = 0$, $k = 1$, то плотность распределения примет вид:

$$f(y) = \frac{1}{\nu} e^{-\frac{y}{\nu}}, \quad y \geq 0,$$

в котором узнаем *показательное распределение с параметром ν* .

8.1.6. Нормальное Гауссовское стандартное распределение

Оно имеет нулевое среднее $M(Y) = 0$ и единичную дисперсию $D(Y) = 1$. Один из методов получения стандартных нормальных случайных величин из равномерно распределенных величин состоит в построении соответствующего функционального преобразования

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln R_2} \cos(2\pi R_1) \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln R_2} \sin(2\pi R_1) \end{aligned}$$

где R_1, R_2 – пара случайных чисел с равномерным распределением.

Таким образом, каждая пара (R_{2i-1}, R_{2i}) , $i = 1, 2, \dots$, величин последовательности с равномерным распределением порождает пару независимых нормальных величин (y_{2i-1}, y_{2i}) .

Другой путь получения нормальных величин из равномерной

последовательности основан на использовании центральной предельной теоремы Ляпунова (см. выше). В соответствии с ней случайную величину с нормальным распределением можно получить путем простого сложения N равномерно распределенных величин

$$y_i = \frac{(R_k + R_{k+1} + \dots + R_N) - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{12}}}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Этот алгоритм, очевидно, легче реализуем, чем предыдущий, однако он приводит лишь к приближенно нормальным величинам. При этом практически удовлетворительное приближение к нормальному распределению получается уже при $N = 12$. В этом случае выражение немного упрощается

$$y_i = (R_1 + R_2 + \dots + R_{12}) - 6.$$

8.1.7. Общее нормальное распределение

Нормальное распределение с произвольными значениями математического ожидания и дисперсией получают из стандартного нормального распределения путем линейного преобразования:

$$Y = a + \sigma Y_0,$$

где a – математическое ожидание (среднее) моделируемого распределения;

σ – среднеквадратическое отклонение случайной величины.

8.1.8. Логарифмически нормальное распределение

Для моделирования логарифмически нормальной величины Y достаточно смоделировать гауссовскую случайную величину Z с параметрами (m, σ^2) , где m и σ математическое ожидание и стандартное отклонение логарифмов случайной величины Y .

Тогда значения случайной величины Y будут находиться по формуле:

$$y_i = e^{Z_i}.$$

8.1.9. Хи-квадрат распределение

Случайная величина χ^2 может быть представлена суммой квадратов k нормально распределенных случайных величин

$$y_k = \sum_{i=1}^k Z_i^2.$$

Если k случайных величин Z распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $M(Z) = 0$ и единичной дисперсией $D(Z) = 1$, то случайная величина y_k распределена по закону χ^2 с числом степеней свободы, равным k .

8.1.10. Распределение Стьюдента

Стьюдентовым отношением называется случайная величина

$$T_k = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / k}},$$

где случайная величина Z и χ^2 независимы и при этом Z распределена нормально с $M(Z) = 0$ и $D(Z) = 1$, а χ^2 имеет хи-квадрат распределение с k степенями свободы. Такое распределение называют *t-распределением* или *распределением Стьюдента с k степенями свободы*. Распределение названо по псевдониму английского статистика В. Госсета. Плотность этого распределения

$$f_{T_k}(y) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi} \Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{y^2}{k})^{\frac{(k+1)}{2}}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Нетрудно подсчитать математическое ожидание и дисперсию Стьюдентова отношения

$$M(T_k) = 0, \quad D(T_k) = \frac{k}{k-2}, \quad k > 2.$$

8.1.11. Распределение Симпсона

Считается, что величина Z распределена по закону Симпсона на интервале (a,b) , если ее значение равно сумме двух независимых величин X и Y , распределенных равномерно на интервале $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$Z_i = X_i + Y_i.$$

Для моделирования распределения Симпсона необходимо сгенерировать пару равномерно распределенных чисел на интервале $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ и сложить их. Плотность распределения Симпсона получается как свертка плотностей равномерных распределений. Она равна нулю вне промежутка $[a,b]$ и имеет вид:

$$f(z) = \frac{4(b-z)}{(b-a)^2}, \quad \text{для} \quad \frac{a+b}{2} \leq z \leq b$$

и $f(z) = \frac{4(z-a)}{(b-a)^2}, \quad \text{для} \quad a \leq z \leq \frac{a+b}{2}.$

Графическое изображение плотности распределения представлено на рис. 8.2. Распределение Симпсона, очевидно, определяется двумя параметрами a и b . Его математическое ожидание и дисперсия будут равны:

$$M(x) = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

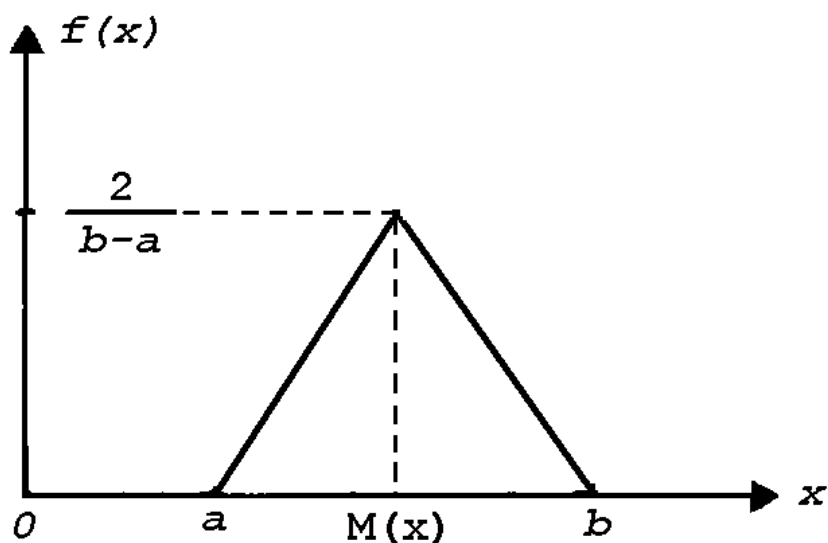


Рис. 8.2. Плотность распределения случайной величины распределенной по закону Симпсона.

Контрольные вопросы:

- 1) В чем сущность моделирования непрерывной случайной величины универсальным методом?
- 2) Какие распределения случайных величин могут быть получены универсальным методом моделирования?
- 3) Какие распределения наиболее часто используются в практике исследований горняков и геологов?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

Глава 9

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотренные примеры генерирования случайных чисел, основанные на использовании метода обратных функций, часто приводят к громоздким вычислениям с большими затратами вычислительных ресурсов. Это имеет место, когда интеграл не берется и приходится прибегать к численным методам его вычисления. Поэтому часто используют приближенные способы генерирования случайных чисел.

Рассмотрим приближенный универсальный способ получения случайных чисел [17], основанный на кусочно-линейной аппроксимации функции плотности распределения для любого распределения. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел y_i с плотностью распределения $f(y)$, возможные значения которой лежат в интервале (c, d) .

Разобьем интервал (c, d) на m интервалов (рис. 9.1) так, чтобы вероятность попадания случайной величины v в любой интервал (c_k, c_{k+i}) была одинаковой, то есть не зависела от номера интервала k и соответствовала условию

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(y) dy = \frac{1}{m}.$$

Тогда случайную величину v можно представить в виде:

$$v = c_k + v_k,$$

где c_k - абсцисса левой границы k -го интервала;

v_k - случайная величина, равномерно распределенная внутри k -го интервала.

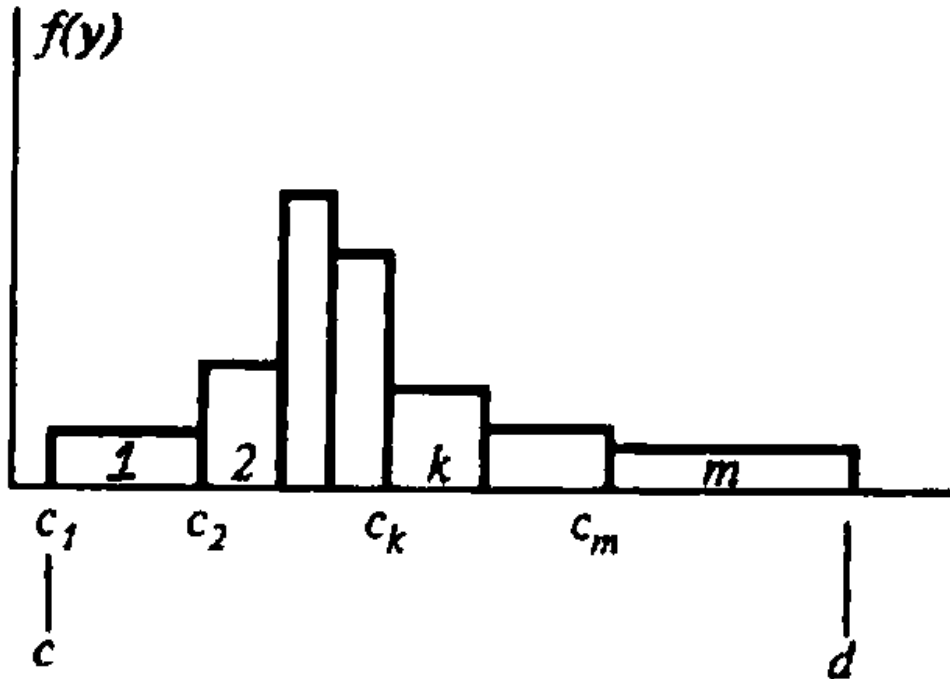


Рис. 9.1. Генерирование случайных величин по плотности распределения

Алгоритм машинной реализации этого способа получения случайных чисел сводится к последовательному выполнению ряда действий, при этом предварительно формируется массив в виде таблицы, устанавливающей соответствие между датчиком случайных чисел и номерами интервалов, с указанием их левых границ. Далее последовательно выполняются следующие процедуры:

- генерируется равномерное случайное число x , из интервала $(0,1)$, которое с помощью таблицы определяет искомый интервал (c_k, c_{k+i}) с известным значением его левой границы;
- генерируется число x_{i+1} и масштабируется с целью приведения его к интервалу (c_k, c_{k+i}) , т. е. находится $(c_{k+i} - c_k) \cdot x_{i+1}$;
- вычисляется искомое случайное число $y_i = c_k + (c_{k+i} - c_k) \cdot x_{i+1}$; с требуемым законом распределения.

Недостатком такого преобразования случайных величин является то обстоятельство, что точность аппроксимации функции плотно-

сти распределения неодинакова во всей области определения. Она зависит от количества интервалов и крутизны функции распределения.

Контрольные вопросы:

- 1) В чем сущность моделирования непрерывной случайной величины методом кусочно-линейной аппроксимации?
- 2) Перечислите преимущества и недостатки метода кусочно-линейной аппроксимации?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

Глава 10

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Так как сумма вероятностей дискретных величин равна единице

$$\sum_{K=0}^n P_K = 1,$$

а выдаваемые датчиком случайные числа распределены на интервале (0,1) равномерно, моделирование дискретных случайных величин выполняют опираясь на эту их особенность. Таким образом, если случайное число, выданное датчиком случайных чисел R_i , попало в интервал P_K , то считают, что случайная величина приняла значение y_K (рис. 10.1). Иными словами считают, что событие y_K произошло, если соблюдается условие

$$\sum_{K=0}^{K-1} P_K \leq R_i < \sum_{K=0}^K P_K .$$

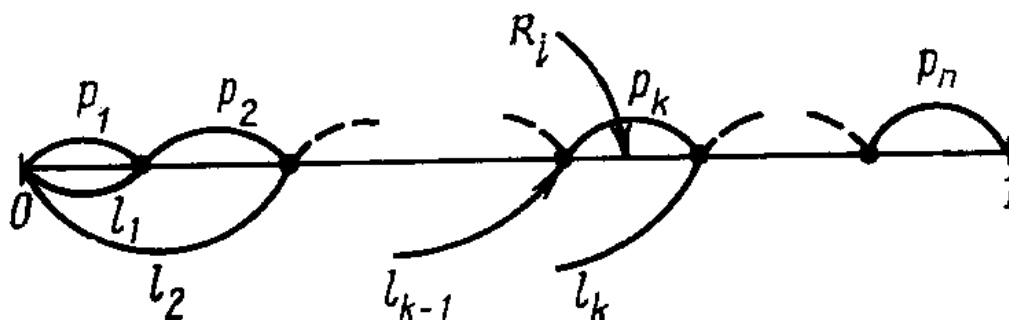


Рис. 10.1. Генерирование дискретной случайной величины

В качестве примера приведем моделирование случайной величины с распределением по закону Пуассона.

10.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Распределение Пуассона это распределение редких событий. По закону Пуассона распределены например: число обрывов нити в прядильном цехе, число встречи бракованных деталей на конвейерной линии, число разговоров, регистрируемое на телефонной станции за определенный период. Случайная величина распределена по закону Пуассона, если она принимает k некоторых целочисленных значений $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями

$$P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

где k – число событий;

a – параметр (математическое ожидание);

e – основание натуральных логарифмов.

Плотности вероятностей некоторых распределений Пуассона показаны на рис. 10.2 – 10.4.

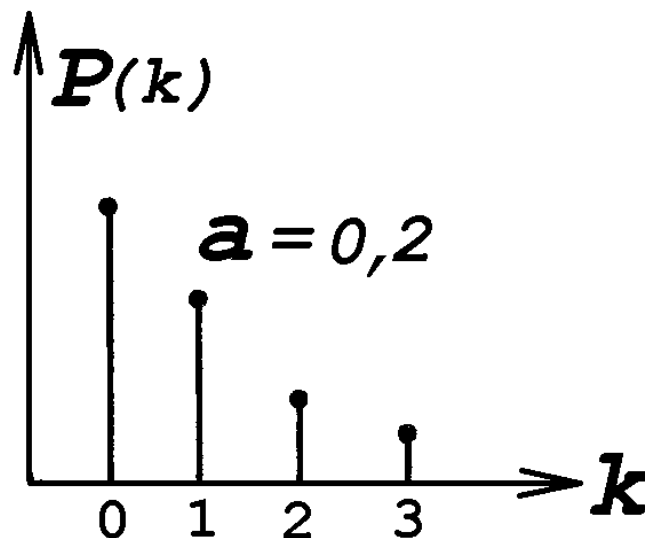


Рис. 10.2. Плотности вероятностей для распределений Пуассона с параметром $a = 0,2$

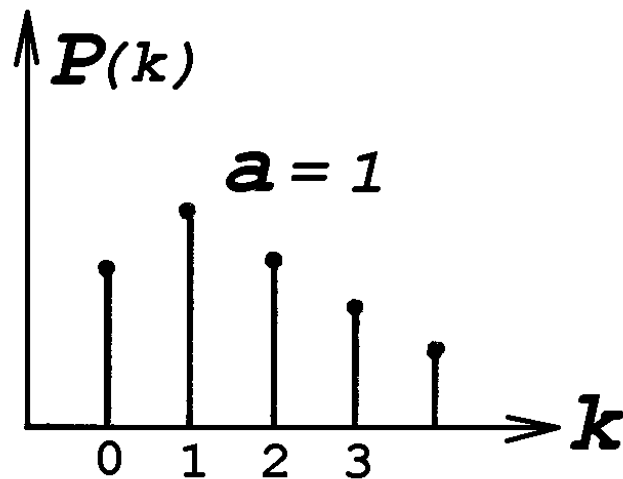


Рис. 10.3. Плотности вероятностей для распределений Пуассона с параметром: $a = 1$

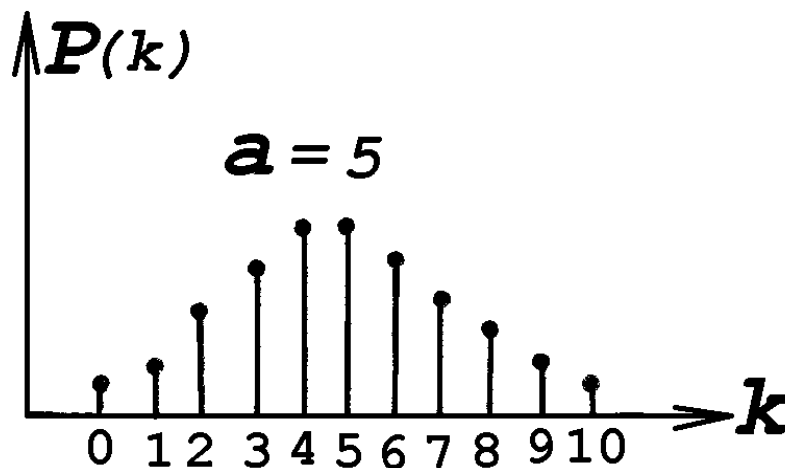


Рис. 10.4. Плотности вероятностей для распределений Пуассона с параметром $a = 5$

Параметрами распределения являются: число возможных событий k и математическое ожидание a . Особенностью Пуассоновского распределения еще является равенство математического ожидания и дисперсии распределения

$$M(x) = D(x) = a.$$

Для моделирования распределения находят все значения интегральной функции распределения

$$F_i = e^{-a} \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!},$$

генерируют случайное число с равномерным законом R_j на интервале $(0,1)$ и проверяют справедливость неравенства

$$F_{i-1} < R_j \leq F_i.$$

То событие, которому удовлетворяет данное неравенство, считается произошедшим.

Контрольные вопросы:

- 1) Как моделируются дискретные случайные величины?
- 2) Перечислите преимущества и недостатки метода моделирования дискретной случайной величины?

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

Глава 11

ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

11.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛА π

В XVIII веке граф Жорж Луи Леклерк де Бюффон сформулировал задачу о нахождении вероятности того, что брошенная на разграфленный лист бумаги игла пересечет одну из линий: имеется серия параллельных линий, проведенных на расстоянии a одна от другой; требуется определить вероятность того, что случайно брошенная игла длиной l (причем, $l < a$) пересечет одну из линий.

Эта задача захватила умы многих исследователей. И сейчас, уважительно называемая теоремой, она имеет ряд интересных приложений. Оказалось, что эта вероятность связана с числом π и равна

$$P = \frac{2l}{a\pi}.$$

Это сделало возможным поиск этого числа вероятностными методами и в том числе методом Монте-Карло. Попробуем и мы посчитать число π , имея в своем распоряжении такой мощный инструмент, как компьютер рис. 11.1. На листе бумаги начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии a . На лист брошена игла длиной $l \leq a$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых? Положение иглы на листе полностью определяется двумя независимыми случайными величинами: углом φ ($0^\circ < \varphi < 180^\circ$) и высотой h центра иглы ($0 < h < l$).

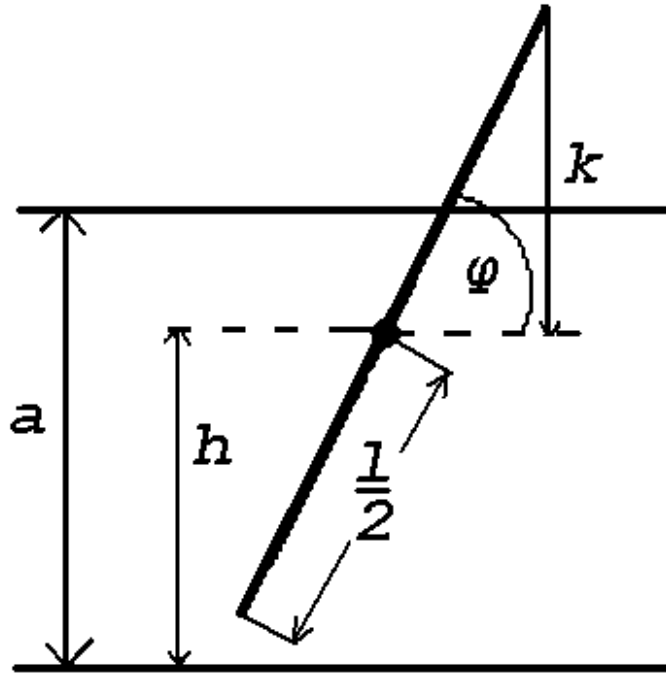


Рис. 11.1. Решение задачи Бюффона

Таким образом, чтобы смоделировать одно падение иглы, нам необходимо «разыграть» величины φ и h . С величиной h все просто. Будем считать, что центр иглы с одинаковой вероятностью может оказаться на всем отрезке $(0, l)$. Таким образом, получим

$$h_i = R_i \cdot l,$$

где R_i – значение случайной величины, имеющей равномерное распределение.

Случайная величина угла φ равномерно распределена на интервале $(0^\circ < \varphi < 180^\circ)$. Поэтому значение φ_i найдем как

$$\varphi_i = R_i \cdot 180.$$

По схеме (рис. 11.1) мы можем определить расстояние k , определяемое как

$$k = \frac{1}{2} l \cdot \sin(\varphi).$$

Очевидно, что при выполнении условий $(l-h) < k$ (для верхней линии) и $h < k$ (для нижней линии) игла пересечет одну из прямых.

Таким образом, для моделирования все готово, и мы можем рассчитать методом Монте-Карло вероятность p того, что игла пересечет линию, а затем и само число π

$$\pi = \frac{2 \cdot l}{a \cdot p}.$$

Воспользуемся для этого общедоступным средством программирования "MathCad". На рис.11.2 представлен код программы моделирования

```

L := 5   a := 5
Pp(N) := | x ← 0
          | for i ∈ 1..N
          |   | h1 ← L·rnd(1)
          |   | k1 ←  $\frac{\mathbf{L}}{2} \cdot \sin\left(\frac{180}{57.3} \text{rnd}(1)\right)$ 
          |   | x ← x + 1 if (L - h1) < k1
          |   | x ← x + 1 if h1 < k1
          | return  $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{N}}$ 

```

Рис. 11.2. Код программы моделирования вероятности пересечения иглой линии в MathCad

Поясним его:

- 1) присваиваем переменным l – длина иглы и a – расстояние между линиями равные значения, так как при таком условии

приближение достигается при меньшем количестве расчетов. Это также можно проверить в процессе моделирования.

2) пишем программу вычисления вероятности для N циклов моделирования $Pr(N)$:

- присваиваем переменной x нулевое значение;
- задаем цикл изменения переменной i от 1 до N ;
- вычисляем переменную h_i ;
- вычисляем переменную k_i , предварительно преобразовав угол φ в радианы ($180rnd(1)/57,3$);
- проверяем оба условия. Если условие выполняется, к переменной x добавляем единицу;

3) по окончании цикла находим частоту x/N (вероятность события) и возвращаем результат.

На рис. 11.3 и в табл. 11.1 приведены результаты расчетов для разного количества циклов моделирования

Таблица 11.1

Результаты моделирования

Число циклов	Результат	Число циклов	Результат
100	2,985	10 000	3,125
500	3,257	100 000	3,139
1 000	3,180	1 000 000	3,143
5 000	3,105		

Следует заметить, что выполнение данной программы на ЭВМ с частотой процессора 2,5 ГГц занимает немного меньше минуты, а увеличение количества циклов свыше указанных, вообще прекращает работу, вследствие ограниченности объемов массива в "MathCad". Это еще раз говорит о сложности применения данного метода даже при наличии современных ЭВМ.

$n := 100$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 2.985$
$n := 500$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.257$
$n := 1000$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.18$
$n := 5000$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.105$
$n := 10000$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.125$
$n := 100000$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.139$
$n := 1000000$	$P_i := \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{P_p(n)}$	$P_i = 3.143$

Рис. 11.3. Результаты моделирования числа π

Рассмотренная задача Бюффона - одно из очень многих приложений метода Монте-Карло. С задачей Бюффона можно встретиться в геологической практике. Например, при решении вопроса о вероятности подсечения рудных тел определенной длины разведочными выработками (линиями). Подобная задача решается и при определении длины шерстинок в ткацкой промышленности.

11.2. РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ЧЕРЕЗ ГРУНТОВУЮ ПЛОТИНУ С ЭКРАНОМ

Данный расчет приводится во всех учебниках по расчету грунтовых плотин. Ниже приводится код программы вычисления расхода воды через грунтовую плотину (рис. 11.4).

Ширина по верху	$B := 5$	Верхний откос 1:4	$m1 := 4$	Нижний откос 1:1,5	$m2 := 1.5$
Высота плотины	$H := 6$	Верхний бьеф	$H1 := 5.5$	Нижний бьеф	$H2 := 0.5$
Коэффициент фильтрации тела плотины	$Kt := 2.5$	Вычисление нормального распределения			
Коэффициент фильтрации экрана	$Ke := 0.1$	PGNorm(K) := $\begin{cases} x \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..12 \\ x \leftarrow x + \text{rnd}(1) \\ x \leftarrow x - 6 \\ \text{return } x \end{cases}$			
Толщина экрана	$Me := 0.01, 0.017..0.5$	Дисперсия	$c := 0.25$		
		Погрешность отсыпки экрана	$g(Me) := c \cdot \text{PGNorm}(Me)$		
Удлинение плотины за счет экрана					
$dl(Me) := Me \cdot \left(\frac{Kt}{Ke} - 1 \right) \cdot \sqrt{m1^2 + 1}$	$dl1(Me) := (Me + c \cdot g(Me)) \cdot \left(\frac{Kt}{Ke} - 1 \right) \cdot \sqrt{m1^2 + 1}$				
$S := m1 \cdot (H - H1) + B + m2 \cdot (H - H2)$	$S1 := m1 \cdot (H - H1) + B + m2 \cdot (H - H2)$				
$L(Me) := \frac{H1 \cdot m1}{(1 + 2 \cdot m1)} + S + dl(Me)$	$L1(Me) := \frac{H1 \cdot m1}{(1 + 2 \cdot m1)} + S1 + dl1(Me)$				
$Q(Me) := Kt \cdot \frac{(H1^2 - H2^2)}{2 \cdot L(Me)}$	$Q1(Me) := Kt \cdot \frac{(H1^2 - H2^2)}{2 \cdot L1(Me)}$				

Рис. 11.4. Код программы моделирования фильтрации через тело грунтовой плотины с экраном в MathCad

С целью упрощения вычислений из программы выброшен блок решения системы уравнений по определению границы высачивания (предполагается, что граница высачивания соответствует нижнему бьефу плотины $H2$). Программа построена таким образом, что первоначально рассчитывается расход воды через грунтовую плотину в зависимости от изменения мощности экрана (рис. 11.5 сплошная линия). Параллельно работает вторая программа тех же самых вычислений, но только в каждое значение мощности экрана вводится ошибка толщины его отсыпки в соответствии с нормальным законом. Такое положение реально существует при производстве отсыпки экранов плотин. Оно вызвано, как неровностью поверхности самой плотины, отсыпаемой часто из разнородного грунта, так и технологией отсыпки самого экрана, имеющего достаточно малую мощность.

Результаты такого моделирования показаны на том же рисунке в

виде точек и средней статистической кривой (рис. 11.5 штрих-пунктир).

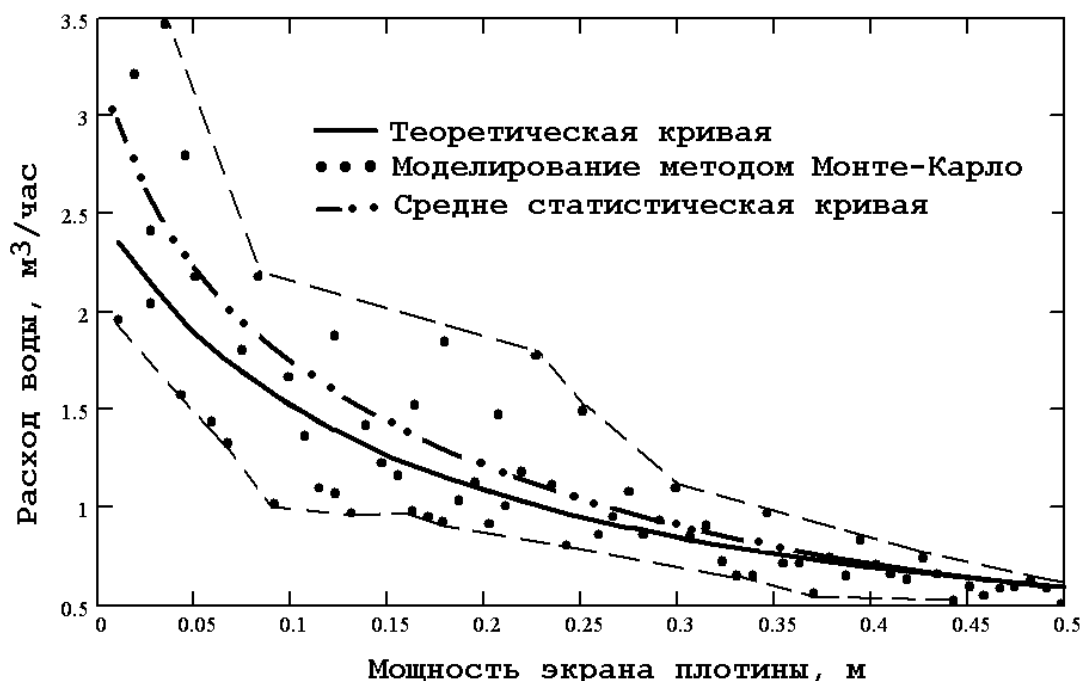


Рис. 11.5. Результаты моделирования расхода воды методом Монте-Карло

Приводимые результаты наглядно показывают, почему часто не подтверждаются проектные решения. Средне статистическая кривая лежит намного выше теоретической кривой и указывает на то, что реальный расход через сооружаемый грунтовый экран будет намного выше рассчитанного по тем же формулам, но без учета погрешности его возведения. Такие ситуации действительно встречаются в практике возведения грунтовых плотин. И только при больших мощностях экрана (свыше 0,5 м), когда ошибки его возведения становятся несущественными, кривые начинают совпадать.

Сама по себе такая реализация метода Монте-Карло не дает оснований к выбору решения, но, получив множество таких реализаций, обработав их как обычный статистический материал, можно определить средние характеристики по множеству и получить представление

о том, как условия задачи и элементы решения влияют на функционирование системы. Расчеты, выполненные по методу Монте-Карло, показывают, что при малой толщине экрана реальный расход воды будет выше расчетного. Это объясняется очень просто. В местах утоньшения экрана воды будет уходить на много больше расчетного, и это никак не компенсируется утолщением экрана в других местах, так как функция расхода не линейна.

Данный пример показывает, как метод Монте-Карло позволяет смоделировать производственную ситуацию (технологические ошибки), которую проектировщик чаще всего не учитывает. Таким образом, при применении метода Монте-Карло случайность используется как аппарат исследования.

Кроме того, в программе использован пример получения случайных чисел с нормальным законом распределения путем суммирования двенадцати случайных чисел с равномерным законом распределения. В качестве замечания отметим, что в программе вычисления случайных чисел с нормальным законом распределения $PGNorm(K)$, при вводе использован неформальный параметр K , который нигде не используется, но вместо его вводятся мощности экрана (можно вводить например, номер цикла). Это требуется, чтобы при каждом последующем обращении к программе датчик случайных чисел не запускался с нуля. Иначе мы будем получать одно и тоже случайное число. Если помните, все программные средства снабжены датчиками псевдослучайных чисел, для возможности повторения результатов. Но это особенности программного комплекса MathCad.

11.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОВНЯ ПОТЕРИ КАЧЕСТВА РУДЫ В ПРОЦЕССЕ ОТРАБОТКИ ПРИКОНТУРНОЙ ПОЛОСЫ

Качество руды, выдаваемой экскаватором при его работе на контуре рудного тела, может определяться различными параметрами, и в частности: значениями бортового содержания, среднего содержания в рудном теле и нелинейности контура рудного тела.

Попытаемся выяснить, как зависит качество выдаваемой руды при изменении одного из данных параметров (рис. 11.6).

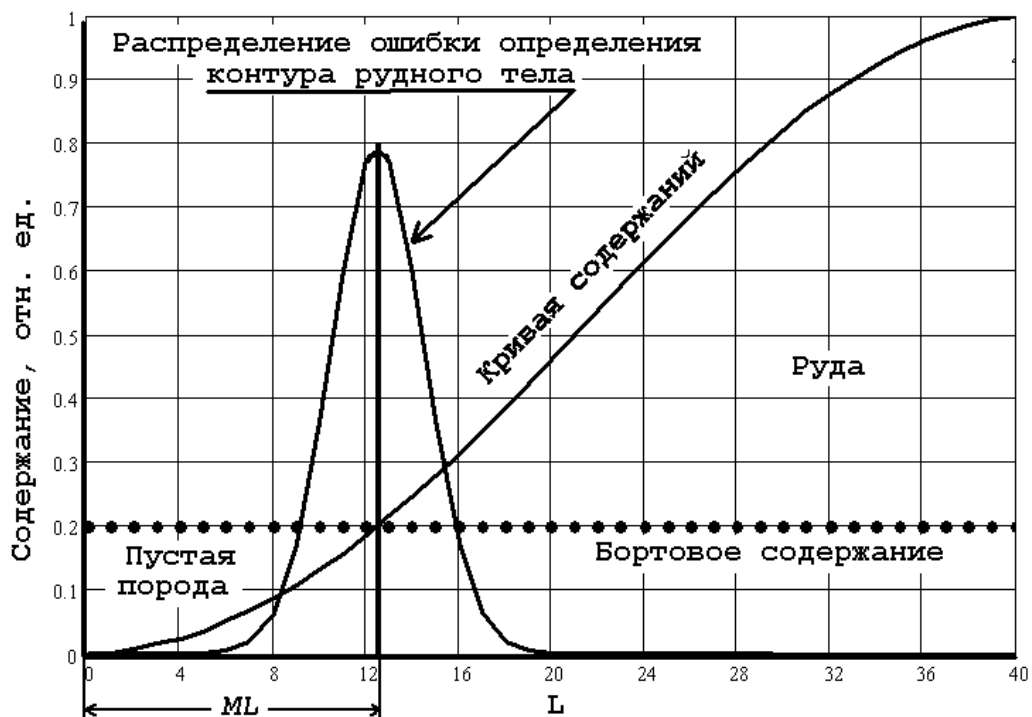


Рис. 11.6. Схема изменения показателей в крест рудного тела

Положим, нам известно как изменяется содержание полезного компонента в руде от пустой породы до центра рудного тела в виде математического уравнения. Известно значение бортового содержания и известна ошибка оконтуривания рудного тела (стандарт отклонения реального контура рудного тела от нарисованного геологом). В этом слу-

чае, при очистной выемке, экскаватор будет захватывать, как пустую породу, так и оставлять богатую руду. При этом можно полагать, что эти отклонения будут подчиняться нормальному закону распределения.

Код выполнения программы в MathCad приводится на рис. 11.7 и 11.8.

```

Исходные данные:
Максимальное содержание, г/т Cm := 100      Бортовое содержание, г/т: Cb := 20
Среднее квадратическое отклонение контура рудного тела G := 2
Ошибка оконтуривания, м
Параметры формы кривой содержания          B := 2      A := 2
Уравнение кривой содержания

$$x(L) := C_m - C_m \cdot \left( \exp \left( A \cdot \ln \left( 1 - \frac{L}{41} \right) \right) \right) \cdot \exp \left[ L \cdot \frac{B - \left( \frac{L}{41} \right)}{42} \right]$$

Выполним поиск расстояния до точки бортового содержания ML
Пересечение кривой содержания с значением бортового содержания
L := 0
Given

$$C_m - C_m \cdot \left( \exp \left( A \cdot \ln \left( 1 - \frac{L}{41} \right) \right) \right) \cdot \exp \left[ L \cdot \frac{B - \left( \frac{L}{41} \right)}{42} \right] = C_b$$

ML := Find(L)          ML = 12.508
Напишем программу генерирования случайных чисел
со стандартным нормальным законом распределения
PGNorm(K) :=  $\begin{cases} x \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..12 \\ x \leftarrow x + \text{rnd}(1) \\ x \leftarrow x - 6 \\ \text{return } x \end{cases}$ 
Приведем нормальное распределение к распределению с
параметрами: математического ожидания ML и стандартом G

$$y(L) := ML + G \cdot \text{PGNorm}(L)$$


```

Рис. 11.7. Код программы выполненный в "MathCad"

```

Вычисляем содержание в разубоживающей породе на интервале 0 - ML
Вычисляем содержание в теряемой породе на интервале ML -40

PGCr(K) := | s ← 0
            | s2 ← 0
            | for i ∈ 0, 0.1..K
            |   | a ← y(i)
            |   | s ← s + x(a) if a < K
            |   | s2 ← s2 + 1 if a < K
            | s ← s / s2
            | return s

PGCp(K) := | s ← 0
            | s2 ← 0
            | for i ∈ K, (K + 0.1) .. 40
            |   | a ← y(i)
            |   | s ← s + x(a) if a > K
            |   | s2 ← s2 + 1 if a > K
            | s ← s / s2
            | return s

Cr := PGCr(ML)      Cr = 15.762
Cp := PGCp(ML)     Cp = 24.995
Вычисляем потерю качества по содержанию   Kp := Cp - Cr      Kp = 9.233

```

Рис. 11.8. Продолжение кода программы выполненной в "Math-Cad"

Если провести различные эксперименты с данной программой, предварительно подставив в нее реальные цифры, взятые на горном предприятии, то можно получить интересные зависимости и в результате, например:

- выполнять прогноз качества руды выдаваемой на обогатительную фабрику;
- оптимизировать точность оконтуривания рудных тел (определить оптимальную плотность разведочной сети).

11.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ РАСТВОРОВ ЧЕРЕЗ ВЗОРВАННЫЙ РУДНЫЙ МАССИВ

Данная задача часто встречается при решении вопросов кучного выщелачивания, подземного выщелачивания и когда надо решить вопрос фильтрации воды через крупнообломочный материал. Практиче-

ски ее решают путем определения скорости просачивания воды через засыпанную в вертикальные колонки рудную массу. Однако, если размеры рудных кусков очень разнородны и больших геометрических размеров, эта задача становится практически не разрешима. Приведем пример такого моделирования.

Пусть мы имеем взорванную рудную массу следующего гранулометрического состава, при кондиционном размере рудного куска 0,3 м (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Гранулометрический состав взорванной руды

Крупность рудного куска, м		Количество фракции	
Границы класса	Верхняя граница класса, d	Содержание фракции, %	Накопленная частота, F
0,000-0,125	0,125	5	0,05
0,125-0,250	0,250	10	0,15
0,250-0,500	0,500	45	0,60
0,500-0,750	0,750	18	0,78
0,750-1,000	1,000	15	0,93
1,000-1,500	1,500	7	1,00

Как отмечалось ранее, чтобы моделировать закон распределения необходимо знать обратную функцию этого распределения. Так как данное распределение природное и не описывается какимлибо теоретическим распределением, для получения обратной функции поступим прямым способом, определив зависимость диаметра рудного куска от его частоты построением уравнения регрессии. Приведем здесь готовое уравнение регрессии (11.1), так как в данном пособии этот вопрос не рассматривается. Подробно о корреляционном анализе можно узнать в [2].

$$d(F) = \frac{F}{0,21346 + 3,26408 \cdot F - 2,76425 \cdot F^2}. \quad (11.1)$$

Данное уравнение имеет высокую степень надежности (аппроксимации): коэффициент корреляции $r = 0,99$ и стандартное отклонение $\sigma = \pm 0,07$ (рис. 11.9).

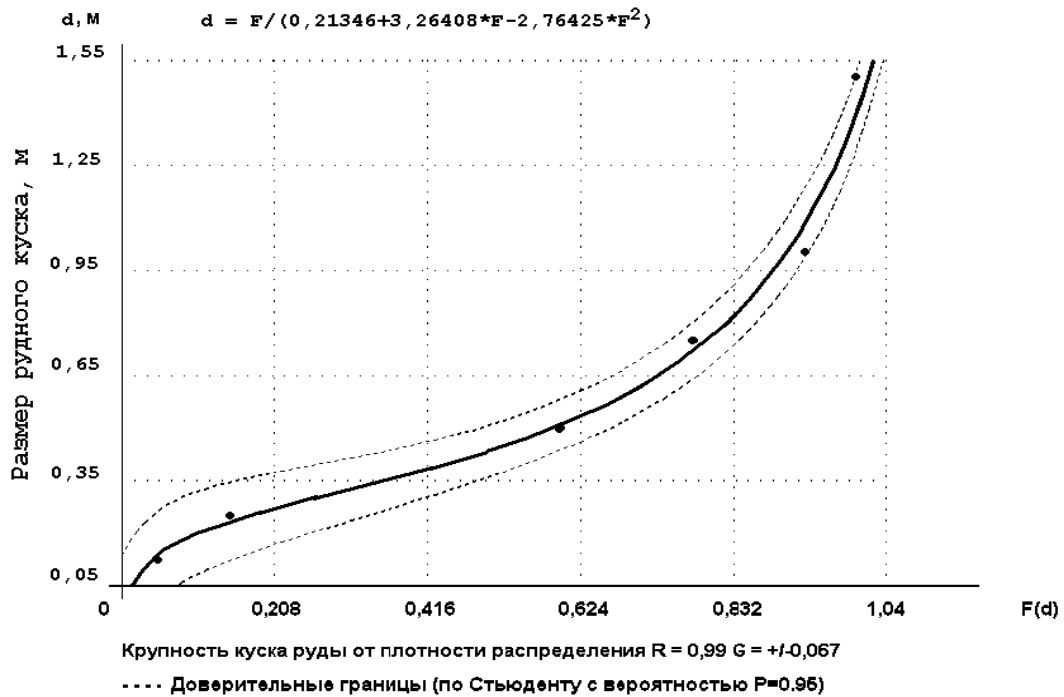


Рис. 11.9. Обратная функция распределения гранулометрического состава руды

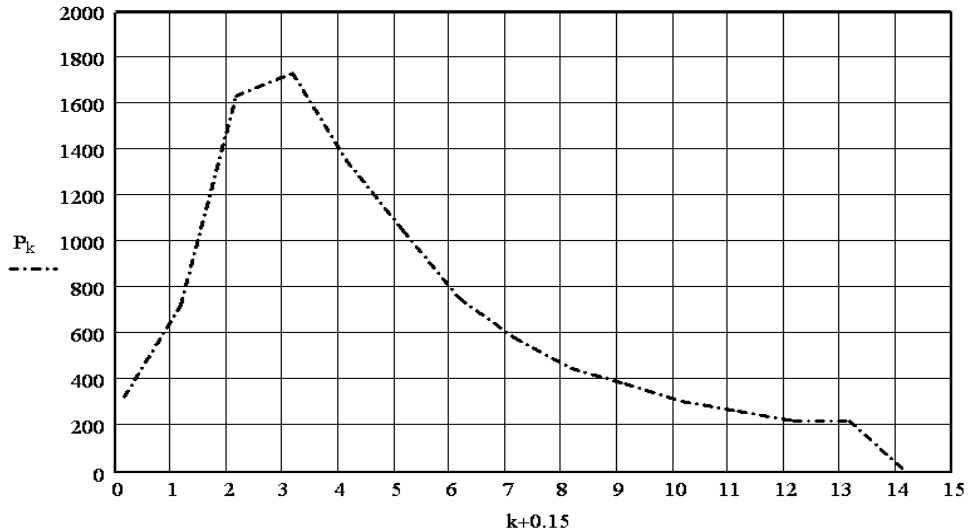
Моделирование выполним с помощью математического процессора MathCad. Полный код программы с соответствующими пояснениями приводится ниже на рис. 11.10 – 11.12.

Моделируем гранулометрический состав рудной массы через обратную функцию

$$i := 1..10000 \quad F_i := \text{rnd}(1) \quad D_i := d(F_i)$$

Проверяем полученную плотность распределения
Чаще встречается размер куска в обламти 0,2 - 0,4 м

$$i := 0..15 \quad \text{int}_i := i \quad P := \text{hist}(\text{int}, D \cdot 10) \quad k := 0..14$$



Среднее распределения $ds := \text{mean}(D) \quad ds = 0.52$
Стандартное отклонение $S := \text{stdev}(D) \quad S = 0.311$

Примем высоту неровностей (шероховатость), м $h := 0.02$

Представим, что рудные куски имеют кубическую форму объемом таким же, как их диаметр D и найдем длину стороны куска

Объем шара $V := \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3$ Объем куба $V := l^3$
Длина стороны куба (длина ровного участка куска руды) $l_i := D_i \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$

Гидравлический радиус $R := \frac{h}{2}$

Предположим, что угол наклона поверхности может меняться от 0 до 180 градусов равномерно по равномерному закону распределения

$\phi_i := \pi \cdot \text{rnd}(1)$ Угол в радианах на интервале от 0 до π

Гидравлический уклон I - тангенс угла наклона поверхности рудного куска или отношение синуса к косинусу угла наклона

$$J_i := \frac{\sin(\phi_i)}{\cos(\phi_i)}$$

Введем ограничения: при уклоне меньше 0,003 вода не течет

Максимальная скорость течения воды равна скорости свободного падения которая зависит от размера рудного куска

$$V_{\text{max}} := \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot l}$$

Средняя скорость свободного падения равна половине максимальной $V_{\text{ср}} := \sqrt{9.81 \cdot \frac{l}{2}}$

Решая обратную задачу можно показать, что максимальная скорость достигается уже при углах наклона 53 градуса т.е. при углах свыше 53 скорость равна средней из максимальной скорости

Рис. 11.10. Код программы выполненный в "MathCad"

Составим окончательное выражение для моделирования

```

PgSped(L, K) :=
  V ← 0
  J ←  $\left| \frac{\sin(K)}{\cos(K)} \right|$ 
  Vm ←  $\sqrt{9.81 \cdot \frac{L}{2}}$ 
  C ←  $25 \cdot \left[ \frac{R}{(80 \cdot R)^6 + \frac{0.025}{\sqrt{J \cdot R}}} \right]^{\frac{1}{6}}$ 
  V ← C ·  $\sqrt{J \cdot R}$ 
  V ← 0 if J < 0.003
  V ← Vm if V > Vm
  return V
  
```

Максимальная скорость воды

Коэффициент Шези

Скорость потока воды

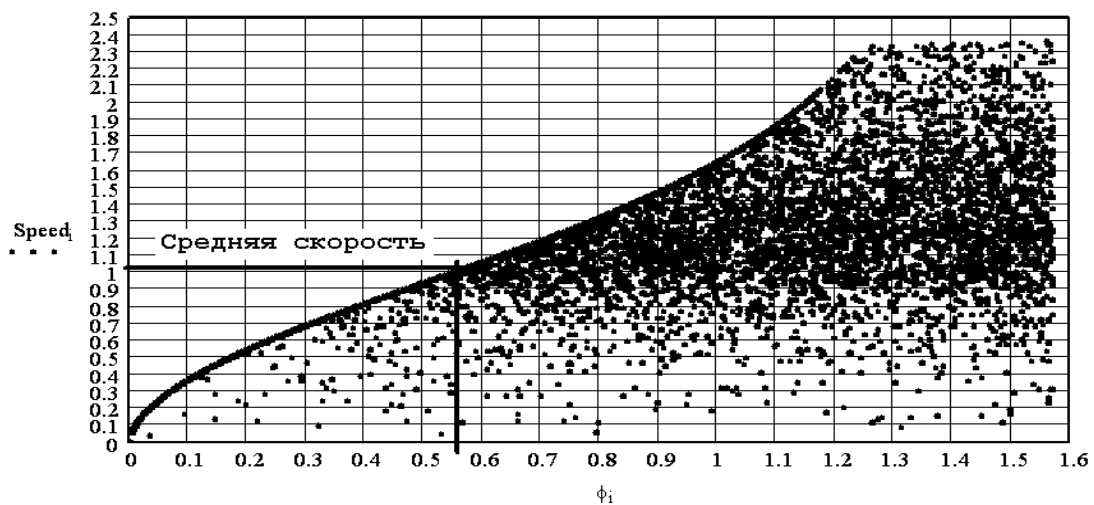
Количество циклов расчета N := 10000 i := 1..N

```

 $\phi_i := \pi \cdot \frac{\text{rnd}(1)}{2}$        $l_i := D_i \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$       Speedi := PgSped(li, φi)
  
```

Средняя скорость потока воды Vcp := mean(Speed) Vcp = 1.035

Стандартное отклонение g := stdev(Speed) g = 0.449



Средняя скорость воды соответствует углу наклона рудного куска 0,56 радиана или 32 градуса (предельная граница)

Рис. 11.11. Продолжение кода программы выполненной в "Math-Cad"

Так как все скорости представляют вектора то необходимо еще найти результирующий вектор средней скорости. Для этого необходимо просуммировать все проекции скоростей на ось X и ось Y

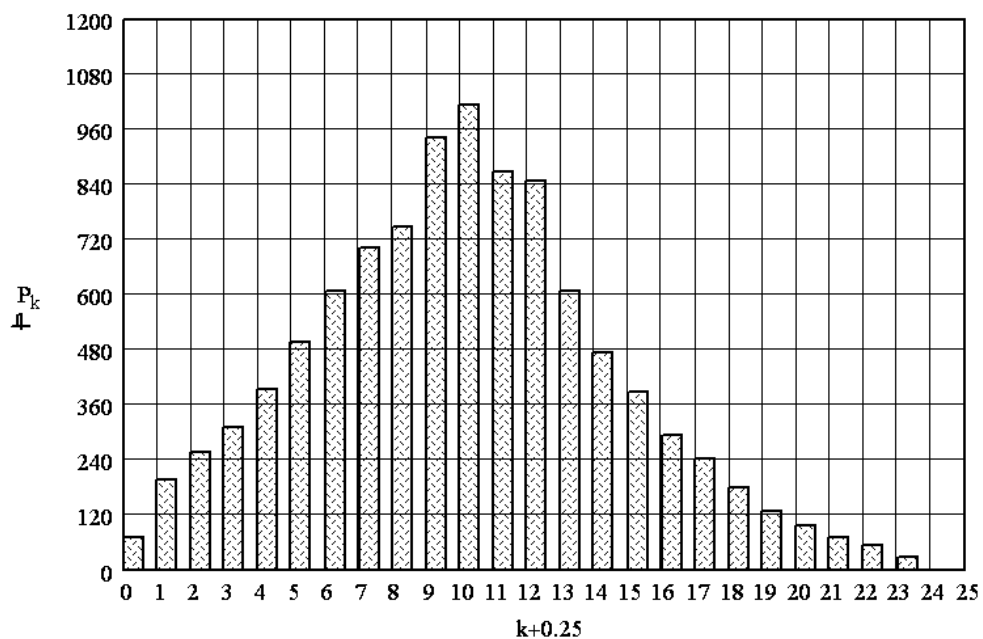
$$X := \sum_i (\text{Speed}_i \cdot \cos(\phi_i)) \quad X = 5.667 \times 10^3 \quad Y := \sum_i (\text{Speed}_i \cdot \sin(\phi_i)) \quad Y = 7.669 \times 10^3$$

Найдем угол, под которым распространяется водный поток

$$a := \text{atan}\left(\frac{Y}{X}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad a = 53.541 \quad \text{Градуса}$$

Построим гистограмму плотности распределения скорости

$$i := 0..25 \quad \text{int}_i := i \quad P := \text{hist}(\text{int}, \text{Speed} \cdot 10) \quad k := 0..24$$



Плотность распределения скорости движения воды практически нормальна, поэтому вычисление как среднего арифметического вполне оправдано

По значению найденного угла и средней скорости определим скорости водного потока в горизонтальном и вертикальном направлениях

$$a := \text{atan}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad a = 0.934 \quad \text{Радiana}$$

$$V_{gr} := V_{cp} \cdot \cos(a) \quad V_{gr} = 0.615 \quad V_{vr} := V_{cp} \cdot \sin(a) \quad V_{vr} = 0.833$$

Таким образом, при орошении и данном гранулометрическом составе руды вода распространяется в стороны под углом 53,5 градуса и:

- горизонтальной скоростью 0,615 м/с;
- вертикальной скоростью 0,833 м/с.

Рис. 11.12. Продолжение кода программы выполненной в "MathCad"

Приведем дополнительные пояснения к программе.

В программе не приведен расчет граничных условий, так как это требует отдельного решения с исследованием формулы коэффициента Шези. С целью большей наглядности моделирование скорости от угла φ приведено только в области от 0° до 90° , так как графики симметричны относительно угла 90° . Предельный угол 32° - это угол, на который может максимально отклониться водный поток, но такая вероятность равна нулю. Так как выполнено 10000 расчетов, все полученные средние значения можно считать найденными с высокой степенью точности, так как увеличение числа прогонов не изменяет конечные значения искомых параметров.

Данный пример показывает, как с помощью метода Монте-Карло, используя вполне доступные средства программирования, такие как математический процессор "MathCad", достаточно просто решаются сложные задачи, в обычных условиях требующие значительных финансовых вложений и трудозатрат.

Контрольные вопросы:

- 1) Какие методы моделирования случайной величины использованы в приведенных примерах?
- 2) Какую первичную информацию надо иметь, чтобы выполнять подобное моделирование?
- 3) Приведите подобные примеры моделирования методом Монте-Карло.

Рекомендуемая литература:

1. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.

2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
3. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.
4. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 312 с.
5. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод Монте-Карло не единственный метод, который может применяться для исследования сложных систем. В настоящее время бурно развиваются достаточно новые методы так называемого интеллектуального направления и, в частности, методы нечеткого моделирования. Нечеткое моделирование – один из прикладных методов новых современных технологий, базирующийся на теории нечетких множеств, основные идеи которой были предложены американским профессором информатики (Университете Калифорнии в Беркли) Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) более 35 лет назад. Нечеткие технологии в большей степени затронули отрасли высоких технологий – проектирование компьютерных интеллектуальных систем и область управления бытовой техникой. С сожалением приходится отметить, что в России разработки, использующие нечеткие множества и нечеткую логику в прикладных целях, практически не выполнялись.

В тоже время применение метода Монте-Карло для исследований, как в крупных научных институтах, так и в студенческой исследовательской практике вполне оправдано и целесообразно. Для внедрения данного метода в учебный процесс достаточно иметь персональный компьютер, составить математический алгоритм исследуемого процесса, или использовать готовый, и воспользовавшись данными рекомендациями и примерами, приступить к исследованиям.

Первоочередной задачей при использовании метода Монте-Карло является задача моделирования случайных величин. Эта задача и рассмотрена в настоящем пособии.

ГЛОССАРИЙ

Вероятность - это мера объективной возможности наступления случайного события.

Выборка - совокупность случайно отобранных объектов.

Выборочная дисперсия - среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от выборочного среднего.

Выборочное среднее - среднее арифметическое значений некоторого признака выборочной совокупности.

Генеральная совокупность - множество всех объектов, из которых производится статистическая выборка.

Генеральная дисперсия - среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от генерального среднего.

Генеральное среднее - среднее арифметическое значений некоторого признака генеральной совокупности.

Дисперсия - это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения.

Доверительная вероятность - вероятность, которую можно признать достаточной для суждения о достоверности характеристик, полученных на основе выборочных наблюдений.

Закон распределения случайной величины - совокупность значений случайных величин и соответствующих им вероятностей.

Имитационное моделирование - как правило, численный метод исследования математической модели реального объекта, процесса или системы.

Коэффициент вариации - относительная мера общего разброса или колеблемости случайных чисел.

Математическое ожидание - случайная величина (оценка), к которой стремится среднее арифметическое случайной величины X , при количестве испытаний, стремящемся к бесконечности.

Медиана - значение случайной величины, которое делит распределение на две равные части.

Метод Монте-Карло - численный метод, использующий моделирование входных (исходных) случайных величин, дальнейшее их математическое преобразование в соответствии с исследуемым процессом и построение выходных статистических оценок для искомых величин.

Мода - значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность.

Моделирование - это исследование объектов познания на их моделях, иначе - построение и изучение моделей, замещающих реально существующие предметы, явления, процессы и т. п.

Модель - объект любой природы, который способен замещать исследуемый (реальный) объект так, что его изучение дает новые знания об изучаемом объекте.

Оценка - приближенное значение искомой величины, полученное на основании результатов выборочного наблюдения, обеспечивающее возможность принятия обоснованного решения о неизвестных параметрах генеральной совокупности.

- **состоятельная** - стремящейся к своему математическому ожиданию по мере увеличения числа наблюдений.

- **несмещенная** - математическое ожидание выборочной средней такой оценки равно генеральной средней.

- **эффективная** - обладающая наименьшей дисперсией.

- **достаточная** - дающая максимальную информацию о выборке.

Плотность распределения вероятностей - функция показывающая вероятность появления той или иной случайной величины.

Репрезентативный - представительный, представляющий.

Случайная величина - переменная величина x , которая в результате опыта может принимать неизвестное заранее одно из значений x_1, x_2, \dots, x_n , имеющих определенные вероятности p_1, p_2, \dots, p_n .

- **дискретная случайная величина** - случайная величина значения которой можно перечислить до опыта.

- **непрерывная случайная величина** - случайная величина, которая может принимать бесконечное множество значений.

Случайная выборка - см. выборка.

Случайное событие - это такое событие, которое может произойти или не произойти.

Среднее квадратическое отклонение - стандартное отклонение, представляющее собой меру колеблемости случайной величины и равно корню квадратному из дисперсии.

Стандарт - среднее квадратическое отклонение.

Теорема Бернулли - при числе наблюдений стремящемся к бесконечности, частота проявления какого либо события стремится к вероятности проявления этого события.

Теорема Ляпунова - закон распределения суммы случайных независимых величин стремится к нормальному закону распределения, при неограниченном увеличении числа этих величин.

Функция распределения - показывает вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньше x .

Частота - абсолютное число, показывающее, сколько раз встретилось (наблюдалось) та или иная случайная величина.

Частость - частота наступления определенного события.

Список использованной литературы

1. Вайкс А. Энциклопедия азартных игр. Пер. с англ. – М.: Товарищество "Ефрат", 1994. - 240 с.
2. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе: Справочник. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
3. Веников В.А. Некоторые методологические вопросы моделирования // Вопросы философии. – 1964. - №11. – С. 73-84.
4. Вистелиус А.Б. Проблемы математической геологии// Геология и геофизика. – 1962. - №12. - С. 3-9.
5. Вистелиус А.Б. Проблемы математической геологии// Геология и геофизика. – 1963. - №12. - С. 3-20.
6. Даль В. Толковый словарь живого великорусского языка. В 4т. Т. 2. - М.: Рус. Яз., 1979. – 779 с.
7. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. - М.: Наука, 1976. - 320 с.
8. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.: ил.
9. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. - М.: Мир, 1968. - 408 с.: ил.
10. Соболевский П.К. Современная горная геометрия// Геометризация месторождений минерального сырья как основа рационального освоения недр: науч. тр. Моск. горн. ин-та. – М., 1969. - С. 18-63.
11. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. - М.: Наука, 1973. - 312 с.
12. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.

13. Терминологический словарь по маркшейдерскому делу/ Под ред. А.Н. Омельченко. – М.: Недра, 1987. - 190 с.

14. Четвериков Л.И. Теоретические основы моделирования тел твердых полезных ископаемых. – Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та, 1968. - 161 с.: ил.

15. Штофф В.А. Гносеологические функции моделей// Вопросы философии. – 1961. - №12.

16. Штофф В.А. Моделирование и философия. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1966. - 301 с.: ил.

17. Яризов А.Д. Моделирование систем. – М.: Изд-во Моск. горн. ин-та, 1975. – 112 с.: ил.

18. Hinde R.A. Models and concept of "drive"// Brit. j. phil. sci. 1954. Vol. 6, N 024. P. 323.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Моделирование и метод Монте-Карло	6
Глава 2. Начальные сведения из теории вероятности	22
2.1. Понятия и термины	22
2.2. Случайные величины	25
2.3. Числовые характеристики случайных величин	28
Глава 3. Распределение непрерывной случайной величины.....	32
3.1. Равномерное распределение	32
3.2. Нормальное распределение	34
3.3. Логарифмически нормальное распределение	36
3.4. Показательное распределение	39
3.5. Гамма-распределение	40
3.6. Распределение Вейбулла	42
3.7. Усеченное нормальное распределение	45
Глава 4. Основные теоремы теории вероятностей.....	47
Глава 5. Начальные сведения из математической статистики.....	49
Глава 6. Параметры распределения	52
6.1. Статистические оценки	52
6.2. Определение требуемого объема выборки.....	54
Глава 7. Моделирование случайных величин	57
Глава 8. Моделирование непрерывной случайной величины	60
8.1. Универсальный метод	60
8.1.1. Показательное распределение	61
8.1.2. Распределение Лапласа	62
8.1.3. Логистическое распределение	63
8.1.4. Общее логистическое распределение	64

8.1.5. Распределение Вейбулла	64
8.1.6. Нормальное Гауссовское стандартное распределение	65
8.1.7. Общее нормальное распределение	66
8.1.8. Логарифмически нормальное распределение	66
8.1.9. Хи-квадрат распределение	67
8.1.10. Распределение Стьюдента	67
8.1.11. Распределение Симпсона	68
Глава 9. Кусочно-линейная аппроксимация функции плотности распределения	70
Глава 10. Моделирование дискретной случайной величины	73
10.1. Распределение Пуассона	74
Глава 11. Примеры практического применения метода Монте-Карло	77
11.1. Вычисление числа π	77
11.2. Расчет фильтрации воды через грунтовую плотину с экраном	81
11.3. Моделирование уровня потери качества руды в процессе отработки приконтурной полосы	85
11.4. Моделирование фильтрации растворов через взорванный рудный массив	87
Заключение	95
Глоссарий	96
Список использованной литературы	99

Смолич Сергей Вениаминович

Смолич Константин Сергеевич

**Решение горно-геологических задач
методом "Монте-Карло"**

Учебное пособие

Лицензия ЛР №020525 от 02.06.97

Редактор А.А. Чумакова

Сдано в производство 20.11.04

Форм. бум. 60x84 1/16

Печать офсетная

Уч. - изд. л. 4,4

Тираж 75 экз.

Бум. тип. №2

Гарнитура литературная

Усл. печ. л. 4,2

Заказ № 13

Читинский государственный университет
672039 Чита, ул. Александрово-Заводская, 30

РИК ЧитГУ