СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

КНИГА 1

528(03)
С741

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

Под редакцией заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, проф. д-ра техн. наук *В. Д. Большакова* и проф. д-ра техн. наук *Г. П. Левчука*

(В ДВУХ КНИГАХ)

578902

КНИГА 1

Третье издание, переработанное и дополненное

МОСКВА „НЕДРА" 1985

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ВЗПИ

УДК 528 (038)

Справочник геодезиста: В 2-х книгах. Кн. 1/Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Недра, 1985. — 455 с.

Третье издание (2-е — 1975) переработано и дополнено в соответствии с новейшими достижениями геодезической науки и практики. Изложена методика математической обработки результатов геодезических измерений. Описана вычислительная техника, применяемая в геодезии. Показано использование искусственных спутников Земли в геодезических целях. Большое внимание уделено основным геодезическим работам.

Для инженеров и техников, выполняющих основные геодезические работы и топографические съемки, а также изыскания и разбивки инженерных сооружений; будет полезен для преподавателей, аспирантов и студентов геодезических специальностей высших учебных заведений.

Табл. 56, ил. 102; список лит. — 41 назв.

Рецензенты: *М. Н. Булушев*, д-р техн. наук (Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева); *А. В. Гордеев*, д-р техн. наук (Московский институт инженеров землеустройства); *М. М. Машимов*, д-р техн. наук (Военно-инженерная академия им. В. В. Куйбышева); *В. К. Панкрушин*, д-р техн. наук (Новосибирский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии); *Е. М. Рывина*, канд. техн. наук (Московский гидромелиоративный институт); *Г. Е. Рязанцев*, канд. техн. наук (Государственный союзный проектный институт); *А. А. Синдеев*, канд. техн. наук (Центральный научно-исследовательский институт инженеров геодезии, аэросъемки и картографии); *В. С. Сытник*, канд. техн. наук (Центральный научно-исследовательский и проектно-экспериментальный институт организации, механизации и технической помощи строительству); *А. П. Тищенко*, канд. техн. наук (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова).

С $\frac{1902020000-431}{043\ (01)-85}$ 13—85

© Издательство «Недра», 1985

ПРЕДИСЛОВИЕ

Третье издание Справочника переработано и дополнено в соответствии с новейшими достижениями геодезической науки и практики.

Введены новые главы: «Гироскопическое ориентирование», «Космическая фотосъемка», «Автоматизация инженерно-геодезических измерений». Существенно переработаны главы: «Метод наименьших квадратов», «Измерение расстояний свето-и радиодальномерами», «Геодезическая астрономия», «Топографические методы съемки». Переработаны и дополнены главы: «Вычислительная техника в геодезии», «Космическая геодезия», «Прикладная геодезия». Внесены изменения и в другие главы. Отражены технические и точностные требования новых нормативных документов.

Справочник выпускается в двух книгах, имеющих каждая свою нумерацию страниц, рисунков и свой предметный указатель.

РАЗДЕЛ I
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.1. ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

В. Д. Большаков

А. Элементы теории вероятностей и математической статистики

I.1.1. Общие понятия

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая количественные закономерности случайных явлений.

Случайное явление — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта, наблюдения протекает каждый раз несколько по-иному. Однако при массовых испытаниях случайные явления обнаруживают вполне определенные закономерности (примерно одинаковое число выпадений гербов и цифр при бросании монеты, более частое попадание в центральную часть мишени, чем на ее края, и т. д.).

Осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта будем называть испытанием. Результат испытания назовем событием (например, при подбрасывании монеты могут происходить два события: появление герба, появление цифры). События условно можно разделить на элементарные, которые нельзя разложить на более простые, и сложные, состоящие из двух или более элементарных событий (например, появление положительной ошибки при одном измерении — элементарное событие, появление пяти положительных ошибок при 10 измерениях — сложное событие). При выполнении определенного комплекса условий различают события следующих видов:

1. Достоверные, т. е. такие, которые обязательно происходят (например, появление герба или цифры при одном бросании монеты).
2. Невозможные, которые никогда не происходят (например, появление белого шара при взятии из урны, где только черные шары).
3. Несовместные, которые не могут произойти вместе (например, появление герба и цифры при одном бросании монеты).
4. Совместные, которые могут происходить одновременно (например, попадание снаряда в цель и срабатывание взрывателя).
5. Полную группу событий, которую образуют такие события, одно из которых при испытании обязательно происходит. Полная группа — достоверное событие (например, выпадение одной из граней при бросании игральной кости).
6. Противоположные события — два несовместных события, образующих полную группу.

7. Равновозможные события — события, имеющие одинаковую объективную возможность появления.
8. Независимые события — события, появление которых не зависит от того, появились или не появились другие события. Например, выпадение герба в i-м бросании монеты не зависит от того, какая ее сторона выпала в предыдущем i — 1-м бросании.
9. Зависимые события — такие, у которых возможность появления зависит от того, произошли или не произошли другие события (например, возможность вынуть один шар из урны, содержащей n шаров, если уже вынули k шаров и шары обратно не возвращали).

События обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ... или A_1, A_2, ..., A_n.

Достоверное событие обозначают буквой U, невозможное — буквой V, противоположное по отношению к событию A — буквой $\bar{A}$.

Если вероятность события сколь угодно близка к единице или нулю, событие называется практически достоверным или соответственно практически невозможным. Степень приближения к единице или нулю оценивается исходя из практических соображений.

Пример 1. При артиллерийской стрельбе из 1000 снарядов, выпущенных из орудий, 999 разрываются, один снаряд не разрывается. Вероятность неразрыва снаряда равна 0,001, разрыва — 0,999. Событие «неразрыв снаряда» при одном выстреле можно считать практически невозможным, событие «разрыв снаряда» — практически достоверным.

I.1.2. Схема случаев. Непосредственный подсчет вероятностей

С каждым событием связывают понятие вероятности — числовой характеристики объективной возможности появления события. Существуют события, вероятность которых можно определить из условий самого опыта, не производя его. Для этого необходимо, чтобы элементарные события, составляющие полную группу, были несовместными и обладали симметричным исходом и в силу этого были бы равновозможными. Говорят, что в этом случае опыт сводится к «схеме случаев». Случай называется благоприятствующим некоторому событию A, если этот случай влечет за собой появление данного события A. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A можно оценить по формуле

$$p(A) = m/n, \qquad (I.1.1)$$

где n — общее число случаев; m — число случаев, благоприятствующих событию A. При этом $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$ — для любого события и $0 < p(A) < 1$ — для случайного события, причем вероятность достоверного события, как следствие, $p(U) = 1$, невозможного — $p(V) = 0$.

Формулу (I.1.1) называют классическим определением вероятности, а вычисления по этой формуле — непосредственным подсчетом вероятностей. Применяя формулу (I.1.1), найдем, что вероятность появления герба при одном бросании монеты

$$p_{\text{герба}} = 1/2.$$

Этому же числу равна вероятность появления положительной (отрицательной) ошибки при одном измерении: $p(\Delta > 0) = p(\Delta < 0) = 1/2$, где Δ — случайная ошибка.

Вероятность выпадения грани с цифрой 6 при одном бросании игрального кубика

$$p_6 = 1/6.$$

Пример 2. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белые

Так как число благоприятствующих случаев $m = C_a^2$, где C_a^2 — число сочетаний из a белых шаров по 2, а число всех возможных случаев составляет

$$n = C_{a+b}^2,$$

где C_{a+b}^2 — число сочетаний из $a + b$ всех шаров по 2, то

$$p = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}.$$

I.1.3. Относительная частота и вероятность

Очевидно, не всякий опыт может быть сведен к схеме случаев, и поэтому существуют события, вероятности которых невозможно вычислить по формуле (I.1.1). Для таких событий применяют другие способы определения вероятностей. Часто эти способы связаны с опытом (экспериментом) и понятием относительной частоты (частости) события.

Относительной частотой события называют отношение числа появлений этого события M к числу всех произведенных опытов N, т. е.

$$Q = M/N. \qquad \text{(I.1.2)}$$

При неограниченном числе опытов с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно ожидать, что относительная частота (частость) события приближается к его вероятности (теорема Бернулли — закон больших чисел). Это утверждение пишут так:

$$\text{вер. } \lim_{N\to\infty} Q = p.$$

Вероятностный предел (вер. lim) отличается от математического предела и понимается как тенденция стремления к пределу.

I.1.4. Теоремы теории вероятностей

Теоремы теории вероятностей позволяют определить вероятности сложных событий — суммы и произведения элементарных событий, если известны вероятности последних. Суммой событий A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) называется сложное событие B, заключающееся в появлении хотя бы одного из них. Для несовместных событий условно пишут

$$B = \text{или } A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{или } A_n,$$

а также

$$B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Теорема. Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B) = \sum p(A_i). \qquad \text{(I.1.3)}$$

Пример 3. Бросают игральный кубик. Какова вероятность того, что вскроется грань с четной цифрой.

Решение. Искомое событие наступает, когда вскроются грани с цифрами: или 2, или 4, или 6. Вероятность вскрытия любой грани $p(A_i) = 1/6$.

Искомая вероятность $p(B) = p$ (четн. цифра) $= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$.

Пример 4. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 руб.; на 10 билетов — по 100 руб.; на 50 билетов — по 20 руб.; на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты невыигрышные.

Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб. и какой-либо суммы, имея один билет.

Решение. Обозначим события: A — выигрыш не менее 20 руб.; A_1 — выигрыш 20 руб.; A_2 — выигрыш 100 руб.; A_3 — выигрыш 500 руб.; A_4 — выигрыш 5 руб.

Согласно условию

$$A = A_1 + A_2 + A_3;\ p(A) = p(A_1 + A_2 + A_3).$$

По теореме сложения имеем

$$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3),$$

но

$$p(A_1) = 50 : 1000 = 0{,}050;\ p(A_2) = 10 : 1000 = 0{,}010;$$
$$p(A_3) = 1 : 1000 = 0{,}001.$$

Следовательно, получим

$$p(A) = 0{,}050 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

Вероятность выиграть какую-либо сумму, имея один билет, равна

$$p(A') = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4),$$

так как

$$p(A_4) = 100 : 1000 = 0{,}100,$$

то

$$p(A') = 0{,}161.$$

Следствия из теоремы сложения:

Следствие 1. Если события A_i образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p(U) = 1. \qquad \text{(I.1.4)}$$

Следствие 2. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, т. е.

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1 \text{ и } p(\bar{A}) = 1 - p(A). \qquad \text{(I.1.5)}$$

Произведением событий называется сложное событие C, заключающееся в совместном появлении всех событий A_i. Условно это пишут так:

$$C = \text{и } A_1, \text{ и } A_2, \text{ и, } \ldots, \text{ и } A_n$$

или

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

Теорема. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, т. е.

$$p(C) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \qquad \text{(I.1.6)}$$

Вероятности независимых событий называются безусловными. Зависимые события имеют так называемые условные вероятности, ко-

торые записываются в виде: $p(A_1/A_2)$ — условная вероятность события A_1, вычисленная в предположении, что произошло события A_2; $p(A_i/A_1, A_2, \ldots, A_{i-1})$ — условная вероятность события A_i, вычисленная в предположении, что произошли события $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$.

Теорема. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е.

$$p(C) = p(A_1)\cdot p(A_2/A_1);$$

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot \ldots \cdot p\left(A_n \Big/ \prod_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Пример 5. Найти вероятность того, что при 5 измерениях появятся только положительные ошибки.

Решение. Так как события независимые, то, применяя формулу (I.1.6), предварительно обозначив событие $(\Delta > 0) = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$, имеем

$$p(C) = p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot \ldots \cdot p(A_4)\cdot p(A_5),$$

где событие A_i — появление положительной ошибки в i-м измерении. В силу того, что $p(\Delta > 0) = 1/2$, имеем $p(C) = 1/2^5 = 1/32$.

Пример 6. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна $p_1 = 0{,}20$. Какова вероятность поразить цель при одном выстреле, если 2 % взрывателей снарядов дают отказы?

Решение. Считая события «попадание в цель» и «действие взрывателя» независимыми, по теореме умножения имеем

$$p = p_1\cdot p_2,$$

где p — вероятность поразить цель; p_2 — вероятность разрыва снаряда при выстреле.

Так как вероятность «неразрыва» равна 2 %, т. е. 0,02, то вероятность $p_2 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$ (разрыв и неразрыв — события, составляющие полную группу событий).

Следовательно, $p = p_1\cdot p_2 = 0{,}20\cdot 0{,}98 = 0{,}196$.

Теорема. Если события A_i совместны, то вероятность суммы событий

$$p(B) = 1 - p(\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot \ldots \cdot \bar{A}_n).$$

Если события A_i независимы, то

$$p(B) = 1 - \prod_{i=1}^{n} p(\bar{A}_i). \qquad (I.1.7)$$

Для двух таких событий

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1)\cdot p(A_2).$$

Когда все $p(A_i)$ равны между собой и независимы,

$$p(B) = 1 - \{p(\bar{A})\}^n. \qquad (I.1.8)$$

Пример 7. На испытательном стенде размещено 50 приборов. Вероятность отказа в работе одного прибора за время t равна $p(A) = 0{,}1$. Найти вероятность того, что за время t откажет хотя бы один прибор, если приборы работают независимо друг от друга.

Решение. На основании формулы (I.1.8) имеем

$$p(B) = 1 - p(\bar{A})^{50} = 1 - 0{,}9^{50}.$$

Логарифмируя $p(\bar{A})^{0,50} = 0{,}9^{50}$, получим

$$\lg p(\bar{A})^{0,50} = 50 \lg 0{,}9 =$$

$$= 50(\bar{1},954) = -50\cdot 0{,}046 = -2{,}30$$

и

$$\lg p(\bar{A})^{0,50} = -3{,}70,$$

откуда

$$p(\bar{A}) = 0{,}0051 \text{ и } p(B) = 0{,}9949.$$

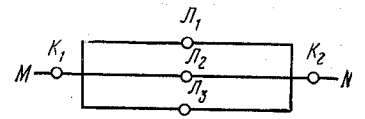


Рис. 1. Схема электрической цепи

Пример 8. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень с вероятностью попадания, соответственно равной $p_1 = 0{,}7$ и $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. Так как попадание в мишень обоими стрелками — события независимые, но совместные, то, применяя формулу (I.1.7), имеем

$$p(B) = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}97.$$

Пример 9. Электрическая цепь составлена по схеме, показанной на рис. 1.

Выход из строя за время t различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности:

Элемент	K_1	K_2	$Л_1$	$Л_2$	$Л_3$
Вероятность	0,10	0,20	0,15	0,20	0,10

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.

Решение. Цепь выйдет из строя (событие B), когда откажут в работе следующие элементы: или K_1 (событие A_1), или все $Л_j$ (событие A_3), или K_2 (событие A_2), или все K_i и $Л_j$ вместе.

Так как эти события совместны, то имеем на основании выражения (I.1.7)

$$P(B) = 1 - p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{A}_2)\cdot p(\bar{A}_3).$$

Вероятности

$$p(\bar{A}_1) = 0{,}90;\ p(\bar{A}_2) = 0{,}80.$$

Событие $\bar{A}_3$ заключается в том, что хотя бы один из элементов $Л_j$ не откажет, поэтому $p(\bar{A}_3)$ находим также по теореме сложения для совместных событий

$$p(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}15\cdot 0{,}20\cdot 0{,}10 = 0{,}997,$$

отсюда

$$p(B) = 1 - 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}997 = 0{,}282.$$

I.1.5. Многократные (повторные) испытания. Вероятнейшее число появления события

Если необходимо определить вероятность того, что при n независимых испытаниях интересующее нас событие A появится k раз, то применяют формулу Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (I.1.9)$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз при n испытаниях; C_n^k — число сочетаний из n по k; p — вероятность появления события в отдельном опыте; $q = 1 - p$ — вероятность непоявления события в отдельном опыте. Напомним, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \text{(I.1.10)}$$

причем

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \qquad \text{(I.1.11)}$$

При больших значениях k и n для упрощения вычисления факториалов применяется формула Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \qquad \text{(I.1.12)}$$

При многократных испытаниях вероятность $P_n(k)$ по форме представляет собой члены разложения бинома $(q+p)^n$, т. е.

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + \cdots + C_n^k q^{n-k} p^k + \cdots + C_n^n q^0 p^n. \qquad \text{(I.1.13)}$$

Контролем вычислений по формуле (I.1.13) является

$$(q+p)^n = 1.$$

Пример 10. По одной и той же мишени в одинаковых условиях производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p = 0{,}33$ ($q = 0{,}67$). Определить вероятность поражения мишени $k = 0, 1, 2, 3, 4$ раза.

Решение. Так как общее число испытаний (выстрелов) $n = 4$, то имеем:

$$P_{4(0)} = C_4^0 q^4 p^0 = \frac{4!}{0!\,(4-0)!}\,0{,}67^4 \cdot 0{,}33^0; \quad P_{4(0)} = 0{,}20;$$

$$P_{4(1)} = C_4^1 q^3 p^1 = \frac{4!}{1!\,(4-1)!}\,0{,}67^3 \cdot 0{,}33^1; \quad P_{4(1)} = 0{,}40;$$

$$P_{4(2)} = C_4^2 q^2 p^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\,0{,}67^2 \cdot 0{,}33^2; \quad P_{4(2)} = 0{,}29;$$

$$P_{4(3)} = C_4^3 q^1 p^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!}\,0{,}67^1 \cdot 0{,}33^3; \quad P_{4(3)} = 0{,}10;$$

$$P_{4(4)} = C_4^4 q^0 p^4 = \frac{4!}{4!\,(4-4)!}\,0{,}67^0 \cdot 0{,}33^4; \quad P_{4(4)} = 0{,}01.$$

Контроль. $0{,}20 + 0{,}40 + 0{,}29 + 0{,}10 + 0{,}01 = 1{,}00$.

Приведем следующие полезные формулы:

1. Вероятность того, что событие A появится не менее l раз, т. е. $k \geqslant l$,

$$P_n(k \geqslant l) = \sum_{k=l}^{n} P_n(k).$$

2. Вероятность того, что событие A появится не более l раз, т. е. $k \leqslant l$:

$$P_n(k \leqslant l) = \sum_{k=0}^{l} P_n(k).$$

При этом легко получить соотношение

$$P_n(k \leqslant l) = 1 + P_n(l) - P_n(k \geqslant l). \qquad \text{(I.1.14)}$$

Обозначим через A_1 событие, заключающееся в том, что интересующее нас событие появится большее число раз, чем противоположное событие, через A_2 — меньшее число раз и через A_3 — одинаковое число раз [при нечетном n $p(A_3) = 0$] (например, событие A_1 — гербов больше, A_2 — гербов меньше, A_3 — одинаковое число появления гербов и цифр при n бросаний монеты).

Очевидно, имеет место зависимость

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 1, \qquad \text{(I.1.15)}$$

причем, если $p = 1/2$, то $p(A_1) = p(A_2)$.

В условиях последнего примера вероятность попадания не менее двух раз

$$P_4(k \geqslant 2) = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}40,$$

не более двух раз

$$P_4(k \leqslant 2) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 0{,}89,$$

или по формуле (I.1.14)

$$P_4(k \leqslant 2) = 1 + P_4(2) - P_4(k \geqslant 2) = 1 + 0{,}29 - 0{,}40 = 0{,}89.$$

Вероятность того, что попаданий больше, чем промахов,

$$p(A_1) = P_4(3) + P_4(4) = 0{,}11;$$

одинаковое число промахов и попаданий $p(A_3) = P_4(2) = 0{,}29$.

Очевидно, что $p(A_2) = P_4(0) + P_4(1) = 0{,}60$ — вероятность того, что попаданий меньше, чем промахов. Контроль зависимости (I.1.15) дает

$$p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 0{,}11 + 0{,}60 + 0{,}29 = 1{,}00.$$

Вероятнейшим числом появлений события при многократных испытаниях (k_0) называется число, соответствующее наибольшей при данных условиях вероятности. В обычном смысле — это наиболее возможное число.

В математическом смысле число k_0 отвечает условиям:

$$P_n(k_0) \geqslant P_n(k_0 + 1); \qquad P_n(k_0) \geqslant P_n(k_0 - 1).$$

В теории вероятностей доказывается, что эти условия будут соблюдены, если

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p. \qquad \text{(I.1.16)}$$

В условии примера 10 имеем:

$$4 \cdot 0{,}33 - 0{,}67 \leqslant k_0 \leqslant 4 \cdot 0{,}33 + 0{,}33$$

или $0{,}65 \leqslant k_0 \leqslant 1{,}65$, откуда $k_0 \approx 1$.

Пример 11. Из многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 июля равна 0,227. Найти вероятнейшее число дней k_0, когда в ближайшие 50 лет 1 июля выпадет дождь.

Решение. По условию задачи $n = 50$, $p = 0{,}227$. На основании (I.1.16)

$$50 \cdot 0{,}227 - 0{,}773 \leqslant k_0 \leqslant 50 \cdot 0{,}227 + 0{,}227,$$

$$10{,}5 \leqslant k_0 \leqslant 11{,}5.$$

Следовательно, за ближайшие 50 лет 1 июля наиболее возможное число дождливых дней $k_0 \approx 11$.

Если значение p выражается числом, не близким к нулю, то при большом n $k_0 \approx np$.

I.1.6. Понятие о случайной величине и законе распределения вероятностей

Одним из важнейших основных понятий теории вероятностей является понятие о случайной величине.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Примером случайных величин являются: 1) число попаданий при n выстрелах, 2) результат измерения какой-либо величины, 3) координаты точек попадания при стрельбе и т. д.

Случайные величины могут быть прерывными (дискретными) и непрерывными. Прерывной называют случайную величину, возможные значения которой можно заранее указать (см. пример 1). Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток на числовой оси и не могут быть перечислены заранее (см. примеры 2 и 3).

От событий всегда можно перейти к случайным величинам. Пусть производится опыт, в котором может появиться или не появиться событие A.

Вместо события A можно рассматривать случайную величину, равную 1, если событие A происходит, и равную 0, если событие A не происходит.

В отличие от величины неслучайной случайную величину недостаточно характеризовать числом, но необходимо каждому из ее возможных числовых значений приписывать вероятность появления этих значений.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможным значением случайной величины и вероятностью его появления, называют **законом распределения случайной величины**. Закон распределения — фундаментальное понятие теории вероятностей.

Для характеристики закона распределения прерывной случайной величины часто применяют **ряд и многоугольник распределения**. Если X — случайная величина, которая может принять значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ряд распределения имеет вид:

$$\begin{array}{ll} X: & x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n; \\ p: & p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n. \end{array}$$

В нем перечислены возможные значения случайной величины X и соответствующие им вероятности. Так как в ряду перечислены все возможные значения x_i, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Например, для случайной величины k — числа появлений положительной ошибки при 8 измерениях ряд распределения имеет вид (биномиальное распределение):

Число появления k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Контроль
p_i	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{71}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{256}{256}$

Здесь

$$P_8^k = C_8^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{1}{256} C_8^k.$$

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, прибегают к его графическому изображению, откладывая по оси абсцисс значения x_i, а по оси ординат — вероятности. Концы ординат соединяют ломаной линией. Полученная фигура называется многоугольником распределения. Так, для приведенного выше ряда распределения многоугольник имеет вид, показанный на рис. 2.

Из этого графика, в частности, следует, что $k_0 = 4$.

Функция распределения. Для задания закона распределения как прерывной, так и непрерывной случайной величины служит так называемая функция распределения. Функцией распределения называется вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее некоторого ее заданного значения x, т. е.

$$F(x) = P(X < x). \qquad (I.1.17)$$

Функцию $F(x)$ называют еще интегральной функцией распределения. Приведем ее некоторые свойства:

1. $F(-\infty) = 0$; 2. $F(+\infty) = 1$; 3. $F(x_2) \geqslant F(x_1)$, если $x_2 \geqslant x_1$.

Эти свойства легко иллюстрировать с помощью геометрической интерпретации как вероятность попадания на отрезок левее точки x, расположенной на числовой оси $0X$ (рис. 3).

Часто оказывается необходимым знать вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в некоторых пределах, например от α до β.

При этом условимся левый конец α включать в участок (α, β), а правый не включать. Можно показать, что тогда искомая вероятность

$$P\{\alpha \leqslant x < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (I.1.18)$$

Заметим, что

$$P(x = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

При этом для непрерывной величины $P(x = \alpha) = 0$. Однако такое значение случайной величины нельзя считать невозможным событием (оно происходит, но крайне редко).

Пример 12. В условиях примера 10 найти вероятность того, что число попаданий в мишень будет находиться в пределах $1 \leqslant k < 3$ (т. е. будет равно 1 или 2).

Решение. На основании выражения (I.1.18) имеем

$$P\{1 \leqslant k < 3\} = F(k = 3) - F(k = 1) = 0{,}89 - 0{,}20 = 0{,}69.$$

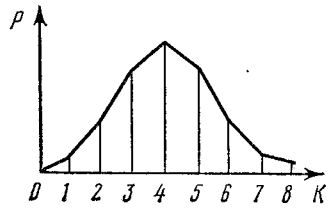
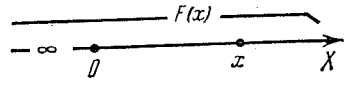


Рис. 2. Многоугольник распределения

Рис. 3. Числовая ось



Действительно,

$$P\{1 \leqslant k < 3\} = P_4(1) + P_4(2) = 0{,}40 + 0{,}29 = 0{,}69.$$

Пример 13. Функция распределения случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при} \quad x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания величины x на участок $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как случайная величина непрерывна, то

$$P(x = \alpha) = 0.$$

Поэтому

$$P\left\{0 < x < \frac{\pi}{4}\right\} = P\left\{0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}\right\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Плотность распределения. Закон распределения для непрерывной случайной величины удобно задавать в виде плотности распределения (кривой распределения), которая определяется как производная от функции распределения, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \varphi(x). \qquad (I.1.19)$$

Плотность $\varphi(x)$ называется еще дифференциальным законом распределения, а функция $F(x)$ — интегральным законом.

Плотность $\varphi(x)$ обладает свойствами:

$$1)\ \varphi(x) \geqslant 0; \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1, \qquad (I.1.20)$$

т. е. площадь, заключенная «под кривой распределения», всегда равна 1.

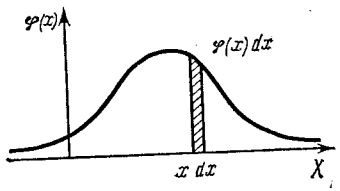


Рис. 4. Элемент вероятности

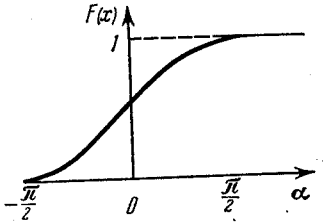


Рис. 5. График функции распределения

Величину $\varphi(x)\,dx$, выражающую с точностью до бесконечно малой вероятность попадания на участок dx, примыкающий в точке x, называют элементом вероятности (рис. 4).

Очевидно, что $F(x)$ и $\varphi(x)$ связаны соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx. \qquad (I.1.21)$$

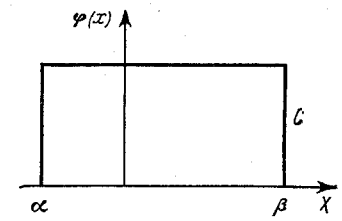


Рис. 6. График функции равномерного распределения

Вероятность попадания на участок выражается через плотность так:

$$P\{\alpha \leqslant x \leqslant \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx. \qquad (I.1.22)$$

График $F(x)$ в примере 13 изображен на рис. 5.

Пример 14. Случайная величина x подчинена закону распределения с плотностью $\varphi(x) = C$ при $\alpha < x < \beta$ (равномерный закон распределения).

а) Выразить C через α и β; б) найти вероятность попадания в интервал $\alpha_1 < x < \beta_1$; в) найти $F(x)$.

Решение. а) Так как график функции $\varphi(x) = C$ имеет вид рис. 6, то на основании свойства (I.1.20) площадь прямоугольника (или $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx$) равна единице, т. е.

$$(\beta - \alpha)\,C = 1, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha};$$

б) имеем

$$P\{\alpha_1 < x < \beta_1\} = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi(x)\,dx = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta - \alpha};$$

в) $$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \varphi(x)\,dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

I.1.7. Числовые характеристики законов распределения

Математическое ожидание. Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью (законом распределения), часто достаточно знать только отдельные числовые параметры, характеризующие закон распределения; например, какое-то среднее значение (центр распределения), около которого группируются возможные значения случайной величины, какое-то число, характеризующее степень разброса этих значений относительно среднего, и. т. д.

Характеристикой центра распределения является так называемое математическое ожидание случайной величины, определяемое в виде

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ — для прерывных величин и} \qquad (I.1.23)$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx \text{ — для непрерывных.} \qquad (I.1.24)$$

Доказывается, что при неограниченном числе испытаний среднее арифметическое $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i Q_i$, где Q_i — относительная частота, стремится по вероятности к $M(X)$, т. е.

$$\text{вер. } \lim_{n\to\infty} \bar{x} = M(x).$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

$$M(c) = c;$$

$$M(cx) = cM(x);$$

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i M(x_i); \qquad (I.1.25)$$

$$M(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \prod_{i=1}^{n} M(x_i),$$

где c — постоянная (неслучайная) величина.

Последнее свойство справедливо только для независимых величин. Математическое ожидание (М. О.) числа появления события при k испытаниях

$$M(k) = np.$$

Так, в условиях примера 10 М. О. числа попаданий в мишень при 4 выстрелах

$$M(k) = 4 \cdot 0{,}33 = 1{,}32.$$

Это же значение можно непосредственно получить по формуле

$$M(k) = \sum_{i=1}^{n} k_i P_n(k_i) = 0 \cdot 0{,}20 + 1 \cdot 0{,}40 + 2 \cdot 0{,}29 + 3 \cdot 0{,}10 + 4 \cdot 0{,}01 = 1{,}32.$$

Пример 15. Найти математическое ожидание случайной величины x, подчиненной равномерному закону $\varphi(x) = 1/(\beta - \alpha)$.

Решение. На основании формулы (I.1.24)

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha}\,dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Пример 16. Найти математическое ожидание случайной величины

$$t = \frac{x - M(x)}{\sigma}.$$

Решение. На основании первого из свойств (I.1.25) имеем

$$M(t) = \frac{1}{\sigma}(M(x) - M(X)) = 0.$$

Несложно показать, что М. О. случайной величины x, подчиненной нормальному закону распределения с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (I.1.26)$$

равно параметру a этого закона.

Моменты. Кроме математического ожидания, в теории вероятностей употребляется еще ряд характеристик — так называемые моменты.

Начальным моментом s-го порядка случайной величины называется математическое ожидание s-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_s = M(x^s). \qquad (I.1.27)$$

При $s = 1$ имеем $\alpha_1 = M(x)$.

Для прерывных величин

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i,$$

для непрерывных

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi(x)\,dx. \qquad (I.1.28)$$

Центральным моментом порядка s случайной величины X называют математическое ожидание s-й степени отклонения X от ее математического ожидания:

$$\mu_s = M\{[X - M(x)]^s\}. \qquad (I.1.29)$$

Случайная величина $X - M(x)$ называется центрированной случайной величиной. Для прерывной случайной величины

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} \{x_i - M(x)\}^s p_i; \qquad (I.1.30)$$

для непрерывной

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - M(x)\}^s \varphi(x)\,dx. \qquad (I.1.31)$$

Центральные моменты всегда можно выразить через начальные. Так,

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3;$$

. . . . . .

Имеют употребление еще так называемые центральные абсолютные моменты

$$\nu_s = M\{|x - M(x)|^s\}$$

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ВЗПИ

причем среди них наиболее важное значение имеет среднее отклонение

$$\vartheta = M\{|x - M(x)|\} = \nu_1. \qquad (I.1.32)$$

Дисперсия. Особое значение имеет центральный момент второго порядка

$$\mu_2 = D = M\{[x - M(x)]^2\}, \qquad (I.1.33)$$

называемый дисперсией. Дисперсия характеризует степень разброса случайной величины относительно центра распределения.

Дисперсия обладает следующими основными свойствами:

$$1)\ D(c) = 0;$$

$$2)\ D(cx) = c^2 D(x); \qquad (I.1.34)$$

$$3)\ D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(x_i), \quad \text{где} \quad c = \text{const}.$$

Последнее свойство справедливо лишь для независимых величин. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядной характеристики разброса удобно пользоваться так называемым средним квадратическим отклонением (С. К. О.)

$$\sigma = +\sqrt{D}.$$

Дисперсия случайной величины, подчиненной биномиальному закону (дисперсия числа появлений события при n испытаниях), выражается формулой

$$D[k] = npq.$$

Пример 17. Ряд распределения случайной величины имеет вид:

x_i:	0,	1;
p_i:	q,	p.

Здесь $q = 1 - p$.

Найти дисперсию $D(x)$.

Решение. На основании выражения (I.1.23) имеем М. О.

$$M(x) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

а согласно формуле (I.1.30) дисперсия равна

$$D(x) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = pq(p + q) = pq.$$

Пример 18. Найти дисперсию случайной величины x, подчиненной равномерному закону распределения.

Решение. Имеем (см. пример 14)

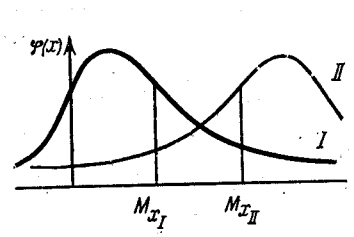
$$D = \int_{\alpha}^{\beta} [x - M(x)]^2 \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx.$$

С учетом того, что $M(x) = (\beta + \alpha)/2$ (см. пример 15), выполнив интегрирование, найдем

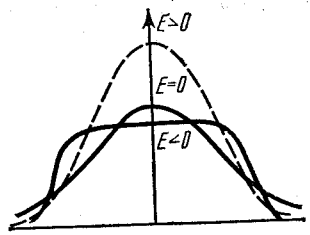
$$D = (\beta - \alpha)^2/12.$$

В частности, для ошибок округления, подчиняющихся равномерному закону распределения ($\beta = -\alpha = 0{,}5$ в единицах последнего знака), получим:

$$D = 0{,}5^2/3; \qquad \sigma = 0{,}5/\sqrt{3}$$



Р и с. 7. Кривые двух асимметричных распределений



Р и с. 8. Кривые эксцесса

Пример 19. Найти дисперсию суммы $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ одинаково округленных слагаемых.

Решение. На основании третьего свойства (I.1.34) имеем

$$D(u) = \sum D(x_i) = nD(x_i), \quad \text{но} \quad D(x_i) = 0{,}5^2/3,$$

поэтому

$$D(x_i) = \frac{n}{3} 0{,}25; \qquad \sigma_u = 0{,}5\sqrt{n/3}.$$

Пример 20. Найти дисперсию случайной величины

$$t = \frac{x - M(x)}{\sigma}, \quad \text{где} \quad \sigma = \sqrt{D(x)}.$$

Решение. На основании свойств (I.1.34) дисперсии

$$D_t = \frac{1}{\sigma_x^2}[D(x) - D_{M(x)}] = \frac{1}{\sigma_x^2} D(x) = 1.$$

Можно показать, что дисперсия случайной величины x, подчиненной нормальному закону распределения с плотностью (I.1.26),

$$D(x_i) = \sigma^2.$$

Асимметрия и эксцесс. Кроме дисперсии, для характеристики распределения часто используются еще третий и четвертый центральные моменты.

Величина

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad (I.1.35)$$

носит название асимметрии. Для симметричного распределения $S_k = 0$.

На рис. 7 показано два асимметричных распределения. Кривая I имеет положительную асимметрию ($S_k > 0$), кривая II — отрицательную ($S_k < 0$).

Величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad (I.1.36)$$

носит название эксцесса и является мерой крутости (островершинности или плосковершинности распределения). Для нормального распределения $E = 0$. На рис. 8 представлены три кривые распределения с положительным, равным нулю и отрицательным эксцессами.

Для оценки допустимости отклонения значений эксцесса от нуля, а следовательно действительного распределения от нормального, служит формула

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24\,(n-5)}{n\,(n+7)}},$$

где σ_E — среднее квадратическое отклонение эксцесса; n — число испытаний (измерений).

I.1.8. Нормальный закон распределения. Интеграл вероятностей

Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова. Теорема Ляпунова устанавливает условия, при которых возникает наиболее важный и наиболее часто встречающийся в природе нормальный закон распределения, имеющий плотность

$$\varphi\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M\,(x)$ и $\sigma = \sqrt{D\,(x)}$.

Теорему Ляпунова упрощенно можно сформулировать так: если некоторая случайная величина есть сумма достаточно большого числа других случайных независимых величин, отклоняющихся от своих математических ожиданий на весьма малые величины по сравнению с отклонениями суммарной величины, то закон распределения этой суммарной случайной величины будет близок к нормальному.

На основании этой теоремы можно полагать, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону, так как они складываются из суммы большего числа элементарных ошибок. По этой же причине координаты попадания в цель при стрельбе подчиняются этому закону распределения. Таких примеров можно привести много.

Приближенная формула Лапласа для вычисления $Pn\,(k)$. Число появлений события при достаточно большом числе испытаний можно представить в виде суммы случайных величин, отвечающих условиям теоремы Ляпунова. Поэтому можно доказать, что при большом n вероятность

$$P_n\,(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_k}\,e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{(I.1.37)}$$

(приближенная формула Лапласа), где $\sigma_k = \sqrt{npq}$;

$$t = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Учитывая, что с изменением k на единицу величина t получит приращение

$$\Delta t = \frac{k+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Формулу (I.1.37) переписываем в виде

$$P_n\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\Delta t.$$

Для функции

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$$

составлена таблица (см. прил. 1). Тогда

$$P_n\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}}\,y'. \qquad \text{(I.1.38)}$$

Пример. 21. Найти вероятность выпадения герба 4 раза при 10 бросаниях монеты.

Решение. Имеем:

$$t = \frac{4-5}{\sqrt{2{,}5}} = -0{,}632; \quad y' = 0{,}460; \quad \Delta t = 1/\sqrt{2{,}5} = 0{,}632.$$

На основании выражения (I.1.38)

$$P_{10}\,(4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,0{,}460 \cdot 0{,}632 = 0{,}207.$$

Биномиальное распределение дает

$$P_{10}\,(4) = 0{,}205.$$

Теорема Лапласа. На практике важнее определить вероятность того, что число появлений события k будет заключено в некоторых пределах, т. е. найти вероятность $P\,(a \leqslant k < b)$. На основании выражения (I.1.19) имеем

$$P\,(a \leqslant k < b) = F\,(b) - F\,(a),$$

где

$$F\,(k) = \sum_{k=0}^{k=1} P_n\,(k) = \sum_{k=0}^{k=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}}\,e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}.$$

Учитывая, что при $n \to \infty$, $P_n \to 0$, величина $\Delta t \to 0$ и функция $e^{-\frac{t^2}{2}}$ непрерывна, можно записать

$$P\,(a \leqslant k < b) = P\,(t_1 < t < t_2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = F\,(t_2) - F\,(t_1), \qquad \text{(I.1.39)}$$

где

$$t_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}; \qquad t_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}.$$

Формула (I.1.39) дает хорошие результаты уже при $n \geqslant 20$.

Выражение (I.1.39) носит название теоремы Лапласа. Его можно записать также в виде

$$P\left(t_1 < \frac{k-np}{\sqrt{npq}} < t_2\right) = P\left(t_1\sqrt{\frac{pq}{n}} < \frac{k}{n} - p < t_2\sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

Но величина $Q = k/n$ есть относительная частота появления события, а величина $\sqrt{pq/n} = \sigma_Q$ есть среднее квадратическое отклонение частоты.

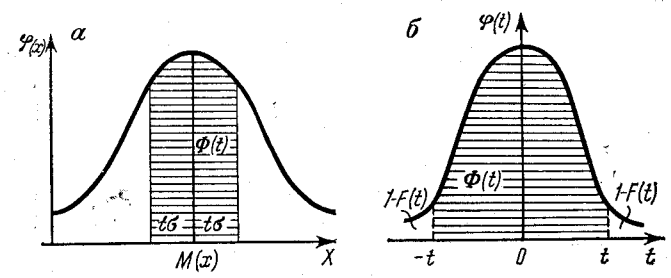


Рис. 9. Графическое представление интеграла вероятностей и интегральной функции

Поэтому вероятность отклонения относительной частоты от вероятности по абсолютной величине на заданное число $\varepsilon = t\sigma_Q$ определим по формуле

$$P\{|Q-p|<\varepsilon\}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (I.1.40)$$

Выражение (I.1.39) будет справедливо для любой случайной величины x, подчиненной нормальному распределению. В общем случае

$$t_2=\frac{b-M(x)}{\sigma(x)}; \qquad t_1=\frac{a-M(x)}{\sigma(x)},$$

где a и b — нижний и верхний пределы изменения случайной величины x.

Интеграл вероятностей (функция Лапласа). Для вычисления вероятности $P(a<x<b)$ удобно ввести функцию $\Phi(t)$, которая представляет собой вероятность попадания в интервал, симметричный относительно математического ожидания, т. е.

$$\Phi(t)=P\{|x-M(x)|<t\sigma\}.$$

Функция $\Phi(t)$ численно равна заштрихованной площади рис. 9: $а$ — в осях X и $\varphi(x)$; $б$ — в осях t и $\varphi(t)$.

Как видно из рис. 9, имеет место связь

$$F(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(t). \qquad (I.1.41)$$

$F(t)$ есть площадь под кривой $\varphi(t)$, ограниченная справа абсциссой t. Подставив (I.1.41) в выражение

$$P(a<x<b)=P(t_1<t<t_2)=F(t_2)-F(t_1),$$

получим

$$P(a<x<b)=\frac{1}{2}\{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)\}. \qquad (I.1.42)$$

Функция $\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ нечетная, т. е. обладает свойством

$$\Phi(-t)=-\Phi(t).$$

Функция $\Phi(t)$ называется интегралом вероятностей и является одной из важных в теории вероятностей.

Аналитически она выражается в виде

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-x^2/2}\,dx. \qquad (I.1.43)$$

Для вычислений интегралу придают вид

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\frac{t^9}{3456}-\frac{t^{11}}{42\,240}+\cdots\right). \qquad (I.1.44)$$

Так как

$$\sqrt{\pi}=1{,}77245, \qquad \sqrt{2}=1{,}41421,$$

то

$$\Phi(t)=0{,}797888\left(t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{40}-\frac{t^7}{336}+\frac{t^9}{3456}-\cdots\right). \qquad (I.1.45)$$

При вычислениях $\Phi(t)$ пользуются обычно таблицами (прил. 2).

Пример 22. Вычислить интеграл вероятностей для $t = 0{,}30;\ 0{,}40;\ 0{,}50;\ 0{,}60$.

Решение. Применяя формулу (I.1.45), получаем:

$$\Phi(t_1)=0{,}798\left(0{,}30-\frac{0{,}30^3}{6}+\frac{0{,}30^5}{40}-\cdots\right); \qquad \Phi(t_1)=0{,}236;$$

$$\Phi(t_2)=0{,}798\left(0{,}40-\frac{0{,}40^3}{6}+\frac{0{,}40^5}{40}-\cdots\right); \qquad \Phi(t_2)=0{,}311;$$

$$\Phi(t_3)=0{,}798\left(0{,}50-\frac{0{,}50^3}{6}+\frac{0{,}50^5}{40}-\cdots\right); \qquad \Phi(t_3)=0{,}383;$$

$$\Phi(t_4)=0{,}798\left(0{,}60-\frac{0{,}60^3}{6}+\frac{0{,}60^5}{40}-\cdots\right); \qquad \Phi(t_4)=0{,}452.$$

Проверка вычислений $\Phi(t)$ по таблицам (см. прил. 2) показывает сходимость результатов в пределах ошибок округлений.

Пример 23. Вычислить наиболее возможное число ошибок Δ из общего их числа $n = 100$, превышающих по абсолютной величине:

а) одинарное среднее квадратическое отклонение измерений, т. е. σ;

б) удвоенное среднее квадратическое отклонение, т. е. 2σ;

в) $2{,}5\sigma$;

г) утроенное среднее квадратическое отклонение, т. е. 3σ при $n = 1000$.

Решение. По условию задачи имеем при $n = 100$:

а) $|\Delta_1|>\sigma$; б) $|\Delta_2|>2\sigma$; в) $|\Delta_3|>2{,}5\sigma$; г) $|\Delta_4|>3\sigma$.

Необходимо определить:

а) $P(|\Delta_1|>\sigma)$; б) $P(|\Delta_2|>2\sigma)$; в) $P(|\Delta_3|>2{,}5\sigma)$;

г) $P(|\Delta_4|>3\sigma)$.

Определим $\Phi(t)$ по таблице (см. прил. 2) и сведем результаты вычислений в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

Число ошибок n	Заданное предельное значение $\lvert \Delta_i \rvert$	t	$\Phi(t)$	$P(\Delta_i > t\vartheta) = 1 - \Phi(t)$	Число ошибок, превышающих заданное, $k = n\{1 - \Phi(t)\}$	Число ошибок, укладывающихся в предел от 0 до $\pm t\sigma$	Контроль
100	1,0	1,0	0,6827	0,3173	32	68	100
100	2,0	2,0	0,9545	0,0455	5	95	100
100	2,5	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
1000	3,0	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

Пример 24. Найти вероятность того, что ошибка измерений Δ по абсолютной величине не превзойдет предел $4'' < |\Delta| < 6''$, если $\sigma = 10''$.

Решение. На основании теоремы сложения имеем

$$P(4 < |\Delta| < 6) = P(-6 < \Delta < -4) + P(4 < \Delta < 6).$$

Можно написать по формуле (I.1.42)

$$P(4 < |\Delta| < 6) = 2P(4 < \Delta < 6) = \Phi(6/10) - \Phi(4/10) = 0{,}452 - 0{,}311 = 0{,}141.$$

I.1.9. Среднее и вероятное отклонение. Их связь со средним квадратическим отклонением при нормальном законе распределения

Кроме среднего квадратического отклонения σ иногда применяются другие критерии разброса случайной величины или, если случайная величина — ошибка измерения, критерии точности измерений.

Среднее отклонение ϑ определяется как

$$\vartheta = M\{|x - M(x)|\} \qquad (I.1.46)$$

(центральный абсолютный момент первого порядка см. формулу (I.1.32).

Справедлива формула

$$\sigma = 1{,}25\vartheta. \qquad (I.1.47)$$

Вероятным отклонением r называется величина, больше и меньше которой (по абсолютной величине) ошибки в ряде наблюдений равновозможны, т. е.

$$P(|\Delta| < r) = 1/2.$$

Имеет место формула

$$r = 0{,}67\sigma. \qquad (I.1.48)$$

Пример 25. Найти вероятность того, что ошибка Δ не превзойдет предел, равный: а) 2ϑ; б) $2r$.

Решение.

а) $P\{|\Delta_1| < 2\vartheta\} = \Phi(t)$; $\quad t = \dfrac{2\vartheta}{\sigma} = \dfrac{2\vartheta}{1{,}25\vartheta} = 1{,}6,$

поэтому

$$P\{|\Delta_1| < 2\vartheta\} = \Phi(1{,}6) = 0{,}890;$$

б) $P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(t)$: $\quad t = 2r/\sigma = 1{,}34\sigma/\sigma = 1{,}34,$

поэтому

$$P\{|\Delta_2| < 2r\} = \Phi(1{,}34) = 0{,}820.$$

I.1.10. Понятие о статистических связях. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии

Рассматривая понятие события, мы говорили о независимых и зависимых событиях. Независимые события A и B определялись как такие, условные вероятности которых равны безусловным, т. е. $P(B/A) = P(B)$ или $P(A/B) = P(A)$. Теорема умножения для независимых событий имела вид $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Случайная величина Y называется независимой от случайной величины X, если закон распределения величины Y не зависит от того, какое значение приняла величина X. Для непрерывных случайных величин условие независимости Y от X может быть записано в виде

$$\varphi(y/x) = \varphi_2(y),$$

где $\varphi(y/x)$ — плотность распределения Y при условии, что X приняла значение x (условная плотность), $\varphi_2(y)$ — плотность распределения Y. Аналогично можно написать условие независимости

$$\varphi(x/y) = \varphi_1(x).$$

Для двух независимых непрерывных случайных величин теорема умножения принимает вид

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y),$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y} —$$

плотность совместного распределения, а

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) —$$

функция совместного распределения.

Могут встретиться две формы зависимостей: функциональная и статистическая (вероятностная).

Функциональной зависимостью между двумя величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждому значению X соответствуют значения Y, которые можно точно указать (например, $Y = \sqrt{x}$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и т. д.).

Статистической (вероятностной) зависимостью между двумя величинами X и Y называют такую зависимость, при которой каждому значению X соответствует распределение Y, изменяющееся с изменением X (условное распределение).

Частным случаем статистической зависимости является такая, при которой с изменением X изменяется математическое ожидание Y по линейному закону. Эта зависимость называется прямолинейной корреляционной (корреляцией); например, зависимость между ростом и весом человека ($Y_{кг} \approx X_{см} - 100$).

Если зависимость между измеряемыми величинами будет установлена и выражена формулой, то ее можно использовать для надлежащей организации измерений и обработки их результатов.

Коэффициент корреляции. Теснота корреляционной зависимости между двумя случайными величинами X и Y измеряется так называемым коэффициентом корреляции, определяемым следующим образом:

$$r = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{I.1.49}$$

где корреляционный момент

$$k_{xy} = \mu_{1.1} = M\{[x - M(x)][y - M(y)]\} = M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y) - \tag{I.1.50}$$

центральный смешанный момент второго порядка, наиболее важная числовая характеристика системы двух случайных величин. Вообще центральный смешанный момент порядка $p + s$ определяется как

$$\mu_{p.s} = M\{[x - M(x)]^p [y - M(y)]^s\}.$$

В частном случае, очевидно, имеем

$$\mu_{2.0} = D(x); \ \mu_{0.2} = D(y).$$

Коэффициент корреляции изменяется в пределах

$$-1 \leqslant r \leqslant 1.$$

Когда коэффициент корреляции равен $+1$ или -1, между X и Y существуют точные прямолинейные функциональные связи, т. е.

$$y = ax + c, \ x = by + d.$$

В случае, когда $r < 0$, имеет место отрицательная корреляция: с уменьшением (увеличением) x имеет тенденцию увеличиваться (уменьшаться) y; при $r > 0$ говорят о положительной корреляции: с уменьшением (увеличением) x имеет тенденцию уменьшаться (увеличиваться) y.

Форма прямолинейной связи между X и Y выражается в виде так называемого уравнения регрессии Y на X:

$$Y - M(y) = \rho_{y/x}[x - M(x)]$$

или

$$Y = M(y) + \rho_{y/x}[x - M(x)], \tag{I.1.51}$$

где

$$\rho_{y/x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{I.1.52}$$

— коэффициент регрессии y на x.

Существует уравнение регрессии x на y, имеющее вид

$$X = M(x) + \rho_{x/y}[y - M(y)],$$

где

$$\rho_{x/y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

I.1.11. Общие понятия математической статистики

Законы распределения случайных величин и их числовые характеристики устанавливаются на основе опыта, эксперимента. Разработкой методов регистрации, описания и анализа статистических экспериментальных данных занимается специальная наука — математическая статистика. Математическая статистика решает следующие типичные для нее задачи:

1. На практике всегда приходится иметь дело с ограниченным числом наблюдений. Возникает вопрос о том, какие черты наблюдаемого явления относятся к устойчивым, присущим ему, а какие являются случайными и проявляются в данной серии наблюдений только из-за ограниченного объема экспериментальных данных. В связи с этим возникает задача определения закона распределения случайной величины, по возможности свободного от всего несущественного, связанного с недостаточным объемом опытного материала.

2. Могут возникнуть, например, вопросы: согласуются ли результаты эксперимента с гипотезой о том, что данная случайная величина подчинена закону распределения $\varphi(x)$, указывают ли найденные характеристики зависимости между двумя случайными величинами на наличие действительной зависимости. Указанные задачи носят название «задачи проверки правдоподобия гипотез».

3. Часто на практике не возникает вопрос определения закона распределения, а требуется по экспериментальным данным найти «наилучшие» оценки для неизвестных параметров. С этой задачей связана задача оценки точности этих «наилучших» значений.

Результаты наблюдений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ над случайной величиной X называются выборкой из генеральной совокупности (из всевозможных значений случайной величины X). При большом n выборка оформляется в виде статистического ряда (подобно ряду распределения). При этом весь диапазон наблюденных значений x делится на интервалы (разряды) и подсчитывается количество значений m_i, приходящихся на каждый разряд. Для каждого разряда вычисляется относительная частота $Q_i = \frac{m_i}{n}$. Статистический ряд имеет вид таблицы

Разряды I	x_1, x_2	$x_2, x_3 \ldots$	$x_i, x_{i+1} \ldots$	x_k, x_{k+1}
m_i	m_1	$m_2 \ldots$	$m_i \ldots$	m_k
Q_i	Q_1	$Q_2 \ldots$	$Q_i \ldots$	Q_k

Число разрядов k выбирается порядка 10—20, а их длины, как правило, одинаковыми.

Статистический ряд часто оформляется в виде так называемой гистограммы: по оси абсцисс откладываются разряды и на каждом из разрядов как на основании строится прямоугольник, площадь которого равна Q_i, высота прямоугольника $h = Q_i/(x_{i+1} - x_i)$.

При равных длинах разрядов h пропорциональна Q_i. Следует заметить, что $\sum_{i=1}^{k} Q_i = 1$.

Аналогом функции распределения $F(x)$ (I.1.17) в математической статистике служит статистическая функция распределения

$$F^*(x) = Q(X < x).$$

I.1.12. Числовые характеристики статистического распределения

В гл. I.1.7 мы познакомились с основными числовыми характеристиками законов распределения: математическим ожиданием, дисперсией, начальными и центральными моментами. Аналогичные числовые

ТАБЛИЦА 2

№ п/п	Результаты измерений S_i, м	$\delta S_i = S_i - S_{ср}$, мм	$(\delta S_i)^2$	$(\delta S_i)^3$	$(\delta S_i)^4$	Вычисления
1	6994,911	+17,8				$\mu_1^* = \frac{-0,2}{16} = 0,0$
2	,890	−3,2				
3	,879	−14,2				$\mu_2^* = \frac{1186}{16} = 74,12$
4	,895	+1,8				
5	,882	−11,2				$\mu_3^* = \frac{+653}{16} = +40,8$
6	,898	+4,8				
7	,885	−8,2				$\mu_4^* = \frac{199313}{16} = 12457$
8	,883	−10,2				
9	,902	+8,8				$D^*(x) = \mu_2 = 74,12$
10	,901	+7,8				
11	,895	+1,8				$E^* = \frac{\mu_4^*}{\mu_2^{2*}} - 3$
12	,894	+0,8				
13	,896	+2,8				$E^* = -0,73$
14	,883	−10,2				$\sigma_E = 0,85$
15	,895	+1,8				
16	,902	+8,8				$\lvert E^* \rvert < m_E$
	$\alpha_1^* = S_{ср} = 6994,8932$	Σ − 0,2	1186	+653	199313	

характеристики существуют и для статистических распределений. Для математического ожидания статистическим аналогом является среднее арифметическое

$$M^*(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n};$$

для дисперсии — величина

$$D^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M^*(x)]^2}{n};$$

для статистических начальных и центральных моментов — соответственно

$$\alpha_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^s}{n} \quad \text{и} \quad \mu_s^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M^*(x)]^s}{n}.$$

В этих формулах вместо математического ожидания фигурирует среднее арифметическое. Для статистических начальных и центральных моментов [в том числе для $M^*(x)$ и $D^*(x)$] справедливы те же свойства, что и для теоретических моментов.

Пример 26. При исследовании геодиметра Бергстранда типа NASM-2A одна и та же линия была измерена 16 раз. Пользуясь данными, помещенными в табл. 2, вычислить μ_1^*, μ_2^*, μ_3^*, μ_4^*, $D^*(x)$, E^*.

Для оценки допустимости отклонения значений эксцесса от нуля используется формула (см. гл. I.1.7)

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24(n-5)}{n(n+7)}},$$

где σ_E — среднее квадратическое отклонение эксцесса; n — число испытаний.

I.1.13. Определение законов распределения на основе опытных данных (выравнивание статистических рядов)

Задача выравнивания заключается в том, чтобы подобрать теоретическую кривую распределения $\varphi(x)$, наилучшим образом описывающую данное статистическое распределение. Как правило, вид теоретической кривой выбирается заранее из существа задачи, а в некоторых случаях — по внешнему виду гистограммы. Поэтому задача сводится к выбору параметров распределения. Например, если взгляд на гистограмму заставляет предполагать нормальное распределение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

то задача сводится к рациональному выбору параметров a и σ. Один из методов (метод моментов) заключается в подборе параметров таким образом, чтобы несколько важнейших числовых характеристик были равны соответствующим статистическим характеристикам. Для нашего примера

$$a = M^*(x); \qquad \sigma = \sqrt{D^*(x)}.$$

Рассмотрим вопрос, связанный с проверкой правдоподобия гипотез, а именно вопрос о согласованности теоретического и статистического распределения. К. Пирсон в качестве меры расхождения между P_i и Q_i принял величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \qquad (I.1.53)$$

Распределение χ^2 зависит от параметра r, называемого числом степеней свободы, который равен числу разрядов k без числа связей, накладываемых на частоты. Например, для нормального закона этих связей три:

$$1)\ \sum_{i=1}^{k} Q_i = 1; \qquad 2)\ \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i Q_i = a;$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{k} [x_i - M^*(x)]^2 Q_i = D(x) = \sigma^2; \qquad r = k - 3.$$

Для распределения χ^2 составлена таблица (прил. 3). Пользуясь этой таблицей, можно для каждого значения χ^2 и числа степеней сво-

боды r найти вероятность p того, что величина, распределенная по закону χ^2, превзойдет это значение (или p есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения будет не меньше, чем фактически вычисленная χ^2). Если эта вероятность мала, то результат опыта следует считать противоречащим гипотезе о том, что закон распределения X есть $\varphi(x)$; если велика, то гипотезу следует считать правдоподобной. На практике считают критическим значением вероятности $p = 0{,}1$.

Пример на выравнивание статистического ряда и на применение критерия Пирсона приведен в гл. I.1.17 применительно к ошибкам измерений.

Б. Теория ошибок измерений

I.1.14. Общие понятия

В теории ошибок на основе положений теории вероятностей и математической статистики изучают причины возникновения и законы распределения ошибок наблюдений, а также свойства различных видов ошибок и на этой основе при выполнении конкретных задач разрабатывают методику наблюдений, позволяющую удержать эти ошибки в заданных пределах.

Основные задачи теории ошибок следующие:

1. Изучение законов распределения ошибок наблюдений.
2. Оценка точности непосредственно выполненных результатов наблюдений и их функций.
3. Отыскание наиболее надежного значения определяемой величины и характеристики точности.
4. Установление допусков, ограничивающих использование результатов наблюдений в заданных пределах точности.

Ошибки подразделяются на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки. К такого рода ошибкам относят промахи в измерениях, вызванные невнимательностью наблюдателя, неисправностью прибора или неучетом влияния внешней среды, которое не является пренебрегаемо малым.

Задача наблюдателя состоит в надлежащей организации контроля работ с целью своевременного устранения грубых ошибок из результатов измерений.

Систематические ошибки. Ошибки, происходящие от определенного источника и имеющие определенные знак и величину, называются систематическими.

Влияние такого рода ошибок может быть выражено функцией, связывающей результат измерения с каким-либо фактором (например, с температурой).

Задача наблюдателя состоит в том, чтобы исключить основную часть систематических ошибок из результатов измерений, а остаточное их влияние свести к пренебрегаемо малым величинам.

Случайные ошибки. Ошибки измерений, закономерности которых проявляются в массе и которые обусловлены точностью прибора, квалификацией наблюдателя, неучтенными колебаниями внешних условий, называются случайными.

Если систематическая ошибка может быть исключена из единичного измерения, то случайные ошибки, поскольку они являются одним из наиболее ярких примеров случайной величины и их закономерности обнаруживаются только в массовом проявлении, не могут быть устранены из единичного измерения.

Их влияние можно лишь ослабить, повышая качество и количество измерений, а также надлежащей математической обработкой результатов измерений. Под случайной ошибкой понимают разность между наблюденным значением случайной величины x_i и истинным (точным) значением X при условии исключения систематических ошибок, т. е.

$$\Delta_i = x_i - X \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

В теории ошибок принимают два постулата:

1) ошибки Δ_i подчинены нормальному закону распределения;

2) математическое ожидание $M(\Delta_i) = 0$, что означает отсутствие систематических ошибок.

В этом случае математическое ожидание $M(x_i)$ совпадает с истинным значением X.

Плотность распределения случайных ошибок

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (I.1.54)$$

или, если перейти к нормированной величине $t = \Delta/\sigma$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \qquad (I.1.55)$$

причем

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sigma}\varphi(t).$$

Выражение (I.1.54) часто записывается в виде

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2},$$

где $h = 1/\sigma\sqrt{2}$ — так называемая мера точности.

Свойства случайных ошибок, вытекающие из указанных двух постулатов и проявляющиеся при массовых испытаниях, могут быть охарактеризованы следующим образом.

Свойство 1. Случайные ошибки по абсолютной величине с заданной вероятностью P не превосходят определенного предела, равного $t\sigma$, где t — коэффициент, при котором $P = \Phi(t)$. Так, например, из 100 ошибок с вероятностью $P = 0{,}68$ не превосходят предел, равный σ, 68 ошибок, 95 ошибок с вероятностью 0,95 не превосходят 2σ и т. д. (см. пример 23).

Свойство 2. Положительные и отрицательные случайные ошибки равновозможны, т. е.

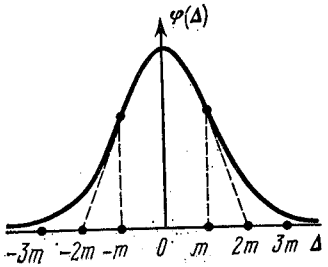
$$P(\Delta > 0) = P(\Delta < 0) = {}^1/_2.$$

Свойство 3. Среднее арифметическое из значений случайной ошибки при неограниченном возрастании числа наблюдений имеет пределом нуль, т. е.

$$M(\Delta) = \text{вер} \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0$$

(свойство компенсации).

Свойство 4. Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются чаще, чем большие.



Р и с. 10. Кривая ошибок

I.1.15. Кривая ошибок (кривая Гаусса) и ее свойства

Плотность нормального распределения ошибки

$$\varphi(\Delta_i) = y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \quad \text{(I.1.56)}$$

называют уравнением кривой ошибок или кривой Гаусса. Как указывалось выше, мера точности

$$h = 1/\sigma\sqrt{2}.$$

Если плотность (I.1.56) подобрана по результатам измерений, то $h = 1/m\sqrt{2}$, где m — средняя квадратическая ошибка.

Пример 27. Вычислить ординаты кривой нормального распределения для значений $\Delta = 0,\ m,\ 2m,\ 3m$, если $m = 0{,}47''$. По полученным данным построить кривую распределения. Вычисления проконтролировать по таблице (см. прил. 1).

Решение. Прежде всего имеем:

$$h/\sqrt{\pi} = 1/m\sqrt{2\pi} = 0{,}851; \quad y = 0{,}851e^{-h^2\Delta^2} = 0{,}851e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (t = \Delta/m);$$

$$h = 1/m\sqrt{2} = 1{,}505.$$

Вычисления приводятся в табл. 3.

Построим кривую ошибок (рис. 10).

Кривая ошибок, уравнение которой $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2}$, обладает следующими основными свойствами:

1) кривая лежит над осью абсцисс, так как ордината y ни при каких Δ не принимает отрицательных значений и не обращается в нуль;

2) кривая распределения симметрична относительно оси OY, так как функция $e^{-h^2\Delta^2}$ четная и значения ординат для положительных и отрицательных Δ, равных по абсолютной величине, одинаковы;

3) для любых значений Δ, бо́льших или меньших нуля, ординаты будут меньше, чем при $\Delta = 0$, т. е. при $\Delta = 0$ ордината y принимает максимальное значение;

ТАБЛИЦА 3

	$-h^2\Delta^2 = -\frac{t^2}{2}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	y	Контроль	
				$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$y = y'h$
0	0	1	0,851	0,564	0,850
1	—0,5	0,607	0,516	0,342	0,516
2	—2,0	0,136	0,115	0,076	0,115
3	—4,5	0,010	0,0095	0,0063	0,0095

Примечания: 1) $\lg e^{-0,50} = \bar{1},783$; 2) $\lg e^{-2,0} = -0,868 = \bar{1},132$; 3) $\lg e^{-4,5} = -1,954 = \bar{2},046$.

4) поскольку кривая имеет максимум и в то же время своими концами асимптотически приближается к оси $O\Delta$, у нее есть две точки перегиба, одна справа, другая слева от оси OY, причем для точек перегиба $|\Delta| = m$;

5) касательные к кривой в точках перегиба отсекают от оси абсцисс отрезки, равные $|\Delta| = 2m$.

I.1.16. Критерии, применяемые при оценке точности измерений

Средняя ошибка (ϑ). Среднее арифметическое из абсолютных значений случайных ошибок называется средней ошибкой, т. е.

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n}, \quad \text{где} \quad [|\Delta|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + \cdots + |\Delta_n|.$$

Ошибка ϑ есть эмпирический центральный абсолютный момент первого порядка.

Вероятная ошибка (r). Вероятной ошибкой называется такое значение случайной ошибки, больше или меньше которого по абсолютной величине ошибки равновозможны.

Из определения вероятной ошибки вытекает способ ее отыскания: если все ошибки расположить в ряд по убывающим или возрастающим значениям абсолютных величин, то вероятная ошибка будет расположена в середине этого ряда. Поэтому вероятную ошибку часто называют срединной (см. гл. I.1.9).

Средняя квадратическая ошибка (m). Средней квадратической ошибкой называется величина, вычисляемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad \text{(I.1.57)}$$

где $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_n^2$;

$$\Delta_i = x_i - X \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

здесь Δ_i — истинные ошибки; X — истинное (точное) значение измеряемой величины; x_i — результаты измерений одной и той же величины.

Обычно средней квадратической ошибке оказывают предпочтение перед средней и вероятной по следующим причинам:

1. На величину средней квадратической ошибки в большей степени оказывают влияние крупные по абсолютным значениям ошибки.

2. Средняя квадратическая ошибка устойчива, т. е. она достаточно надежно определяется при небольшом числе n.

Надежность средней квадратической ошибки характеризуется средней квадратической ошибкой самой средней квадратической ошибки, полученной из эксперимента, которая определяется по формуле

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}.$$

При $n = 8$ $m_m = \frac{1}{4} m$.

Исходя из этого, для достаточно надежного определения в практических целях принято считать, что $n \geqslant 8$.

Для теоретических расчетов допусков служит формула

$$\Delta_{\text{пред}} \leqslant 3m. \quad \text{(I.1.58)}$$

На практике, учитывая ограниченное число измерений, принимают

$$\Delta_{\text{пред}} \leqslant 2m. \qquad \text{(I.1.59)}$$

При нормальном распределении ошибок измерений существуют связи на основании формул (I.1.47) и (I.1.48):

$$m \approx 1{,}25v;\ m \approx 1{,}48r. \qquad \text{(I.1.60)}$$

Абсолютные и относительные ошибки. Среднюю квадратическую, среднюю, вероятную, предельную ошибки называют абсолютными.

Отношение абсолютной ошибки к среднему значению измеренной величины, выраженное дробью с числителем, равным единице, называют относительной ошибкой.

В зависимости от того, какая ошибка при этом используется, относительная ошибка называется: средней квадратической относительной, средней относительной, вероятной относительной, предельной относительной.

Знаменатель относительной ошибки целесообразно округлять до целых десятков, если он выражается в сотнях, до сотен, если он выражается в тысячах, и т. д.

Примеры:

1) $m_s = 0{,}3$ м; $S = 152$ м; $\dfrac{m_s}{S} = \dfrac{1}{510}$;

2) $m_s = 0{,}25$ м; $S = 643{,}00$ м; $\dfrac{m_s}{S} = \dfrac{1}{2600}$.

I.1.17. Исследование рядов ошибок на нормальное распределение

В разделе I.1.13 приведены теоретические основы решения этого вопроса.

Приведем пример применительно к ошибкам измерений.

Пример 28. В табл. 4 даны угловые невязки 32 треугольников сети триангуляции, причем для нахождения вероятной ошибки r они уже расположены в порядке возрастания абсолютных величин. Требуется установить, подчиняется ли данный ряд невязок, которые

ТАБЛИЦА 4

№ п/п	Невязки Δ, угл. с	№ п/п	Невязки Δ, угл. с	№ п/п	Невязки Δ, угл. с	№ п/п	Невязки Δ, угл. с
1	0,00	9	+0,38	17	−0,76	25	+1,29
2	+0,01	10	−0,38	18	−0,95	26	+1,31
3	+0,06	11	−0,41	19	−1,03	27	−1,38
4	+0,07	12	+0,43	20	+1,04	28	+1,52
5	−0,19	13	−0,62	21	+1,16	29	−1,88
6	+0,22	14	−0,69	22	−1,23	30	+1,92
7	−0,24	15	+0,71	23	−1,27	31	+2,28
8	−0,25	16	−0,73	24	−1,28	32	−2,50

$\Sigma(\Delta_i > 0) = +12{,}40$
$\Sigma(\Delta_i < 0) = -15{,}79$
$\Sigma(\Delta_i) = -3{,}39$

являются истинными ошибками суммы углов в каждом треугольнике, нормальному распределению.

Решение. Для определения кривой распределения вычислим эмпирические моменты:

$$1)\ a = M(\Delta) = \frac{[\Delta]}{n} = -\frac{3{,}39}{32} = -0{,}105'';$$

$$2)\ m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{38{,}75}{32}} = 1{,}10''.$$

Напишем уравнение теоретической кривой распределения

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}1}\, e^{-\frac{\Delta^2}{2\cdot 1{,}21}}.$$

Строго говоря, следует написать

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1{,}1}\, e^{-\frac{(\Delta+0{,}10)^2}{2\cdot 1{,}21}}.$$

Однако мы для простоты будем полагать, что $a = 0$. Далее находим:

3) вероятную ошибку

$$r = \frac{|\Delta_{16}| + |\Delta_{17}|}{2} = \frac{0{,}73'' + 0{,}76''}{2} = 0{,}74''$$

и вычисляем коэффициент

$$k_1 = \frac{m}{r} = \frac{1{,}10}{0{,}74} = 1{,}49;$$

4) среднюю ошибку

$$\vartheta = \frac{\sum_1^{32} |\Delta_i|}{32} = \frac{28{,}19}{32} = 0{,}88''$$

и коэффициент

$$k_2 = \frac{m}{\vartheta} = \frac{1{,}10}{0{,}88} = 1{,}25.$$

Затем строим статистический ряд распределения в виде табл. 5, разделив невязки на 12 интервалов (длина интервала равна $0{,}5m$).

В столбце 6 таблицы вычислены вероятности попадания ошибки в интервал от 0 до t (значения t приведены в правой стороне столбца 3), а в столбце 7 — вероятности попадания в i-е интервалы. Так как распределение симметрично, то эти вероятности выписаны только для интервалов, расположенных справа от 0. В столбце 8 вычислено теоретическое число ошибок, попавших в i-й интервал (также одинаковое для положительных и отрицательных интервалов). В столбце 9 вычислены разности между фактическими и теоретическими числами ошибок i-го интервала, в а столбце 10 — частные $(m_i - np_i)/np_i$.

Далее вычислено:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 2{,}80.$$

ТАБЛИЦА 5

№ интервала	Длина интервала: угл. с	$t = \frac{\Delta}{m}$	Число ошибок m_i	$Q = \frac{m_i}{n}$	$\frac{1}{2}\Phi(t)$	p_i	np_i	$m_i - np_i$	$\frac{m_i - np_i}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0 0,55	0 0,5	7	0,219	0,192	0,192	6	1	0,167
2	0,56 1,10	0,5 1,0	2	0,062	0,341	0,149	5	−3	−0,600
3	1,11 1,65	1,0 1,5	4	0,125	0,433	0,092	3	1	0,333
4	1,66 2,20	1,5 2,0	1	0,031	0,477	0,044	1	0	0
5	2,21 2,75	2,0 2,5	1	0,031	0,494	0,017	1	0	0
6	2,76 3,30	2,5 3,0	0	0	0,4986	0,0045	0	0	—
7	0 −0,55	0 −0,5	5	0,156			6	−1	−0,167
8	−0,56 −1,10	−0,5 −1,0	6	0,188			5	+1	+0,200
9	−1,11 −1,65	−1,0 −1,5	4	0,125			3	+1	+0,333
10	−1,66 −2,20	−1,5 −2,0	1	0,031			1	0	0
11	−2,21 −2,75	−2,0 −2,5	1	0,031			1	0	0
12	−2,76 −3,30	−2,5 −3,0	0	0			0	0	—
			Σ 32	1,000		0,9972	32	0	

По таблицам прил. 3 при числе степеней свободы $r = 12 - 2 = 10$ (здесь число связей взято не 3, а 2, так как $a = M^*(\Delta)$ нами принято равным 0) находим вероятность: для $\chi^2 = 2$ имеем $p = 0{,}996$, для $\chi^2 = 3$ имеем $p = 0{,}981$. Интерполируя для $\chi^2 = 2{,}80$, получим $p = 0{,}984 > 0{,}10$.

В результате исследования приходим к выводу о том, что рассматриваемый ряд ошибок подчиняется нормальному распределению и $M(\Delta) = 0$, так как: а) среднее арифметическое $[\Delta]/n$ практически равно 0; б) ни одна из ошибок не превышает $3m$; в) коэффициенты k_1 и k_2 практически совпадают с их теоретическим значением; г) на основании критерия Пирсона вероятность $p = 0{,}984$ достаточно велика.

Рис. 11. Гистограмма и выравнивающая кривая

Построим гистограмму и выравнивающую кривую (рис. 11). Вычисление ординат $y = \varphi(\Delta)$ выполняем, используя прил. 1. Вычисления записываем в табл. 6.

Высоты прямоугольников гистограммы $h_i = \frac{Q_i}{x_{i-1} - x_i} = \frac{Q_i}{0{,}55}$ приведены в табл. 7.

На выбор масштаба наложено условие наглядности.

ТАБЛИЦА 6

Границы интервалов	$t = \frac{\Delta}{m}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$	$h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$	y
1	0	0,564	0,645	0,364
2	0,5	0,498		0,321
3	1,0	0,342		0,220
4	1,5	0,183		0,118
5	2,0	0,076		0,049
6	2,5	0,025		0,016
7	3,0	0,006		0,004

ТАБЛИЦА 7

№ интервала	1	2	3	4	5	6
h_i	0,398	0,113	0,227	0,056	0,056	0
№ интервала	7	8	9	10	11	12
h_i	0,284	0,342	0,227	0,056	0,056	0

I.1.18. Определение коэффициента корреляции и уравнения регрессии на основе опытных данных

Приведенные в гл. I.1.10 формулы для r редко применимы на практике, так как нужно знать математические ожидания и дисперсии X и Y.

На практике имеем пары наблюдений:

$$x_i: \quad x_1, \quad x_2, \ \ldots, \ x_n;$$
$$y_i: \quad y_1, \quad y_2, \ \ldots, \ y_n.$$

Математическое ожидание в выражении (I.1.50) заменяют средним арифметическим (напомним, что вероятностный предел среднего арифметического при $n \to \infty$ совпадает с математическим ожиданием). При этом для коэффициента корреляции получают формулу

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n m_x m_y}, \qquad (I.1.61)$$

дающую его эмпирическое значение.

Здесь

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_1^n y_i}{n}; \quad m_x = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}};$$

$$m_y = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}.$$

Возникает вопрос, с какой надежностью вычисляется само значение коэффициента корреляции и при каком минимальном абсолютном его значении можно считать связь существующей. Возникает, таким образом, необходимость оценки надежности коэффициента корреляции.

Известный ученый статистик В. И. Романовский рекомендует при числе измерений $n \geqslant 50$ применять формулу для среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \qquad (I.1.62)$$

Связь считается установленной, если выполняется условие

$$|r| \geqslant 3\sigma_r. \qquad (I.1.63)$$

Наименьшая величина коэффициента корреляции $r_{\min}$, удовлетворяющего условию (I.1.63), в зависимости от числа измерений вычисляется по формуле

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}. \qquad (I.1.64)$$

Для оценки надежности коэффициента корреляции при $n < 50$ пользуются специальной функцией (так называемым критерием Фишера)

$$z = \frac{1}{2}\{\ln(1+r) - \ln(1-r)\}, \qquad (I.1.65)$$

которая подчиняется закону нормального распределения. Среднее квадратическое отклонение величины z вычисляется по формуле

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \qquad (I.1.66)$$

Значения величины z по полученным из опыта значениям коэффициента корреляции r могут быть вычислены непосредственно по формуле (I.1.65) или по таблицам, приведенным в прил. 4. Уравнение регрессии получает вид

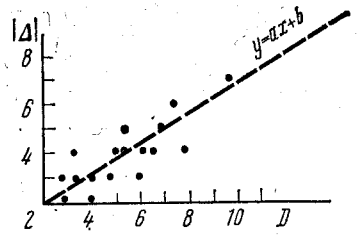


Рис. 12. График прямолинейной корреляции

$$y = \bar{y} + r\frac{m_y}{m_x}(x - \bar{x}) \qquad (I.1.67)$$

или

$$x = \bar{x} + r\frac{m_x}{m_y}(y - \bar{y}).$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляется по формулам:

$$\sigma_{\rho_{y/x}} = \frac{m_y}{m_x}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}; \qquad \sigma_{\rho_{x/y}} = \frac{m_x}{m_y}\sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}. \qquad (I.1.68)$$

Пример 29. В табл. 8 приведены расстояния D, измеренные светодальномером СВВ-1, и ошибки $|\Delta|$ этих измерений. По данным таблицы вычислить коэффициент корреляции, коэффициент регрессии, оценить их точность и составить уравнение регрессии.

Решение. Прежде чем решать задачу, обычно прибегают к графическому изображению точек (x_i, y_i) (рис. 12). График указывает на наличие корреляции между D и $|\Delta|$.

В результате вычислений (см. табл. 8) имеем:

$$m_D = \sqrt{\frac{61{,}5}{20}} = 1{,}75; \qquad m_{|\Delta|} = \sqrt{\frac{39{,}2}{20}} = 1{,}40,$$

коэффициент корреляции по формуле (I.1.61)

$$r = \frac{38{,}54}{20 \cdot 1{,}75 \cdot 1{,}40} = +0{,}79.$$

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число измерений сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера z.

По таблице, помещенной в прил. 4, пользуясь коэффициентом корреляции $r = +0{,}79$ как аргументом, находим

$$z = 1{,}0714.$$

Оценим надежность z по формуле (I.1.66)

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{20-3}} = 0{,}243.$$

ТАБЛИЦА 8

№ п/п	Результаты наблюдений: x, D(км)	y, $\lvert\Delta\rvert$(см)	Вычисления: $\delta D = D_i - \overline{D}$	$\delta\Delta = \Delta_i - \overline{\Delta}$	δD^2	$\delta\Delta^2$	$\delta D \cdot \delta\Delta$
1	8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
2	3,7	3,0	−1,2	−0,8	1,44	0,64	+0,96
3	6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0,22
4	3,3	3,0	−1,6	−0,8	2,56	0,64	+1,28
5	5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6	6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
7	2,7	3,0	−2,2	−0,8	4,84	0,64	+1,76
8	4,9	4,0	0,0	+0,2	0,0	0,04	0,00
9	3,1	4,0	−1,8	+0,2	3,24	0,04	−0,36
10	3,7	2,0	−1,2	−1,8	1,44	3,24	+2,16
11	5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
12	4,9	5,0	0,0	+1,2	0,0	1,44	0,00
13	5,6	3,0	+0,7	−0,8	0,49	0,64	−0,56
14	7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
15	4,2	3,0	−0,7	−0,8	0,49	0,64	+0,56
16	2,0	2,0	−2,9	−1,8	8,41	3,24	+5,22
17	4,0	2,0	−0,9	−1,8	0,81	3,24	+1,62
18	6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
19	7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
20	2,7	2,0	−2,2	−1,8	4,84	3,24	+3,96
Ср.	4,9	3,80	+14,4	+11,2	$\Sigma = 61,47$	39,20	+38,54
			−14,7	−11,2			
			$\Sigma = -0,3$	0,0			

С вероятностью 0,90 ($t = 1,645$) величина z может принять значения:

$$1,0714 - t\sigma_z \leqslant z \leqslant 1,0714 + t\sigma_z;$$

$$0,67 \leqslant z \leqslant 1,47. \qquad \text{(I.1.69)}$$

Из таблицы (см. прил. 4) находим соответствующие крайним значениям z (0,67 и 1,47) значения коэффициента корреляции r:

$$+0,59 \leqslant r \leqslant +0,90.$$

Следовательно, с вероятностью не менее 0,90 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между +0,59 и +0,90. Минимальное значение (при данном числе измерений $n = 20$)

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{20+36} - \sqrt{20}}{6} = 0,50.$$

Так как $0,50 < 0,59$, прямолинейную корреляционную связь можно считать установленной.

Определим σ_r по формуле (I.1.62), хотя, как было отмечено выше, она не совсем подходит в данном случае ($n < 50$):

$$\sigma_r = \frac{1 - 0,79^2}{\sqrt{20}} = 0,085.$$

Как следует из неравенства (I.1.69), учитывая, что $t = 1,65$, определенная с помощью критерия Фишера величина σ'_r равна

$$\sigma'_r \approx \frac{0,90 - 0,59}{2 \cdot 1,65} = 0,094.$$

Из сравнения σ'_r и σ_r следует, что формула (I.1.62) дает хорошие результаты при $n = 20$, хотя принято считать необходимым условием для ее применения $n \geqslant 50$.

Составим теперь уравнение регрессии $|\Delta|$ на D вида (I.1.67)

$$|\Delta_i| = \rho_{|\Delta|/D} D_i + (|\overline{\Delta}| - \rho_{|\Delta|/D}\overline{D}).$$

Подставляя численные значения r, σ_Δ, σ_D, получим

$$|\Delta_i| = +0,79\frac{1,40}{1,75}D_i + 3,8 - 0,79\frac{1,40}{1,75}4,9;$$

$$|\Delta_i| = (0,63D_i + 0,70) \text{ см},$$

где D_i — расстояние в километрах.

Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии $\rho_{|\Delta|/D} = +0,63$ по формуле (I.1.68)

$$\sigma_{\rho|\Delta|/D} = \frac{1,40}{1,75}\sqrt{\frac{1-0,79^2}{20-3}} = 0,12,$$

следовательно,

$$\rho_{|\Delta|/D} \approx 0,63 \pm 0,12.$$

В связи с этой задачей заметим, что уравнение регрессии x на y не имеет смысла, так как никто по ошибкам $|\Delta|$ не станет определять расстояние D.

Если случайные величины x и y подчинены нормальному закону распределения, то корреляция между ними считается установленной (критерий Фишера), когда величина

$$V = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}, \qquad \text{(I.1.70)}$$

соответствующая значению r, вычисленному по формуле (I.1.61), не попадает в интервал

$$-V_\beta < V < V_\beta,$$

где V_β выбирается из таблиц так называемого распределения Стьюдента (прил. 5) по числу степеней свободы ($n - 2$) и вероятности $\beta \approx 1$.

Пример 30. Коэффициент корреляции r между двумя случайными величинами x и y, подчиненными нормальному закону распределения, при $n = 20$ получен равным $r = +0,7$. Сделать заключение о наличии корреляции между x и y с вероятностью $\beta = 0,95$.

Решение. По таблицам прил. 5 при 18 степенях свободы и $\beta = 0,95$ находим $V_\beta = 2,10$.

$$-2,10 < V < 2,10. \qquad \text{(I.1.71)}$$

По формуле (I.1.70) имеем значение

$$V = \frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}49}}\sqrt{18} = 4{,}2,$$

не содержащееся в интервале (I.1.71). Поэтому следует признать, что x и y коррелированы.

I.1.19. Оценка точности функций величин, полученных в результате коррелированных и некоррелированных измерений

В инженерной практике часто возникают задачи, когда интересующую наблюдателя величину непосредственно измерить нельзя. В таких случаях приходится измерять некоторые величины (в дальнейшем будем называть эти величины аргументами), связанные с искомой величиной функционально, а искомую величину — вычислять.

Дана функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (I.1.72)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно коррелированные аргументы, полученные из измерений со средними квадратическими ошибками m_i. Тогда ее средняя квадратическая ошибка m_u вычисляется по формуле

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \times r_{x_i x_j}\cdot m_{x_i}\cdot m_{x_j}. \qquad (I.1.73)$$

Значения производных вычисляются, как правило, по приближенным значениям аргументов (на это указывает индекс 0 у производной), но близким к истинным значениям; от степени этой близости зависит точность формулы (I.1.73). Строго говоря, она является точной лишь для линейных функций.

При вычислениях согласно формуле (I.1.73) в результате следует получать не более двух значащих цифр. Поэтому значения производных нужно вычислять не более чем с тремя значащими цифрами. По этой причине знание точных значений аргументов x_i обычно не требуется.

Пример 31. Найти средние квадратические ошибки функции $u = 2x_1 + x_2$, если $m_{x_1} = m_{x_2} = m$, $r_{x_1 x_2} = -0{,}5$.

Решение. На основании формулы (I.1.73) получаем $m_u^2 = 4m^2 + m^2 - 2\cdot 0{,}5m^2 = 4m^2$, $m_u = 2m$.

Когда аргументы функции некоррелированы ($r_{ij} = 0$), то имеем формулу

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2. \qquad (I.1.74)$$

Это наиболее часто встречающийся случай оценки точности. Решим несколько задач.

Пример 32. В треугольнике измерены два угла со средними квадратическими ошибками $m_{\beta_1} = 5''$, $m_{\beta_2} = 3''$. Найти m_{β_3}.

Решение. Составляем функцию

$$u = \beta_3 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2.$$

Далее имеем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \beta_i}\right) = 1; \quad m_{\beta_3}^2 = m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2 = 25 + 9 = 34; \quad m_{\beta_3} = \sqrt{34} = 5{,}8''.$$

Вообще для линейной функции вида $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$

$$m_u^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots + m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}^2, \qquad (I.1.75)$$

а для функции $u = \pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \ldots \pm k_n x_n$

$$m_u^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 m_{x_i}^2.$$

Пример 33. Найти среднюю квадратическую ошибку функции

$$u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z,$$

если известны средние квадратические ошибки аргументов. На основании формулы (I.1.75) получаем

$$m_u = \sqrt{\frac{1}{4}m_x^2 + \frac{1}{25}m_y^2 + \frac{1}{16}m_z^2}.$$

Пример 34. Определить превышение и среднюю квадратическую ошибку превышения

$$h = S\,\mathrm{tg}\,\nu,$$

где $S = 143{,}5$ м (горизонтальное проложение); $\nu = +2°30'$ (угол наклона),
если $m_s = 0{,}5$ м, $m_\nu = 1{,}0'$.

Решение.

$$u = h = S\,\mathrm{tg}\,\nu; \qquad m_h = \sqrt{m_s^2\,\mathrm{tg}^2\,\nu + \frac{S^2}{\cos^4\nu}\cdot\frac{m_\nu^2}{\rho^2}};$$

$$m_h = \sqrt{(0{,}5\cdot 0{,}044)^2 + \left(\frac{144}{0{,}99}\cdot\frac{1{,}0'}{3438'}\right)^2};$$

$$m_h = 4{,}8\cdot 10^{-2}\ \text{м}; \qquad m_h = 0{,}048\ \text{м}.$$

Пример 35. Коэффициент k нитяного дальномера теодолита определяется на базисе, длина которого $S = 250{,}00$ м измерена со средней квадратической ошибкой $m_s = 0{,}052$ м.

Из многократных измерений был получен средний дальномерный отсчет $l = 249{,}0$ см со средней квадратической ошибкой $m_l = 0{,}30$ см.

Определить $k = S/l$ (постоянное слагаемое дальномера равно 0) и m_k.

Решение. Имеем функцию $k = f(S, l)$, т. е. $k = S/l$. Согласно формуле (I.1.74), получим

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial S}\right)_0^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)_0^2 m_l^2},$$

но

$$\left(\frac{\partial k}{\partial S}\right) = \frac{1}{l}; \qquad \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right) = -\frac{S}{l^2},$$

тогда

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{5{,}2}{249}\right)^2 + \left(\frac{25\,000}{249^2}\,0{,}30\right)^2};$$

$$m_k = 0{,}12;\ k = 100{,}4 \pm 0{,}12.$$

Если функция имеет вид

$$u = x_1 x_2 \quad \text{или} \quad u = \frac{x_1}{x_2},$$

то можно написать

$$\ln u = \ln x_1 \pm \ln x_2.$$

Применяя формулу (I.1.74), получим

$$m^2_{\ln u} = \frac{m^2_{x_1}}{x_1^2} + \frac{m^2_{x_2}}{x_2^2},$$

но

$$m^2_{\ln u} = \frac{m^2_u}{u^2},$$

поэтому имеем формулу

$$\frac{m^2_u}{u^2} = \frac{m^2_{x_1}}{x_1^2} + \frac{m^2_{x_2}}{x_2^2}. \qquad \text{(I.1.76)}$$

В общем случае для функции

$$u = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k}{x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_n}$$

справедлива формула

$$\frac{m^2_u}{u^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m^2_{x_i}}{x_i^2}, \qquad \text{(I.1.77)}$$

откуда легко найти m^2_u. Отношение m_u/u называют относительной средней квадратической ошибкой.

Пример 36. Найти ошибку определения увеличения v зрительной трубы, если фокусное расстояние объектива $f_{об} = 40{,}0$ см и определено с точностью $m_{f_{об}} = 2$ мм, а фокусное расстояние окуляра $f_{ок} = 1{,}5$ см определено с ошибкой $m_{f_{ок}} = 0{,}1$ мм.

Решение. Применяя формулу (I.1.76), имеем

$$\frac{m^2_v}{v^2} = \frac{m^2_{f_{об}}}{f^2_{об}} + \frac{m^2_{f_{ок}}}{f^2_{ок}}$$

или

$$m^2_v = \frac{m^2_{f_{об}}}{f^2_{ок}} + \frac{f^2_{об}}{f^2_{ок}}\, m^2_{ок}.$$

Вычисляя, получим

$$m_v = \frac{4}{2{,}25} \cdot 10^{-2} + \frac{16 \cdot 10^2}{3{,}38}\, 10^{-4} = 1{,}77 \cdot 10^{-2} + 4{,}73 \cdot 10^{-2} = 6{,}50 \cdot 10^{-2}.$$

I.1.20. Обработка ряда равноточных измерений одной величины

Пусть выполнен ряд равноточных независимых измерений одной и той же величины, истинное значение которой равно X, и получены результаты (выборка) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, свободные от систематических ошибок $\{M(x_i) = X\}$. По результатам этих наблюдений требуется подобрать наиболее надежное значение или оценку для X, а также для неизвестной дисперсии σ^2. По сути дела, это третья задача математической статистики (см. гл. I.1.11).

Всякая оценка a_i^* для неизвестных параметров распределения a_i есть функция измеренных величин, т. е. $a_i^* = a_i(x_1, \ldots, x_n)$. Наилучшими из всех возможных a_i называются такие оценки α_i^*, которые обладают свойствами:

1) состоятельности, т. е.

$$\text{вер} \lim_{n \to \infty} a_i^* = a_i;$$

2) несмещенности, т. е.

$$M(a_i^*) = a_i;$$

3) эффективности, т. е.

$$D(a_i^*) = \min.$$

В теории ошибок доказывается, что наилучшей оценкой для математического ожидания будет так называемая простая арифметическая средина

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \qquad \text{(I.1.78)}$$

а для дисперсии — квадрат средней квадратической ошибки (формула Бесселя)

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \qquad \text{(I.1.79)}$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$ — отклонения от простой арифметической средины, обладающие свойствами

$$[v] = 0;\ [v^2] = \min.$$

Величина $\bar{x}$ имеет среднюю квадратическую ошибку

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(I.1.80)}$$

Совместное влияние случайных ошибок и постоянной систематической ошибки может быть выражено формулой

$$M' = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \delta^2},$$

где δ — систематическая ошибка. Число измерений поэтому не может беспредельно повышать точность $\bar{x}$. Полагают, что должно иметь место неравенство $\delta < \frac{1}{5} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}$.

ТАБЛИЦА 9

№ п/п	Результаты измерений	v_i	v_i^2	ε_i	ε_i^2	Контроль
1	57° 23′ 44″	−0,7	0,49	+4	16	1. $\beta = \bar{x}_{окр} - \bar{x} = 57°\ 23'\ 44{,}7'' - 57°\ 23'\ 44{,}67'' = +0{,}03''$
2	40	−4,7	22,1	0	0	$-n\beta = -0{,}03'' \cdot 12 = -0{,}4''$
3	43	−1,7	2,89	+3	9	$[v] = 0{,}4''$
4	45	+0,3	0,09	+5	25	2. $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} =$
5	46	+1,3	1,69	+6	36	$= 334 - \frac{56^2}{12} = 72$
6	43	−1,7	2,89	+3	9	Ошибки:
7	48	+3,3	10,9	+8	64	$m = \sqrt{\frac{72{,}9}{11}} = 2{,}7''$
8	45	+0,3	0,09	+5	25	
9	48	+3,3	10,9	+8	64	$M = \frac{2{,}7}{\sqrt{12}} = 0{,}75''$
10	46	+1,3	1,69	+6	36	
11	47	+2,3	5,29	+7	49	$m_M = 0{,}15'$
12	41	−3,7	13,7	+1	1	
$x' = 57°\ 23'\ 40''$		−12,5	$\Sigma = 72{,}9$	$\Sigma = +56$	$\Sigma = 334$	
		+12,1				
$\bar{x}_{окр} = 57°\ 23'\ 44{,}7''$		$\Sigma = -0{,}4$				
$\bar{x} = 57°\ 23'\ 44{,}67''$		$\Sigma\, \varepsilon/h = 4{,}67''$				Ответ: $\bar{x} = 57°\ 23'\ 44{,}7'' \pm 0{,}75''$

Средняя квадратическая ошибка

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$$

характеризуется средней квадратической ошибкой ошибки

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Порядок вычислений при обработке ряда равноточных измерений следующий.

1. Вместо формулы (I.1.78) применяют более удобную формулу

$$\bar{x} = x' + \frac{[\varepsilon]}{n},$$

где x' — приближенное значение для $\bar{x}$, обычно это минимальное значение x_i, а величины

$$\varepsilon_i = x_i - x'.$$

2. Вычисляют отклонения $v_i = x_i - \bar{x}_{окр}$ и выполняют контроль

$$[v] = -n\beta,$$

где β — ошибка округления при вычислении $\bar{x}$, т. е. $\beta = \bar{x}_{окр} - \bar{x}$.

Обычно $\bar{x}_{окр}$ вычисляют с числом десятичных знаков на один больше, чем их имеется в x_i ($\bar{x}_{окр}$ получают округляя $\bar{x}$, который содержит на один знак больше, чем $\bar{x}_{окр}$).

3. Далее вычисляют $[v^2]$ с контролем

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$$

и ошибки m, M:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}.$$

Результат вычислений записывают в виде $\bar{x} \pm M$ или в виде доверительного интервала (см. следующий раздел).

Пример 37. Даны результаты равноточных измерений одного и того же угла. Определить $\bar{x}$, m, M, m_M.

Решение выполнено в табл. 9.

I.1.21. Понятие о доверительных интервалах

Рассмотренный выше способ оценки параметров закона распределения называется точечным. Более совершенным является так называемый способ доверительных интервалов.

Доверительным называется такой интервал, относительно которого с вероятностью β, сколь угодно близкой к единице, называемой доверительной, можно утверждать, что он содержит математическое ожидание параметра или его истинное значение при отсутствии систематических ошибок.

Доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины имеет вид

$$\bar{x} - t_\beta M < X < \bar{x} + t_\beta M, \qquad \text{(I.1.81)}$$

где t_β — коэффициент, выбираемый из таблиц так называемого распределения Стьюдента (прил. 3) по вероятности β и числу степеней свободы $r = n - 1$. Так, в условиях предыдущего примера при $\beta = 0{,}90$ имеем $t_\beta = 2{,}20$ и доверительный интервал

$$57°23'43{,}1'' < X < 57°23'46{,}3''.$$

Важно отметить, что распределение измерений при этом должно быть нормальным.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ в случае нормального распределения измерений строится в виде

$$\nu_1 m \leqslant \sigma \leqslant \nu_2 m, \qquad (I.1.82)$$

где

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}}; \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}},$$

а величины χ_1^2 и χ_2^2 выбирают из таблиц распределения χ^2 (прил. 4) по числу степеней свободы $n - 1$ и вероятности $p_1 = \frac{1-\beta}{2}$ и $p_2 = 1 - p_1$. В примере 37 для $\beta = 0{,}90$ и $n - 1 = 11$ имеем $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}95$ и $\chi_1^2 \approx 19{,}7$, $\chi_2^2 = 4{,}6$.

Доверительный интервал

$$\sqrt{\frac{11}{19{,}7}} \cdot 2{,}7 < \sigma < \sqrt{\frac{11}{4{,}4}} \cdot 2{,}7;$$

$$2{,}0'' < \sigma < 4{,}2''.$$

Доверительный интервал для $\sigma_{\bar{x}}$ имеет вид

$$\frac{\nu_1 m}{\sqrt{n}} \leqslant \sigma_{\bar{x}} \leqslant \frac{\nu_2 m}{\sqrt{n}}.$$

В нашем примере $0{,}61'' < \sigma_{\bar{x}} < 1{,}3''$.

Другой пример применения доверительных интервалов был приведен в гл. I.1.18 (для истинного значения коэффициента корреляции).

Иногда результат обработки измерений записывают в виде $\bar{x} \pm m_{\bar{x}}$, что соответствует вероятности $\beta \approx 0{,}7$ ($t_\beta = 1$).

I.1.22. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений

При двойных равноточных измерениях n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получают результаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;$$

$$x_1', x_2', \ldots, x_n';$$

вычисленные разности $d_i = x_i - x_i'$ можно использовать для оценки точности.

При отсутствии систематических ошибок эти разности являются как бы ошибками величин, истинное значение которых равно 0. Поэтому, применяя формулу Гаусса (I.1.57), имеем

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \text{и} \quad m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \qquad (I.1.83)$$

Для среднего значения

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}$$

получаем

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{m_d}{2} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}}. \qquad (I.1.84)$$

На наличие постоянной систематической ошибки укажет значительное отклонение от нуля величины

$$\theta = \frac{[d]^*}{n}.$$

В этом случае, рассматривая разности

$$d_i' = d_i - \theta \qquad (I.1.85)$$

как уклонения от арифметической средины и применяя формулу Бесселя (I.1.79), получим

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}.$$

Формулы (I.1.83) и (I.1.84) остаются в силе и в этом случае. Контролем вычислений служит формула $[d'] = -n\beta$, где величина $\beta = \theta_{\text{окр}} - \theta$.

Пример 38. В табл. 10 даны результаты нивелирования (превышения в м) между точками при двух положениях прибора. Вычислить средние квадратические ошибки одного измерения и среднего из двойных измерений.

ТАБЛИЦА 10

№ превышения	1-е положение x_i	2-е положение x_i'	d_i (мм)	$d_i' = d_i - \theta$	$d_i'^2$
1	+1,273	+1,270	+3	+1	1
2	+0,987	+0,988	−1	−3	9
3	+1,069	+1,065	+4	+2	4
4	+0,542	+0,542	0	−2	4
5	+0,768	+0,766	+2	0	0
6	+0,895	+0,891	+4	+2	4
7	+1,166	+1,167	−1	−3	9
8	+1,304	+1,302	+2	0	0
9	+1,198	+1,194	+4	+2	4
10	+0,484	+0,481	+3	+1	1
			+22	+8	
			−2	−8	
			$\Sigma d = +20$	$\Sigma d' = 0$	$\Sigma d'^2 = 36$

* Критерием допустимости Θ является неравенство $|[d]| \leqslant 0{,}25\,[|d|]$.

Вычисляем $\theta = \frac{[d]}{n} = +\frac{20}{10} = +2{,}0$ мм и величины d_i' (поскольку θ недопустимо) по формуле (I.1.85).

Средняя квадратическая ошибка превышения при одном положении нивелира согласно формуле (I.1.83)

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{36}{18}} = 1{,}41 \text{ мм}.$$

Средняя квадратическая ошибка превышения, полученная как среднее из результатов нивелирования при двух положениях нивелира по формуле (I.1.84),

$$m_{x_i\text{ср}} = \frac{1{,}41}{\sqrt{2}} = 1{,}00 \text{ мм}.$$

I.1.23. Неравноточные измерения. Веса измерений

Неравноточными называются измерения, дисперсии которых не равны между собой. В этом случае дисперсия определяется формулой

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}, \qquad \text{(I.1.86)}$$

где $\sigma_0^2 = C = \text{const}$ — постоянная для всех измерений произвольно выбираемая величина; p_i — так называемые веса измерений. Из формулы (I.1.86) следует определение веса

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \qquad \text{(I.1.87)}$$

т. е. вес — величина, обратно пропорциональная дисперсии. Веса — величины относительные. О весе имеет смысл говорить, когда число измерений $n > 1$. Приняв $p_i = 1$, устанавливаем смысл σ_0^2.

Так как при этом $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$, то σ_0^2 есть дисперсия измерения, вес которого принят за единицу (сокращенно — дисперсия единицы веса).

Измерение с весом $p = 1$ может быть как реально существующим, так и фиктивным.

В случае, когда дисперсии σ_i^2 неизвестны, вес вычисляют по приближенной формуле

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad \text{(I.1.88)}$$

где m_i — средняя квадратическая ошибка i-го измерения; μ, введенная вместо σ_0, — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Для применения формулы (I.1.88) ошибка m_i должна быть определена надежно (получена из результатов измерений, число которых $n > 8$), а также свободна от систематического влияния.

Пользуясь свободой выбора σ_0 (или μ), веса измерений можно установить, не зная σ_i (или m_i):

1) при измерении линий различной длины, но одним и тем же мерным прибором

$$p_i = \frac{1}{s_i};$$

2) при измерении величин одним и тем же прибором, но различным числом приемов n_i, вес средних значений $p_i = n_i$;

3) при измерении углов в ходе, имеющем n вершин, вес суммы углов хода

$$p_i = \frac{1}{n_i}.$$

I.1.24. Вес функции коррелированных и некоррелированных аргументов

Учитывая формулу (I.1.73) и выражение дисперсии (I.1.86), легко получить формулу для вычисления обратного веса функции

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

коррелированных аргументов в виде

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + 2 \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 r_{x_i x_j} \frac{1}{\sqrt{p_{x_i} p_{x_j}}}, \qquad \text{(I.1.89)}$$

а для некоррелированных аргументов в виде

$$\frac{1}{p_u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_i}}. \qquad \text{(I.1.90)}$$

Пример 39. Используя условия примера 31, найти вес функции

$$u = 2x_1 + x_2.$$

Решение. На основании формулы (I.1.89) имеем

$$\frac{1}{p_u} = 4 \cdot \frac{1}{p_{x_1}} + \frac{1}{p_{x_2}} + 2 r_{x_1 x_2} \frac{1}{\sqrt{p_{x_1} p_{x_2}}},$$

при этом $r_{x_1 x_2} = -0{,}5$; $m_{x_1} = m_{x_2} = m$.

Приняв за ошибку единицы веса μ среднюю квадратическую ошибку m, получаем $p_{x_1} = p_{x_2} = 1$, поэтому

$$\frac{1}{p_u} = 4 + 1 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 4 \quad \text{и} \quad p_u = \frac{1}{4}.$$

В следующих задачах будем рассматривать лишь некоррелированные измерения.

Пример 40. Найти веса следующих функций:

1) $u = x - y + z$;

2) $u = 2x + \frac{1}{3} y - \frac{1}{2} z$;

3) $u = 3x^2$,

если $p_x = 3$, $p_y = \frac{1}{3}$, $p_z = \frac{1}{4}$.

Решение.

1) $\frac{1}{p_u}=\frac{1}{p_x}+\frac{1}{p_y}+\frac{1}{p_z}=\frac{1}{3}+3+4=7\frac{1}{3}$; $p_u=\frac{3}{22}$;

2) $\frac{1}{p_u}=4\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=\frac{8}{3}$, $p_u=\frac{3}{8}$;

3) $\frac{1}{p_u}=(6x)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{36x^2}{3}=12x^2$.

Пример 41. Найти вес площади треугольника, если основание его $b=8$ м получено с весом $p_b=1$, высота $h=16$ м с весом $p_h=\frac{1}{2}$.

Решение. Составляем функцию измеренных величин

$$S=\frac{1}{2}b\cdot h,$$

затем находим

$$\frac{1}{p_s}=\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2\cdot\frac{1}{p_b}+\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2\cdot\frac{1}{p_h}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}h\right)^2\cdot 1+\left(\frac{1}{2}b\right)^2\cdot 2=64+32=96.$$

Пример 42. Дана функция $u=x\sqrt{p}$. Найти вес p_u, если x — результат измерения, а p — его вес.

Решение.

$$\frac{1}{p_u}=(\sqrt{p})^2\frac{1}{p}=1.$$

Вывод. Если результат измерения умножить на корень квадратный из его веса, то полученный результат будет иметь вес, равный 1.

На этом важном положении базируется методика приведения неравноточных измерений к равноточным.

I.1.25. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины

Если имеем ряд независимых (некоррелированных) результатов измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с заданными (выбранными) весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то при отсутствии систематических ошибок величина

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}=\frac{[xp]}{[p]} \qquad (I.1.91)$$

является наиболее надежной оценкой для истинного значения измеряемой величины и называется общей арифметической срединой. Ее точность определяется формулой

$$m_{\bar{x}}=M=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}},\quad \text{где}\quad \mu=\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \qquad (I.1.92)$$

а $v_i=x_i-\bar{x}$. Уклонения v_i обладают свойствами:

1) $[pv]=0$; 2) $[pv^2]=\min$.

Для истинного значения X можно построить доверительный интервал аналогично тому, как было рассмотрено в разделе I.1.21 для равноточных измерений.

Если известны истинные ошибки измерений, то

$$\mu=\sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} \qquad (I.1.93)$$

(формула Гаусса для неравноточных измерений).

Порядок вычислений при обработке ряда неравноточных измерений следующий:

1. Вместо формулы (I.1.91) применяют формулу

$$\bar{x}=x'+\frac{[\varepsilon p]}{[p]}.$$

2. Вычисляют уклонения v_i и выполняют контроль

$$[pv]=-\beta[p],\quad \text{где}\quad \beta=\bar{x}_{\text{окр}}-\bar{x}.$$

ТАБЛИЦА 11

№ п/п	x_i	Число приемов n	$p=\frac{n}{3}$	ε	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	v	pv	pv^2
1	89° 47′ 16″	6	2	+10	+20	200	+6	+12	72
2	9	18	6	+3	+18	54	−1	−6	6
3	6	3	1	0	0	0	−4	−4	16
4	10	15	5	+4	+20	80	0	0	0
5	23	6	2	+7	+14	98	+3	+6	18
6	8	12	4	+2	+8	16	−2	−8	16
$x'=89°\,47'\,06''$ $\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=+4{,}0$ $\bar{x}=89°\,47'\,10{,}0''$		$\Sigma=20$			$\Sigma=+80$	$\Sigma=448$		-18 $+18$ $\Sigma=0$	$\Sigma=128$

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]}=\frac{80}{20}=+4{,}0;\quad \beta=0;$$

$$[pv^2]=[p\varepsilon]-\frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}=448-\frac{6400}{20}=128;$$

$$\mu=\sqrt{\frac{128}{5}}=5{,}1'';\quad M=\frac{5{,}1''}{\sqrt{20}}=1{,}1'';\quad m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}=$$

$$=\frac{5{,}1''}{\sqrt{10}}=1{,}6'';\quad m_M=\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}=0{,}36.''$$

Ответ: $89°\,47'\,10{,}0''\pm 1{,}1''$.

3. Вычисляют $[pv^2]$ с контролем

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$$

и ошибки оценок μ, M:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; \qquad m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

При достаточно большом n оба значения μ [принятое для вычисления весов $\mu^2 = c$ и полученное по формуле (I.1.93)] должны совпадать в пределах ошибки m_μ. Их расхождение на величину, большую чем m_μ, указывает на наличие систематических ошибок.

Результат записывают в виде $\bar{x} \pm M$ или в виде доверительного интервала вида (I.1.81). Доверительный интервал для σ_0 строится точно так же, как и для σ в неравенстве (I.1.82).

Пример 43. Произвести математическую обработку по данным, приведенным в табл. 11, в которой даны средние значения одного и того же угла, измеренного разным числом приемов n. Для удобства вычислений целесообразно применять формулу $p_i = n/3$. Вычисления располагают в этой же таблице.

Пример 44. Отметка H точки местности получена по шести нивелирным ходам. Произвести полную математическую обработку результатов измерений по данным, приведенным в табл. 12.

ТАБЛИЦА 12

№ линии	H, м	m_H, мм	$p=\frac{10}{m_H^2}$	ε, мм	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	v	pv	pv^2
1	196,529	6,3	0,25	+12	3,00	36,0	+1,3	+0,33	0,4
2	522	8,4	0,14	+5	0,70	3,5	−5,7	−0,80	4,6
3	517	9,1	0,12	0	0	0	−10,7	−1,28	13,7
4	532	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	+4,3	+2,32	10,0
5	530	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	+2,3	+0,85	2,0
6	520	7,5	0,18	+3	0,54	1,6	−7,7	−1,39	10,7
$x' = 196{,}517$			$[p] = 1{,}60$		$[p\varepsilon] = 17{,}15$		−3,47	$[pv^2] = 41{,}4$	

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = +10{,}7$$

$$\bar{x} = 196{,}5277$$

$$\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{+17{,}15}{1{,}60} = +10{,}72 \text{ мм} = 0{,}01072 \text{ м}; \quad \beta = -0{,}02;$$

$$-[p]\beta = +0{,}03; \quad [pv^2] = 225{,}1 - \frac{294{,}1}{1{,}6} = 41{,}3.$$

Ответ: $\bar{x} = 196{,}5277$ м $\pm$ 2,3 мм.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса:

$$\mu = \sqrt{\frac{41{,}4}{6-1}} = 2{,}9 \text{ мм}; \quad m_\mu = \frac{2{,}9}{\sqrt{2(6-1)}} = 0{,}92; \quad \sqrt{c} = 3{,}1;$$

$$|\mu - \sqrt{c}| < m_\mu;$$

$$M = \frac{2{,}9}{\sqrt{1{,}6}} = 2{,}3 \text{ мм}; \qquad m_M = \frac{0{,}92}{\sqrt{1{,}6}} = 0{,}73 \text{ мм}.$$

I.1.26. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений

Если разности двойных измерений $d_i = x_i - x_i'$ получены по неравноточным измерениям (но попарно равноточным, т. е. $p_{x_i} = p_{x_i'}$), то имеем обратный вес разности

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x_i'}} = \frac{2}{p_{x_i}} \quad \text{и} \quad p_{d_i} = \frac{p_{x_i}}{2} = \frac{p_i}{2}.$$

Поэтому при отсутствии систематических ошибок получаем ошибку единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d \cdot d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}.$$

Средние квадратические ошибки средних значений $\bar{x}_i = \frac{x_i + x_i'}{2}$ будут равны

$$\bar{m}_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}.$$

В случае, когда разности d_i содержат систематические ошибки, величина

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]}$$

будет заметно отличаться от нуля. Тогда будем иметь

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}},$$

где $d_i' = d_i - \theta$.

Пример 45. Даны разности d_i двойных измерений некоторых величин и веса измерений. Выполнить оценку точности. Составим табл. 13.

Критерием допустимости θ является неравенство $|[d\sqrt{p}]| \leqslant 0{,}25\,[|d\sqrt{p}|]$.

Так как $\frac{[pd]}{[p]} \approx 0$, то средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{59{,}4}{20}} = 1{,}7.$$

Таблица для вычисления величин $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ **по аргументу** $t = \frac{x - M(x)}{\sigma}$ **или** $t = \frac{\Delta}{m}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5731	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	5614	5607	5602	5595	5588	5579	5571	5561	5551	5541
0,2	5530	5518	5507	5494	5481	5469	5455	5440	5425	5409
0,3	5394	5377	5360	5343	5325	5306	5288	5268	5250	5228
0,4	6209	5187	5166	5143	5121	5098	5076	5052	5028	5003
0,5	4979	4954	4929	4903	4876	4849	4822	4796	4769	4740
0,6	4712	4684	4656	4626	4598	4568	4538	3507	4477	4446
0,7	4417	4385	4354	4322	4291	4258	4227	4195	4162	4129
0,8	4097	4064	4030	3998	3964	3932	3898	3864	3831	3797
0,9	3763	3729	3695	3661	3627	3594	3558	3524	3490	3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	308	304	302	298	295	292	288	284	282	278
1,2	275	272	268	265	262	258	256	252	248	246
1,3	242	240	236	233	230	227	224	221	218	214
1,4	212	209	206	203	200	197	194	192	189	186
1,5	183	180	178	175	172	170	167	165	162	159
1,6	156	154	152	149	147	145	142	140	138	135
1,7	133	131	129	126	124	122	120	118	116	114
1,8	112	110	108	106	104	102	100	098	096	094
1,9	093	091	090	088	086	084	083	081	080	078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	062	061	060	058	057	056	055	053	052	051
2,2	050	049	048	047	046	045	044	043	042	041
2,3	040	039	038	038	037	036	036	034	033	032
2,4	0,032	031	030	030	029	028	027	027	026	025
2,5	025	024	024	023	022	022	021	021	020	020
2,6	019	019	018	018	017	017	016	016	016	015
2,7	015	014	014	014	013	017	012	012	012	011
2,8	011	011	011	010	010	010	009	009	009	009
2,9	008	008	008	008	008	007	007	007	007	007
3,0	006									

Таблицы значений интеграла вероятностей

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} - \ldots \right)$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	1,25	0,78870	2,50	0,98758
0,05	0,03988	1,30	0,80640	2,55	0,98922
0,10	0,07966	1,35	0,82298	2,60	0,99068
0,15	0,11924	1,40	0,83849	2,65	0,99195
0,20	0,15852	1,45	0,85294	2,70	0,99307
0,25	0,19741	1,50	0,86639	2,75	0,99404
0,30	0,23582	1,55	0,87886	2,80	0,99489
0,35	0,27366	1,60	0,89040	2,85	0,99563
0,40	0,31084	1,65	0,90106	2,90	0,99627
0,45	0,34729	1,70	0,91087	2,95	0,99682
0,50	0,38292	1,75	0,91988	3,00	0,99730
0,55	0,41768	1,80	0,92814	3,10	0,99806
0,60	0,45149	1,85	0,93569	3,20	0,99863
0,65	0,48431	1,90	0,94257	3,30	0,99903
0,70	0,51607	1,95	0,94882	3,40	0,99933
0,75	0,54675	2,00	0,95450	3,50	0,99953
0,80	0,57629	2,05	0,95964	3,60	0,99968
0,85	0,60468	2,10	0,96427	3,70	0,99978
0,90	0,63188	2,15	0,96844	3,80	0,99986
0,95	0,65789	2,20	0,97219	3,90	0,99990
1,00	0,68269	2,25	0,97555	4,00	0,99994
1,05	0,70628	2,30	0,97855	4,10	0,99996
1,10	0,72867	2,35	0,98123	4,20	0,99997
1,15	0,74986	2,40	0,98360	4,30	0,99998
1,20	0,76986	2,45	0,98571	4,40	0,99999

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Значения χ^2 в зависимости от r и p

	Значения вероятности p													
r	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,002	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Примечание. r — число степеней свободы

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений функции

$$z = \frac{1}{2}\left\{\ln(1+r) - \ln(1-r)\right\}$$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

Примечание. r — коэффициент корреляции.

Коэффициенты Стьюдента T_β

$n-2$	Значения доверительной вероятности β												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
19	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
25	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
28	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
40	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
60	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,6	3,3
∞	0,13	0,25	0,39	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0			

Примечание. $(n-2)$ = число степеней свободы

ТАБЛИЦА 13

№ измерения	Разность a_i	Вес измерения $p_{x_i} = p_i$	$p_i d_i^2$
1	+2,4	1,11	
2	−6,2	0,28	
3	−2,2	0,62	
4	+1,3	0,32	
5	−0,6	0,27	
6	+2,1	0,71	
7	−4,0	0,43	
8	+1,4	0,45	
9	+7,5	0,48	
10	−1,3	0,53	
	+14,7	$\Sigma = 5{,}20$	$\Sigma = 59{,}4$
	−14,3		
	$\Sigma = +0{,}4$		

Средняя квадратическая ошибка среднего весового

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}} = \frac{1{,}7}{\sqrt{2{,}22}} = 1{,}1.$$

I.2. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. Д. Большаков

А. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

I.2.1. Общие понятия о методе наименьших квадратов

В теории ошибок измерений рассматривался вопрос математической обработки многократных измерений одной и той же величины. В практике геодезических вычислений возникает и более общая задача совместной обработки результатов измерений величин, связанных между собой функционально, причем форма этой связи известна заранее или ее можно установить (выбрать) экспериментально. Естественно, что число измерений n при этом должно быть больше числа неизвестных k. Суммарным проявлением ошибок измерений в этом случае являются невязки. Получение наиболее надежных значений этих неизвестных, оценка точности их самих и функций от них составляют задачу так называемых уравнительных вычислений — уравнивания. Уравнивание выполняют по методу наименьших квадратов (м. н. к.), согласно которому измеренные величины получают поправки v_i, удовлетворяющие условию $[pv^2] = \min$, где p_i — вес измерений. К. Гауссом и русским математиком А. Марковым доказано, что этот принцип приводит к наилучшим оценкам для искомых неизвестных: они при условии отсутствия систематических ошибок в измерениях являются несмещенными и обладают минимальной дисперсией (теория Гаусса—Маркова). Это утверждение справедливо и для любых функций

уравненных неизвестных. При этом не требуется, чтобы результаты измерений подчинялись нормальному закону распределения. Однако в последнем случае, который наиболее часто имеет место в геодезической практике, уравнивая по м. н к., мы уменьшаем риск того, что найденные оценки в своей совокупности будут существенно отклоняться от истинных значений. Только при нормальном законе становится возможным построение доверительных интервалов.

Наличие избыточных измерений, число которых $r = n - k$, позволяет выполнить контроль измерений, оценить их точность и повысить точность уравненных неизвестных и их функций.

Доказывается, что отношение весов уравненных P и неуравненных p результатов измерений в среднем определяется формулой

$$\frac{P}{p} = \frac{n}{n-r} = \frac{n}{k} > 1.$$

Существуют два основных способа уравнивания: параметрический и коррелатный *). В первом случае решение приводит к непосредственному получению уравненных неизвестных (параметров), во втором сначала вычисляют уравненные коррелаты, а затем, как функции, — неизвестные. Оба способа уравнивания приводят к одним и тем же результатам, но они обладают различной трудоемкостью при решении одной и той же задачи.

Так, например, в полигонометрическом ходе число параметров равно удвоенному числу определяемых пунктов $2s$ (по числу координат X и Y этих пунктов), а число всех измерений (углов и длин сторон) равно $2s + 3$. При уравнивании этого хода параметрическим способом пришлось бы совместно решать $2s$ уравнений, а при коррелатном — всего $r = 2s + 3 - 2s = 3$ уравнения. Поэтому полигонометрический ход уравнивают коррелатным способом. Если же величины k и r примерно одинаковы, то существенное влияние на выбор способа уравнивания оказывает простота составления исходных уравнений.

Кроме указанных двух основных способов уравнивания существуют и так называемые комбинированные способы, сочетающие достоинства одного и другого.

Классическая теория м. н. к. предполагает некоррелированность результатов измерений. Однако современный м. н. к. обобщен и на коррелированные измерения.

Рассмотрим основные положения параметрического способа уравнивания.

I.2.2. Составление уравнений поправок и нормальных уравнений

Пусть в качестве искомых неизвестных (параметров) выбраны k величин, точные значения которых обозначим через X_j ($j = 1, 2, \ldots, k$). Заметим, что эти неизвестные не должны быть связаны между собой функциональными зависимостями. В качестве X_j могут быть выбраны также k измеренных величин. Измеренными являются n функций этих параметров. Если истинные значения измеренных величин обозначить через Y_i, то можно написать Y_i уравнений вида

$$Y_i = \varphi_i(X_1, X_2, \ldots, X_k), \qquad (I.2.1)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $n > k$.

*) Впервые эти названия введены в 1966 г. В. Д. Большаковым и П. А. Гайдаевым взамен способов посредственных и условных измерений соответственно.

Систему (I.2.1) называют параметрическими уравнениями связи. Так как истинные значения Y_i нам неизвестны, то нельзя определить и точные значения X_j. Однако в силу переопределенности исходной системы вместо Y_i и X_j можно подобрать так называемые уравненные значения y_i и x_j такие, что

$$y_i = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad (I.2.2)$$

причем $y_i = y_i' + v_i$, где y_i' — измеренное значение функции, а v_i — поправка.

Систему уравнений (I.2.2) необходимо привести к линейному виду. Разложив для этого функции $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$y_i' + v_i = a_i\,\delta x_1 + b_i\,\delta x_2 + \ldots + g_i\,\delta x_k + \varphi\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0\right)$$

или

$$v_i = a_i\,\delta x_1 + b_i\,\delta x_2 + \cdots + g_i\,\delta x_k + l_i, \qquad (I.2.3)$$

где свободный член (как правило, невязка)

$$l_i = \varphi_i\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0\right) - y_i'. \qquad (I.2.4)$$

Здесь $x_j^{(0)}$ — приближенные, однако близкие к точным значения параметров. Их обычно вычисляют по измеренным значениям y'. Первое слагаемое в уравнении (I.2.4) представляет приближенное значение функции. Коэффициенты a_i, b_i, ..., g_i в уравнении (I.2.3) суть частные производные

$$a_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{x_1 = x_1^0},$$

$$b_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2}\right)_{x_2 = x_2^0}, \quad \ldots, \quad g_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\right)_{x_k = x_k^0},$$

взятые по истинным значениям параметров, но вычисленные при их приближенных значениях.

Уравнения вида (I.2.3) называют системой уравнений поправок.

Если система параметрических уравнений связи (I.2.2) имеет линейный вид, то уравнения поправок также имеют вид (I.2.3), при этом коэффициенты a_i, b_i, ..., g_i равны коэффициентам при неизвестных x_j в этих уравнениях.

Решение уравнений (I.2.3) под условием $[pv^2] = \min$ приводит к системе k линейных уравнений с k неизвестными. Система

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\,\delta x_1 + [pab]\,\delta x_2 + [pac]\,\delta x_3 + \cdots + [pag]\,\delta x_k + [pal] = 0\\
&[pab]\,\delta x_1 + [pbb]\,\delta x_2 + [pbc]\,\delta x_3 + \cdots + [pbg]\,\delta x_k + [pbl] = 0\\
&[pac]\,\delta x_1 + [pbc]\,\delta x_2 + [pcc]\,\delta x_3 + \cdots + [pcg]\,\delta x_k + [pcl] = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[pag]\,\delta x_1 + [pbg]\,\delta x_2 + [pcg]\,\delta_3 + \cdots + [pgg]\,\delta x_k + [pgl] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (I.2.5)$$

называется нормальной.

В системе уравнений (I.2.5) коэффициенты при δx (гауссовы суммы) раскрываются так:

$$[paa] = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i a_i; \qquad [pab] = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \quad \text{и т. д.}$$

По главной диагонали QQ_1 этой системы расположены квадратичные коэффициенты, являющиеся всегда положительными числами; коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой:

$$[pab] = [pba]; \; [pac] = [pca] \text{ и т. д.}$$

В случае равноточных изменений система (I.2.5) имеет вид

$$\begin{aligned}
&[aa]\,\delta x_1 + [ab]\,\delta x_2 + [ac]\,\delta x_3 + \ldots + [ag]\,\delta x_k + [al] = 0;\\
&[ab]\,\delta x_1 + [bb]\,\delta x_2 + [bc]\,\delta x_3 + \ldots + [bg]\,\delta x_k + [bl] = 0;\\
&[ac]\,\delta x_1 + [cb]\,\delta x_2 + [cc]\,\delta x_3 + \ldots + [cg]\,\delta x_k + [cl] = 0; \qquad \text{(I.2.6)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[ag]\,\delta x_1 + [bg]\,\delta x_2 + [cg]\,\delta x_3 + \ldots + [gg]\,\delta x_k + [gl] = 0,
\end{aligned}$$

где все $p_i = 1$.

Дальнейшая задача заключается в решении системы нормальных уравнений.

I.2.3. Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса

Разработанный Гауссом способ решения нормальных уравнений сводится к последовательному исключению из нее всех неизвестных. При этом исходная система заменится так называемой эквивалентной системой уравнений, которая для равноточных измерений имеет вид:

$$\begin{aligned}
&[aa]\;\delta x_1 + [ab]\;\delta x_2 + [ac]\;\delta x_3 + \ldots + [ag]\;\delta x_k + [al] = 0;\\
&[bb\cdot 1]\,\delta x_2 + [bc\cdot 1]\,\delta x_3 + \ldots + [bg\cdot 1]\,\delta x_k + [bl\cdot 1] = 0;\\
&[cc\cdot 2]\,\delta x_3 + \ldots + [cg\cdot 2]\,\delta x_k + [cl\cdot 2] = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[gg\,(k-1)]\,\delta x_k + [gl\,(k-1)] = 0.
\end{aligned} \qquad \text{(I.2.7)}$$

Ее получение называется прямым ходом решения. Неизвестные, начиная с последнего, вычисляют из так называемых элиминационных уравнений, получаемых из системы уравнений (I.2.7) и имеющих вид:

$$\begin{aligned}
\delta_{x_1} &= -\frac{[ab]}{[aa]}\,\delta x_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\,\delta x_3 - \cdots - \frac{[ag]}{[aa]}\,\delta x_k - \frac{[al]}{[aa]};\\
\delta_{x_2} &= -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\delta x_3 - \cdots - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,\delta x_k - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}; \qquad \text{(I.2.8)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\delta_{x_k} &= \frac{[gl\,(k-1)]}{[gg\,(k-1)]}.
\end{aligned}$$

Этот процесс называют обратным ходом решения.

Коэффициенты при неизвестных в эквивалентной системе (I.2.7) называются алгоритмами Гаусса.

Правило раскрытия алгоритма Гаусса. Будем называть алгоритм с цифрой j преобразованным, а без цифры — непреобразованным. Тогда любой преобразованный алгоритм Гаусса равен этому же непреобразованному алгоритму минус число дробей, совпадающих с цифрой j раскрываемого алгоритма. Знаменатели этих дробей равны первым коэффициентам $(j-1)$ эквивалентных уравнений, а их числители — произведению двух алгоритмов с той же цифрой, что и в алгоритме знаменателя, причем первый сомножитель условно получается как произведение первой буквы знаменателя на первую букву раскрываемого алгоритма, а второй — как произведение второй буквы знаменателя на его вторую букву.

Например,

$$\begin{aligned}
[bb\cdot 1] &= [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]};\\
[bl\cdot 1] &= [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]};\\
[cl\cdot 2] &= [cl] - \frac{[ac]\,[al]}{[aa]} - \frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Возможна и неполная форма раскрытия алгоритма, когда раскрываемый алгоритм с цифрой j равен тому же алгоритму с цифрой $(j-1)$ минус последняя дробь из полной формы раскрытия.

Например,

$$[cl\cdot 2] = [cl\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}.$$

При неравноточных измерениях во всех алгоритмах Гаусса приписывается буква p.

I.2.4. Контроль составления и решения нормальных уравнений

Контроль составления уравнений поправок производится вычислением в две руки

$$a_i + b_i + c_i + \cdots + g_i + l_i = s_i; \qquad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n), \qquad \text{(I.2.9)}$$

причем

$$[a] + [b] + [c] + \ldots + [g] + [l] = [s]. \qquad \text{(I.2.10)}$$

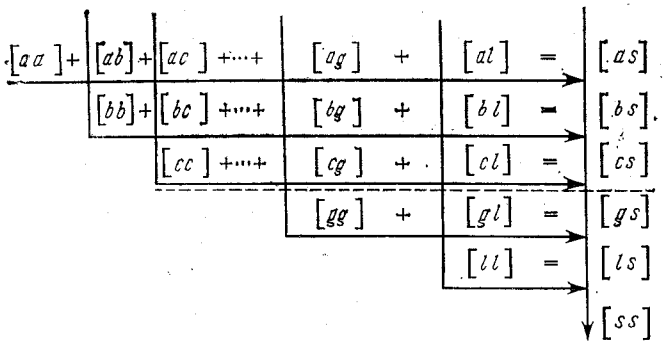
Контроль составления и решения нормальных уравнений производится методом сумм:

$$[pa] + [pb] + [pc] + \ldots + [pg] + [pl] = [ps]. \qquad \text{(I.2.10')}$$

Коэффициенты нормальных уравнений контролируют так:

$$\begin{aligned}
&[aa] + [ab] + \ldots + [ag] + [al] = [as];\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[ag] + [bg] + \ldots + [gg] + [gl] = [gs];\\
&[al] + [bl] + \ldots + [gl] + [ll] = [ls]; \qquad \text{(I.2.11)}\\
&[as] + [bs] + \ldots + [gs] + [ls] = [ss].
\end{aligned}$$

В схеме Гаусса суммирование выполняется углом:



Далее

$$[aa]+[ab]+[ac]+\ldots+[ag]+[al]=[as];$$
$$[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+\ldots+[bg\cdot 1]+[bl\cdot 1]=[bs\cdot 1];$$
$$[cc\cdot 2]+\ldots+[cg\cdot 2]+[cl\cdot 2]=[cs\cdot 2]; \quad (I.2.12)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[gg\,(k-1)]+[gl\,(k-1)]=[gs\,(k-1)].$$

Заключительным контролем прямого хода решения в схеме Гаусса является выполнение равенств (так называемый заключительный контроль)

$$[ll\cdot k]=[ls\cdot k]=[ss\cdot k] \quad (I.2.13)$$

или

$$[pll\cdot k]=[pls\cdot k]=[pss\cdot k]. \quad (I.2.13')$$

Закончив прямой ход решения, переходят к вычислению неизвестных δx_j. По мере вычисления контроль осуществляют подстановкой найденных неизвестных в эквивалентные уравнения [I.2.7].

Получив все неизвестные δx_j согласно уравнениям (I.2.8), вычисляют по формуле (I.2.3) поправки v_i и осуществляют контроль их вычисления на основе выражений

$$\begin{aligned} [av]&=0 \qquad [pav]=0;\\ [bv]&=0 \text{ или } [pbv]=0;\\ [gv]&=0 \qquad [pgv]=0, \end{aligned} \quad (I.2.14)$$

которые представляют собой сокращенную запись нормальных уравнений (I.2.5), (I.2.6) и часто называются нормальными уравнениями в свернутом виде (совокупность этих равенств известна как лемма Гаусса).

Проверяют также выполнение контрольных равенств

$$[v^2]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k] \quad (I.2.15)$$

или

$$[pv^2]=[pll\cdot k]=[pls\cdot k]. \quad (I.2.15')$$

Справедливы равенства

$$[v^2]=[lv]=[sv] \text{ и } [pv^2]=[plv]=[psv]. \quad (I.2.16)$$

Схема 1

№ уравнения	a_i	b_i	c_i	l_i	s_i	v_i
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1	v_1
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2	v_2
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n	v_n
Суммы	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[l]$	$[s]$	$[v]$
Неизвестные	δx_1	δx_2	δx_3			
Контроль	$[av]$	$[bv]$	$[cv]$			$[v^2]$

Схема 2

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	Контроль
$[a$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	Расхождение до 0,01
$[b$		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	
$[c$			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	
$[l$				$[ll]$	$[ls]$	
$[s$					$[ss]$	

Схема 3

	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
$1/[aa]$	$[aa]$ (-1)	$[ab]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}$	$[ac]$ $-\frac{[ac]}{[aa]}$	$[al]$ $-\frac{[al]}{[aa]}$	$[as]$ $-\frac{[as]}{[aa]}$	
$1/[bb\cdot 1]$		$[bb\cdot 1]$ (-1)	$[bc\cdot 1]$ $-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$[bl\cdot 1]$ $-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$[bs\cdot 1]$ $-\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	
$1/[cc\cdot 2]$			$[cc\cdot 2]$ (-1)	$[cl\cdot 2]$ $-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$[cs\cdot 2]$ $-\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
	δx_1	δx_2	δx_3	$[ll\cdot 3]$	$[ls\cdot 3]$ $[ss\cdot 3]$	

Окончательным контролем решения задачи уравнивания является соблюдение равенств

$$y'_i + v_i = \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k),$$

которые следует проверить при нелинейных функциях (контролируется правильность разложения в ряд).

В линейных задачах достаточно ограничиться проверкой равенств (I.2.14) и (I.2.16).

Составление нормальных уравнений при равноточных измерениях и их решение выполняют с помощью трех схем, приведенных для простоты для случая трех неизвестных, что легко распространить на любое число неизвестных.

При небольшом числе неизвестных ($k \leqslant 10$)коэффициенты нормальных уравнений следует вычислять до 0,01. С такой же точностью вычисляют и коэффициенты эквивалентных уравнений. Коэффициенты же элиминационных уравнений и неизвестные вычисляют до 0,001. Величины $1/[aa]$, $1/[bb\cdot 1]$ и т. д. в схеме 3 введены для замены действия деления умножением. Их вычисляют до 0,0001.

Расхождение контрольных сумм эквивалентных строк в схеме Гаусса допускают до 0,01—0,02 (допуск увеличивается по мере спуска вниз по схеме). Заметим, что в столбец s схемы 3 выписывают числа из столбца «контроль» схемы 2.

Схема 3 представляет собой сокращенную схему Гаусса, в которой опущены промежуточные записи, связанные с раскрытием алгоритмов. Все алгоритмы Гаусса в этой схеме получаются методом накопления на счетчиках вычислительных машин. Если выполнить порядковую нумерацию строк в схеме 3, опустив элиминационные строки, то можно сформулировать следующее правило вычисления коэффициентов этих строк: любой коэффициент, расположенный в i-й строке и j-м столбце схемы, равен соответствующему коэффициенту из схемы 2 плюс сумма произведений уже полученных чисел элиминационных строк из столбца i на числа из столбца j, расположенные над ними (в эквивалентных строках). Например, алгоритм $[cs\cdot 2]$ ($i = 3$, $j = 5$) равен $[cs]$ плюс сумма произведений чисел элиминационных строк из столбца 3 ($-[ac]/[aa]$ и $-[bc\cdot 1]/[bb\cdot 1]$) соответственно на числа $[as]$ и $[bs\cdot 1]$ (числа эквивалентных строк из столбца 5). Неизвестные δx_j вычисляются по следующему правилу: неизвестное δx с номером j равно числу j-й элиминационной строки из столбца l плюс сумма произведений уже вычисленных неизвестных δx на расположенные над ними числа из этой же элиминационной строки.

При уравнивании неравноточных измерений описанный нами порядок вычислений остается без изменений. Однако схема 1 приобретает такой вид:

	a_i b_i c_i	l_i s_i	p_ia_i p_ib_i p_ic_i p_il_i p_is_i	v_i	p_iv_i
1					
2					
.					
.					
.					
n					
	δx_1 δx_2 δx_3		$[pa]$ $[pb]$ $[pc]$ $[pl]$ $[ps]$		

а в алгоритмах схемы 2 добавляется буква p, при этом любой алгоритм Гаусса получается как сумма произведений всех чисел из соответствующих этому алгоритму столбцов схемы 2. Например,

$$[paa] = \sum_{i=1}^{n} a_ip_ia_i; \qquad [pab] = \sum_{i=1}^{n} a_ip_ib_i \text{ и т. д.}$$

При неравноточных измерениях возможна также схема вычислений, соответствующая равноточным измерениям. В самом деле, как было показано в выражении (I.1.24), неравноточные измерения можно свести к равноточным умножением каждого результата на корень квадратный из его веса. При этом уравнения поправок приобретают вид

$$v'_i = a'_i\,\delta x_1 + b'_i\,\delta x_2 + \cdots + g'_i\,\delta x_3 + l'_i,$$

аналогичный выражению (I.2.3), где

$$a'_i = a_i\sqrt{p_i}; \qquad b'_i = b_1\sqrt{p_i}, \ \ldots; \ g'_i = g_i\sqrt{p_i};$$

$$v'_i = v_i\sqrt{p_i} \quad \text{и} \quad l'_i = l_i\sqrt{p_i};$$

все формулы и схемы, полученные для равноточных измерений, остаются в силе, если коэффициенты a_i, b_i, ..., g_i и свободные члены l_i заменить на a'_i, b'_i, ..., g'_i. В конце вычислений необходимо вычислить поправки $v_i = v'_i/\sqrt{p_i}$.

I.2.5. Пример уравнивания равноточных измерений параметрическим способом

В табл. 14 даны результаты измерения углов во всех комбинациях (рис. 13). Уравнять эти результаты параметрическим способом.

Решение I. Выберем в качестве независимых неизвестных (параметров) x_1, x_2, x_3 соответственно первый, второй и третий углы. Тогда остальные три угла, зависящие от первых трех, будут представлять собой суммы независимых неизвестных.

II. Записываем уравненения поправок в общем виде:

$$\begin{gathered}
\delta x_1 + l_1 = v_1;\\
\delta x_1 + l_2 = v_2;\\
\delta x_1 + l_3 = v_3;\\
\delta x_1 + \delta x_2 + l_4 = v_4;\\
\delta x_1 + \delta x_3 + l_5 = v_5;\\
\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + l_6 = v_6.
\end{gathered} \qquad \text{(I.2.17)}$$

ТАБЛИЦА 14

№ угла	Угол	Измеренное значение	Неизвестные	Уравненное значение
1	AOB	38° 31′ 15,5″	x_1	38° 31′ 15,62″
2	BOC	46 07 30,0	x_2	46 07 29,88
3	COD	17 43 46,5	x_3	17 43 46,87
4	AOC	84 38 45,0	$x_1 + x_2$	84 38 45,50
5	BOD	63 51 16,5	$x_2 + x_3$	63 51 16,75
6	AOD	102 22 33,0	$x_1 + x_2 + x_3$	102 22 32,37

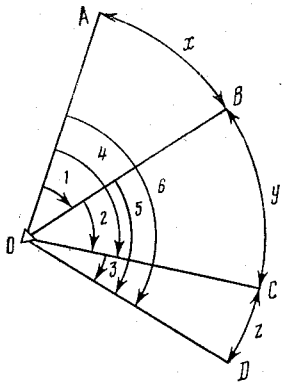


Рис. 13. Схема измерения углов во всех комбинациях

III. Введем приближенные значения неизвестных, приняв их равными измеренным значениям углов x_1, x_2, x_3:

$$x_1^{(0)} = 38^\circ\,31'\,15{,}5'';$$

$$x_2^{(0)} = 46\ 07\ 30{,}0\ ;$$

$$x_3^{(0)} = 17\ 43\ 46{,}5.$$

IV. На основании выражения (I.2.4) вычислим свободные члены l_i как разности приближенных и измеренных значений углов. Получаем:

$$l_1 = 0;\ l_3 = 0;\ l_5 = 0;$$

$$l_2 = 0;\ l_4 = +0{,}8'';\ l_6 = -1{,}0''.$$

V. По уравнениям (I.2.17) составим таблицу коэффициентов уравнений поправок и нормальных уравнений (табл. 15, 16).

Выполним решение нормальных уравнений (табл. 17).

Как видим, все предусмотренные контроли выполняются. Уравненные значения углов приведены в табл. 14 в последнем столбце.

ТАБЛИЦА 15

№ угла	a	b	c	l	s	v
1	+1				+1	+0,12
2		+1			+1	−0,12
3			+1		+1	+0,37
4	+1	+1		+0,5	+2,5	+0,50
5		+1	+1			+0,25
6	+1	+1	+1	−1,0	+2,0	−0,63
	+3	+4	+3	−0,5	+9,5	

$$[v^2] = 0{,}874$$

ТАБЛИЦА 16

$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$	Контроль
+3,00	+2,00	+1,00	−0,50	+5,50	+5,50
	+4,00	+2,00	−0,50	+7,50	+7,50
		+3,00	−1,00	+5,00	+5,00
			−1,25	−0,75	−0,75
				+17,25	+17,25

ТАБЛИЦА 17

	δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль
−0,3333	3,00	2,00	+1,00	−0,50	+5,50	+5,50
	(−1)	−2,667	−0,333	+0,167	−1,833	−1,833
−0,3745		+2,67	+1,33	−0,17	+3,83	+3,83
		(−1)	(−0,498)	+0,064	−1,434	−1,434
−0,5000			+2,00	−0,75	+1,26	+1,25
			(−1)	+0,373	−0,627	−0,627
	δx_1	δx_2	δx_3	0,88	+0,89	
	+0,124	−0,122	+0,373		+0,89	

I.2.6. Оценка точности уравненных величин

Для оценки точности уравненных величин последние необходимо выразить в виде линейных функций непосредственно измеренных величин, или, что одно и то же, свободных членов уравнений поправок. Можно доказать, что

$$\delta x_1 = -[pal]\,Q_{11} - [pbl]\,Q_{12} - [pcl]\,Q_{13} - \ldots - [pgl]\,Q_{1k};$$

$$\delta x_2 = -[pal]\,Q_{21} - [pbl]\,Q_{22} - [pcl]\,Q_{23} - \ldots - [pgl]\,Q_{2k};$$

$$\delta x_3 = -[pal]\,Q_{31} - [pbl]\,Q_{32} - [pcl]\,Q_{33} - \ldots - [pgl]\,Q_{3k}; \quad \text{(I.2.18)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta x_k = -[pal]\,Q_{k1} - [pbl]\,Q_{k2} - [pcl]\,Q_{k3} - \cdots - [pgl]\,Q_{kk},$$

где Q_{ij} — так называемые весовые коэффициенты, определяемые из решения k систем нормальных уравнений с теми же коэффициентами, что и в системе (I.2.5), но с разными свободными членами, равными k столбцам вида

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(I.2.19)}$$

Из каждой системы весовых уравнений можно определить k весовых коэффициентов. Всех весовых коэффициентов при k неизвестных будет k^2.

Весовые уравнения решаются одновременно с нормальными уравнениями и в той же последовательности, используя одни и те же значения коэффициентов первого — k-го столбца схемы 3. Значения свободных членов каждой системы весовых уравнений вносятся в дополнительный столбец.

ТАБЛИЦА 18

Q_{1j}	Q_{2j}	Q_{3j}	l_1	l_2	l_3
+3,00 −1,00	+2,00 −0,667	+2,00 −0,333	−1 +0,333	0 0	0 0
	+2,67 −1,000	+1,33 −0,498	+0,67 −0,251	−1,00 +0,374	0 0
		2,00 −1,000	0 0	+0,498 −0,249	−1,00 +0,500

$$\begin{pmatrix} +0{,}500 & -0{,}250 & 0 \\ -0{,}250 & +0{,}499 & -0{,}249 \\ 0 & -0{,}249 & +0{,}500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Примечание. Столбцы l и s здесь опущены.

В схеме 3 для единообразия обозначения свободные члены (I.2.19) весовых уравнений, равные — 1 или 0, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} [pal]_1 \\ [pbl]_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ [pgl]_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [pal]_2 \\ [pbl]_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ [pgl]_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} [pal]_k \\ [pbl]_k \\ \cdot \\ \cdot \\ [pgl]_k \end{pmatrix}.$$

С этими обозначениями весовые коэффициенты вычисляются по тем же формулам, что и неизвестные δx_j. Контролем вычислений служит свойство весовых коэффициентов $Q_{ij} = Q_{ji}$. Рассматривая пример, данный в гл. I.2.6, по схеме 3 получим следующие весовые коэффициенты (табл. 18) *.

Преобразовав в схеме Гаусса все дополнительные столбцы, сначала, как и неизвестные, вычисляют весовые коэффициенты Q_{33}, Q_{32}, Q_{31} по третьему преобразованному столбцу, затем Q_{23}, Q_{22}, Q_{21} — по второму и, наконец, Q_{13}, Q_{12}, Q_{11} — по первому.

Исходя из системы уравнений (I.2.18), можно доказать, что

$$\frac{1}{p_{x_i}} = Q_{jj}.$$

Поэтому

$$m_{x_j} = \mu \sqrt{Q_{jj}}, \tag{I.2.20}$$

где μ — ошибка единицы веса, определяемая формулой

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}} \tag{I.2.21}$$

(обобщение формулы Бесселя, полученной выше при $k = 1$).

* С учетом свойства $Q_{ij} = Q_{ji}$ достаточно вместо k^2 весовых коэффициентов получить $\frac{k^2+k}{2}$.

В случае равноточных измерений

$$mx_j = m\sqrt{Q_{jj}}, \tag{I.2.22}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}. \tag{I.2.23}$$

Рассматривая пример гл. I.2.5,

$$m = \sqrt{\frac{0{,}88}{6-3}} = 0{,}54''$$

и

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = 0{,}54\sqrt{0{,}50} = 0{,}38''.$$

Заметим, что $r_{ij} = Q_{ij}/\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}$ — есть коэффициенты корреляции между уравненными i-м и j-м неизвестными.

Коэффициент корреляции между первым и вторым неизвестными

$$r_{1,2} = \frac{-0{,}250}{\sqrt{0{,}500 \cdot 0{,}500}} = -\frac{0{,}250}{0{,}500} = -0{,}5.$$

I.2.7. Оценка точности функций уравненных величин

Для функции

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где x_j — уравненные неизвестные, обратный вес можно найти по формуле

$$\frac{1}{P_F} = \sum f_j^2 Q_{jj} + 2\sum_{i<j} f_i f_j Q_{ij}; \tag{I.2.24}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots k),$$

где коэффициенты

$$f_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right).$$

В примере гл. I.2.5 обратный вес суммы уравненных углов

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \tag{I.2.25}$$

(шестой угол) найдем, учитывая, что все $f_j = 1$, по формуле (I.2.24)

$$\frac{1}{P_F} = 0{,}50 + 0{,}50 + 0{,}50 + 2(Q_{12} + Q_{13} + Q_{23}) =$$

$$= 1{,}50 + 2(-0{,}250 - 0{,}250) = 0{,}50.$$

Если же весовые коэффициенты неизвестны, то справедлива формула

$$\frac{1}{P_F} = -\frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \cdots - \frac{[f_k \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}, \tag{I.2.26}$$

где Q — обратная по отношению R матрица,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11}Q_{12} \ldots Q_{1k} \\ Q_{21}Q_{22} \ldots Q_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ Q_{k1}Q_{k2} \ldots Q_{kk} \end{pmatrix}.$$

Так как по свойству обратных матриц $RQ = E$, то сразу следует описанный ранее способ вычисления весовых коэффициентов — решение k систем вида $RQ_j - E_j = 0$, где Q_j — j-й столбец матрицы Q, а F_j —j-й столбец матрицы F.

При оценке точности сразу нескольких функций получаем матрицу $Q_F = fQf^T$, диагональные элементы которой соответствуют обратным весам (I.2.24) (f — матрица, содержащая строки из коэффициентов f_j функций).

I.2.9. Решение системы нормальных уравнений с помощью определителей (детерминантов)

Если система нормальных уравнений не выше 4-го порядка (четыре уравнения, четыре неизвестных), то весьма удобным способом ее решения является способ определителей. При числе уравнений в системе больше четырех прямое вычисление определителей является громоздкой задачей. Из алгебры известно, что если определитель системы $D \neq 0$, то система определенная, и по Крамеру ее неизвестные выражаются формулами:

$$\delta x_1 = \frac{D_{\delta x_1}}{D}; \quad \delta x_2 = \frac{D_{\delta x_2}}{D}; \quad \delta x_3 = \frac{D_{\delta x_3}}{D} \quad \text{и т. д.,} \qquad (I.2.33)$$

где D — определитель системы; $D_{\delta x_1}$, $D_{\delta x_2}$, $D_{\delta x_3}$ — определители соответствующих неизвестных.

В формулах (I.2.33):

$$D = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix}; \qquad (I.2.34)$$

$$D_{\delta x_1} = -\begin{vmatrix} [pal] & [pab] & [pac] \\ [pbl] & [pbb] & [pbc] \\ [pcl] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix}; \qquad (I.2.35)$$

$$D_{\delta x_2} = -\begin{vmatrix} [paa] & [pal] & [pac] \\ [pab] & [pbl] & [pbc] \\ [pac] & [pcl] & [pcc] \end{vmatrix}; \qquad (I.2.36)$$

$$D_{\delta x_3} = -\begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pal] \\ [pab] & [pbb] & [pbl] \\ [pac] & [pbc] & [pcl] \end{vmatrix}. \qquad (I.2.37)$$

Из сравнения формул (I.2.34), (I.2.35), (I.2.36), (I.2.37) видно, что $D_{\delta x_1}$, $D_{\delta x_2}$, $D_{\delta x_3}$ составляются заменой в определителе системы D соответствующего номеру неизвестного столбца столбцом свободных членов нормальных уравнений и переменой знака «плюс» на «минус».

Правило вычисления определителя 2-го порядка выражается формулой

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (I.2.38)$$

Для определителя 3-го порядка по «правилу Саррюса»

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{matrix} & & & + & + & + \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (I.2.39)$$

Из формулы (I.2.39) видно, что «правило Саррюса» состоит в том, что при вычислении определителя 3-го порядка к нему приписываются два первых столбца и далее обычным путем определитель представляется как алгебраическая сумма произведений его элементов, составленных по соответствующим диагоналям (сверху вниз все со знаком «плюс» и снизу вверх со знаком «минус»).

Если необходимо найти определитель n-го порядка по одному из свойств определителей, его сводят к $(n-1)$-му порядку, разложив по элементам любой (i-й) строки по формуле

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad (I.2.40)$$

где A_{in} — алгебраические дополнения элемента строки a_{ij}.

По формуле (I.2.34)

$$D = [paa]\,A_{11} + [pab]\,A_{12} + [pac]\,A_{13} \qquad (I.2.41)$$

или

$$D = [paa]\begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} - [pab]\begin{vmatrix} [pab] & [pbc] \\ [pac] & [pcc] \end{vmatrix} + [pac]\begin{vmatrix} [pab] & [pbb] \\ [pac] & [pbc] \end{vmatrix}. \qquad (I.2.42)$$

A_{11}, A_{12}, A_{13} в данном случае в формуле (I.2.42) получены по общей формуле минора соответствующего алгебраического дополнения

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nj} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (I.2.43)$$

Как известно из алгебры, минором элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, составленный после зачеркивания в данном определителе порядка n i-й строки и j-го столбца.

Из формулы (I.2.43) для формул (I.2.41) и (I.2.42) следует:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}[bb] & [bc]\\ [bc] & [cc]\end{vmatrix}=[bb][cc]-[bc]^2;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}[ab] & [bc]\\ [ac] & [cc]\end{vmatrix}=-[ab][cc]+[ac][bc]; \quad (I.2.44)$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}[ab] & [bb]\\ [ac] & [bc]\end{vmatrix}=[ab][bc]-[ac][bb].$$

Нетрудно доказать, что для системы (I.2.5) в принятых обозначениях можем записать:

$$\begin{aligned} m_{\delta x_1}&=\mu\sqrt{\frac{A_{11}}{D}};\\ m_{\delta x_2}&=\mu\sqrt{\frac{A_{22}}{D}};\\ m_{\delta x_3}&=\mu\sqrt{\frac{A_{33}}{D}};\\ &\cdots\cdots\cdots\\ m_{\delta x_k}&=\mu\sqrt{\frac{A_{kk}}{D}}. \end{aligned} \qquad (I.2.45)$$

Здесь $m_{\delta x_1}$, $m_{\delta x_2}$, $m_{\delta x_3}$, ..., $m_{\delta x_k}$ — средние квадратические ошибки параметров δx_1, δx_2, δx_3, ..., δx_k;

$$\mu=\sqrt{\frac{|pvv|}{n-k}} \qquad (I.2.46)$$

— средняя квадратическая ошибка единицы веса; A_{11}, A_{22}, A_{33}, ..., A_{kk} — алгебраические дополнения диагональных элементов; D — определитель системы.

На основании системы уравнений (I.2.45), принимая при вычислении весов найденных параметров $c=\mu^2$, получим

$$P_{\delta x_1}=\frac{D}{A_{11}},\quad P_{\delta x_2}=\frac{D}{A_{22}},\quad P_{\delta x_3}=\frac{D}{A_{33}},\quad \ldots,\quad P_{\delta x_k}=\frac{D}{A_{kk}}. \qquad (I.2.47)$$

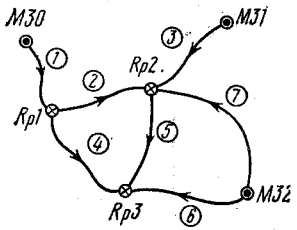
Формула обратного веса функции, соответствующая формуле (I.2.24), в данном случае (для способа определителей) примет вид:

$$\frac{1}{P_F}=\frac{1}{D}\sum f_i^2A_{ii}+\frac{2}{D}\sum f_if_jA_{ij}, \qquad (I.2.48)$$

где $i, j=1, 2, \ldots, k$.

I.2.10. Пример уравнивания нивелирной сети параметрическим способом

Схема сети представлена на рис. 14, исходные данные — в табл. 20, результаты измерений — в табл. 21.



Р и с. 14. Схема сети нивелирных ходов

ТАБЛИЦА 20

№ марки	Отметка исходной марки, м
M30	183,506
M31	192,353
M32	191,880

ТАБЛИЦА 21

№ хода	Превышение, м	Длина хода, км	Вес $P_i=\frac{c}{L_i}$
1	+6,135	33,0	1,21
2	+8,343	33,9	1,17
3	+5,614	30,4	1,31
4	+1,394	32,7	1,22
5	—6,969	31,8	1,25
6	—0,930	29,9	1,34
7	+6,078	34,5	1,15

Приближенные значения отметок реперов:

$x_1^{(0)}=189{,}641$ м; $x_2^{(0)}=197{,}967$ м; $x_3^{(0)}=190{,}950$ м.

Уравнения поправок:

$$\begin{aligned} +\delta x_1 &= v_1,\\ -\delta x_1+\delta x_2-1{,}7 &= v_2,\\ +\delta x_2 &= v_3,\\ -\delta x_1+\delta x_3-8{,}5 &= v_4,\\ -\delta x_2+\delta x_3-4{,}8 &= v_5,\\ +\delta x_3 &= v_6,\\ +\delta x_2+0{,}9 &= v_7. \end{aligned}$$

Свободные члены выражены в сантиметрах.

Веса измерений вычисляем по формуле $P_i = 40/L_i$.

В табл. 22 и 23 приведены коэффициенты уравнений поправок и нормальных уравнений *.

Решение системы нормальных уравнений приведено в табл. 24.

В результате проведенного решения получены следующие значения неизвестных:

$$x_1 = 189{,}641 \text{ м} - 2{,}64 \text{ см} = 189{,}614 \text{ м};$$
$$x_2 = 197{,}967 \text{ м} - 0{,}85 \text{ см} = 197{,}958 \text{ м};$$
$$x_3 = 190{,}950 \text{ м} + 3{,}17 \text{ см} = 190{,}981 \text{ м}.$$

ТАБЛИЦА 22

№ уравнения	a	b	c	l, см	s	p	v, см
1	+1	0	0	0,0	+1,0	1,21	−2,64
2	−1	+1	0	−1,7	−1,7	1,17	+0,08
3	0	+1	0	0,0	+1,0	1,31	−0,85
4	−1	0	+1	−8,5	−8,5	1,22	−2,69
5	0	−1	+1	−4,8	−4,8	1,25	−0,77
6	0	0	+1	0,0	+1,0	1,34	+3,17
7	0	+1	0	+0,9	+1,9	1,15	+0,05
	−1	+2	+3	−14,1	−10,1		
δx_j	−2,64	−0,85	+3,17				
	0,00	0,01	−0,01				

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{32{,}42}{7-3}} = 2{,}85 \text{ см};$$

средняя квадратическая ошибка на 1 км хода

$$m_{\text{км}} = \sqrt{\frac{\mu}{40}} = 0{,}45 \text{ см}.$$

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$s]$
$[pa]$	+3,60	−1,17	−1,22	+12,36	+13,57
$[pb]$		+4,88	−1,25	+5,05	+7,51
$[pc]$			+3,81	−16,37	−15,03
$[pl]$				+121,26	+122,30
$[ps]$					+128,35

* Если коэффициенты уравнений поправок ±1 или 0, столбцы pa, pb, pc можно не добавлять.

Вес последнего неизвестного найден дважды:

$$p_{x_3} = [cc \cdot 2] = 2{,}80; \quad p_{x_3} = \frac{1}{Q_{33}} = 2{,}80.$$

Вес первого неизвестного также получен дважды:

$$p_{x_1} = \frac{1}{p_{F_1}} = 2{,}65; \quad p_{x_1} = \frac{1}{Q_{11}} = 2{,}65.$$

Вес предпоследнего неизвестного:

$$p_{x_2} = \frac{1}{Q_{22}} = 3{,}70; \quad p_{x_2} = \frac{[bb \cdot 1]}{[cc \cdot 1]} = 3{,}70.$$

Ошибки:

$$m_{x_1} = \mu\sqrt{Q_{11}} = 2{,}85\sqrt{0{,}3763} = 1{,}75 \text{ см};$$
$$m_{x_2} = \mu\sqrt{Q_{22}} = 2{,}85\sqrt{0{,}2700} = 1{,}48 \text{ см};$$
$$m_{x_3} = \mu\sqrt{Q_{33}} = 2{,}85\sqrt{0{,}3578} = 1{,}70 \text{ см};$$
$$m_{F_2} = \mu\sqrt{\frac{1}{p_{F_2}}} = 2{,}85\sqrt{0{,}3660} = 1{,}72 \text{ см}.$$

После введения поправок в измеренные величины получим:

$$h_1 = +6{,}108_6 \text{ м}; \; h_2 = +8{,}343_8 \text{ м}; \; h_3 = +5{,}605_5 \text{ м};$$
$$h_4 = +1{,}367_2 \text{ м}; \; h_5 = -6{,}976_7 \text{ м}; \; h_6 = -0{,}898_2 \text{ м};$$
$$h_7 = +6{,}078_0 \text{ м}.$$

Дополнительным контролем вычислений является равенство нулю сумм уравненных превышений в каждом замкнутом полигоне.

ТАБЛИЦА 23

Контроль	F_1	F_2	Σ	S_Q
+13,57	+1,00	00	+2,21	12,57
+7,51	0	+1,00	+3,46	6,51
−15,03	0	−1,00	+0,34	−16,03
+122,30				
+128,35				

I.2.11. Способ узлов проф. В. В. Попова для составления нормальных уравнений

Для случая уравнивания нивелирных сетей и узлов в сети полигонометрии проф. В. В. Попов предложил следующие правила составления нормальных уравнений с помощью чертежа сети:

а) квадратичные коэффициенты нормальных уравнений в строке i равны сумме весов ходов, сходящихся в узле с тем же номером i;

б) неквадратичные коэффициенты, расположенные в строке i и столбце j, равны отрицательному весу хода, соединяющего узлы с номерами i и j;

ТАБЛИЦА 24

δx_1	δx_2	δx_3	l	s	Контроль	Q_1	Q_2	Q_3	SQ	Контроль 2
+3,60 (−1)	−1,17 +0,325	−1,22 +0,339	+12,36 −3,433	+13,57 −3,769	+13,57 −3,769	−1,00 +0,278	0 0	0 0	+12,57 −3,492	−3,491
	4,50 (−1)	−1,65 +0,366	+9,07 −2,015	+11,92 −2,649	+11,92 −2,649	−0,32 +0,072	−1,00 +0,222	0 0	+10,60 −2,355	+10,60 −2,355
		+2,80	−8,86 +3,171	−6,07 +2,172	−6,06 +2,171	−0,46 +0,164	−0,37 +0,131	−1,06 +0,357	−7,89 +2,818	−7,90 +2,823
			32,44	32,44						

F_1	F_2	Σ	Контроль 3	δx_1	δx_2	δx_3
+1,00 −0,278	0 0	+2,21 −0,614	+2,21 −0,614	−2,636	−0,855	+3,171
+0,32 −0,072	+1,00 −0,222	+4,18 −0,929	+4,17 −0,928	Весовые коэффициенты +0,376 +0,132 +0,164	+0,132 +0,270 +0,131	+0,164 +0,131 +0,358
+0,46 −0,164	−0,63 +0,227	+2,62 −0,936	+2,63 −0,937			
−0,376	+0,031 −0,366	−0,345 −0,333	−0,345 −0,335			

в) свободные члены нормальных уравнений получаются суммированием величин $\pm pl$ тех ходов, которые сходятся в узле i, причем если узел является конечной точкой хода, то ставится знак «плюс», а если начальной, то «минус».

Например, для нивелирной сети (см. рис. 14) нормальные уравнения будут

$$(p_1 + p_2 + p_4)\,\delta x_1 - p_2\delta x_2 - p_4\delta x_3 + b_1 = 0;$$
$$-p_2\delta x_1 + (p_2 + p_3 + p_5 + p_7)\,\delta x_2 - p_5\delta x_3 + b_2 = 0;$$
$$-p_4\delta x_1 - p_5\delta x_2 + (p_4 + p_5 + p_6)\,\delta x_3 + b_3 = 0,$$

а свободные члены

$$b_1 = p_1 l_1 - p_2 l_2 - p_4 l_4;$$
$$b_2 = p_2 l_2 + p_3 l_3 - p_5 l_5 + p_7 l_7;$$
$$b_3 = p_4 l_4 + p_5 l_5 + p_6 l_6.$$

Решение этих уравнений выполняется обычным образом.

I.2.12. О построении доверительных интервалов

Для истинного значения $\overline{F}$ любой функции можно построить доверительный интервал

$$F - t_\beta m_F \leqslant \overline{F} \leqslant F + t_\beta m_F, \qquad (I.2.49)$$

где F — значение функции, вычисленной по уравненным неизвестным.

Коэффициенты t_β выбираются по вероятности β и числу степеней свободы $r = n - k$ из таблиц распределения Стьюдента.

В частном случае для точных (истинных) X_j имеем доверительные интервалы

$$x_j - t_\beta m_{x_j} \leqslant X_j \leqslant x_j + t_\beta m_{x_j}.$$

Так, для отметки x_1 уравненного репера 1 при доверительной вероятности $\beta = 0{,}90$ и $r = 4$ имеем $t_\beta = 2{,}40$ и интервал

$$189{,}615\text{ м} - 2{,}4 \times 1{,}75\text{ см} \leqslant X_j \leqslant 189{,}615\text{ м} + 2{,}4 \times 1{,}75\text{ см}$$

или

$$189{,}573 \leqslant X_j \leqslant 189{,}657.$$

Иногда результат уравнивания, как указывалось выше, записывают в виде

$$x_j \pm m_{x_j},$$

что соответствует, как отмечалось, доверительному интервалу при $\beta \approx 0{,}7$.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения единицы веса строят в виде

$$\nu_1\mu \leqslant \sigma_0 \leqslant \nu_2\mu, \qquad (I.2.50)$$

причем коэффициенты

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_1^2}}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{n-k}{\chi_2^2}},$$

а χ_1^2 и χ_2^2 выбираются из таблиц распределения χ^2, как описано в гл. I.1.21, но по числу степеней свободы $r = n - k$. Так, для среднего

квадратического отклонения σ_0 при $\beta = 0{,}90$ и $r = 4$ будем иметь $\chi_1^2 = 9{,}5$, $\chi_2^2 = 0{,}71$ и доверительный интервал

$$\sqrt{\frac{4}{9{,}5}}\cdot 2{,}85 \leqslant \sigma_0 \leqslant \sqrt{\frac{4}{0{,}71}}\cdot 2{,}85,$$

$$1{,}8 \text{ см} \leqslant \sigma_0 \leqslant 6{,}8 \text{ см}.$$

Для среднего квадратического отклонения функции σ_F доверительный интервал

$$\nu_1 m_F \leqslant \sigma_F \leqslant \nu_2 m_F,$$

а для среднего квадратического отклонения σ_{x_i}

$$\nu_1 m_{x_j} \leqslant \sigma_{x_j} \leqslant \nu_2 m_{x_j}.$$

Например, для σ_{x_1} в этом же примере будем иметь доверительный интервал

$$1{,}1 \text{ см} \leqslant \sigma_{x_1} \leqslant 4{,}2 \text{ см}.$$

Иногда вместо построения доверительного для σ_0 интервала вычисляют ошибку ошибки $m_\mu = \mu/\sqrt{2r}$ и пишут интервал в виде

$$\mu \pm m_\mu \text{ и } m_{\bar{x}} \pm m_{m_{\bar{x}}};$$

где $m_{m_x} = m_\mu \sqrt{Q_{x_j}}$.

Б. КОРРЕЛАТНЫЙ СПОСОБ УРАВНИВАНИЯ

I.2.13. Постановка задачи.

Условные и нормальные уравнения коррелат

В силу того что в геодезических сетях число измерений $n > k$, истинные значения измеренных величин Y_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$ должны удовлетворять $r = n - k$ точным математическим уравнениям вида

$$f_j(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = 0, \qquad \text{(I.2.51)}$$

называемыми исходными условными уравнениями.

Поскольку истинные значения Y_i нам неизвестны, заменим их в уравнении (I.2.51) уравненными значениями y_i такими, что $Y_i = y_i' + v_i$, где v_i, как и ранее, — поправки в результаты измерений y_i'.

Тогда вместо уравнения (I.2.51) получим уравнения

$$f_j(y_1' + v_1,\ y_2' + v_2, \ldots, y_n' + v_n) = 0.$$

Эти уравнения необходимо привести к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора. Сделав это, получим условные уравнения:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w_1 &= 0;\\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + w_2 &= 0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad \text{(I.2.52)}\\ q_1 v_1 + q_2 v_2 + \cdots + q_n v_n + w_r &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$a_i = \left(\frac{\partial f_1}{\partial Y_i}\right)_{Y_i = y_i'},\quad b_i = \left(\frac{\partial f_2}{\partial Y_i}\right)_{Y_i = y_i'}, \ldots,$$

$$q_i = \left(\frac{\partial f_r}{\partial Y_i}\right)_{Y_i = y_i'}$$

(индексы снизу у скобок означают, что производные вычисляются по измеренным значениям y_i'). Свободные члены в уравнениях (I.2.52)

$$w_j = f_j(y_1', y_2', \ldots, y_n')$$

равны значениям функции f_j, вычисленным по результатам измерений y_j', и являются невязками.

Условные уравнения (I.2.52) удобно писать в сокращенном виде:

$$[av] + w_1 = 0,\ [bv] + w_2 = 0, \ldots, [qv] + w_r = 0. \qquad \text{(I.2.53)}$$

В отличие от параметрического способа далее возникает задача отыскания минимума функции $\Phi = [pv^2]$ при условиях (I.2.53) (условный минимум). Действуя по правилу Лагранжа, к функции Φ присоединяем условные уравнения (I.2.53), умноженные соответственно на вспомогательные множители-коррелаты $k_1, k_2, \ldots, k_r$. После дифференцирования полученного выражения по v_i будем иметь выражение поправок, которое часто называют коррелатными уравнениями поправок

$$v_i = \pi_i (a_i k_1 + b_i k_2 + \cdots + q_i k_r), \qquad \text{(I.2.54)}$$

где $\pi_i = \dfrac{1}{p_i}$ — обратные веса, и нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned} [\pi aa]\, k_1 + [\pi ab]\, k_2 + \ldots + [\pi aq]\, k_r + w_1 &= 0;\\ [\pi ab]\, k_1 + [\pi bb]\, k_2 + \ldots + [\pi bq]\, k_r + w_2 &= 0; \qquad \text{(I.2.55)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ [\pi aq]\, k_1 + [\pi bq]\, k_2 + \ldots + [\pi qq]\, k_r + w_r &= 0, \end{aligned}$$

число которых равно r.

Решая эти уравнения, находим коррелаты k_j, затем поправки v_i и уравненные результаты измерений и их функций.

I.2.14. Контроль составления и решения системы нормальных уравнений коррелат

Составление условных уравнений производят в две руки.

Контроль составления коэффициентов нормальных уравнений коррелат производят методом сумм следующим образом:

$$a_i + b_i + c_i + \cdots + q_i = s_i', \qquad \text{(I.2.56)}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$

и $[a] + [b] + [c] + \ldots + [q] = [s']$.

Затем

$$[\pi aa] + [\pi ab] + [\pi ac] + \ldots + [\pi aq] = [\pi as'];$$
$$[\pi ab] + [\pi bb] + [\pi bc] + \ldots + [\pi bq] = [\pi bs']; \qquad (I.2.57)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\pi aq] + [\pi bq] + [\pi cq] + \ldots + [\pi qq] = [\pi qs'].$$

Далее

$$[\pi as'] + w_1 = \Sigma_1, \ [\pi bs'] + w_2 = \Sigma_2, \qquad (I.2.58)$$
$$\ldots, \ [\pi qs'] + w_r = \Sigma_r.$$

Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса контролируют

$$[\pi aa] + [\pi ab] + [\pi ac] + \ldots + [\pi aq] + w_1 = \Sigma_1;$$
$$[\pi bb\cdot 1] + [\pi bc\cdot 1] + \ldots + [\pi bq\cdot 1] + [w_2\cdot 1] = [\Sigma_2\cdot 1];$$
$$[\pi cc\cdot 1] + \ldots + [\pi cq\cdot 2] + [w_3\cdot 2] = [\Sigma_3\cdot 2], \qquad (I.2.59)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\pi qq\ (r-1)] + [w_r\ (r-1)] = [\Sigma_r\ (r-1)].$$

Заключительным контролем решения системы нормальных уравнений коррелат является

$$-[pv^2] = -\frac{w_1^2}{[\pi aa]} - \frac{[w_2\cdot 1]^2}{[\pi bb\cdot 1]} - \frac{[w_3\cdot 2]^2}{[\pi cc\cdot 2]} -$$
$$- \ldots - \frac{[w_r\ (r-1)]^2}{[\pi qq\ (r-1)]} = [w] - \frac{\Sigma_1}{[\pi aa]} w_1 -$$
$$- \frac{[\Sigma_2\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]} [w_2\cdot 1] - \frac{[\Sigma_3\cdot 2]}{[\pi cc\cdot 2]} [w_3\cdot 2] - \ldots - \frac{[\Sigma_r\ (r-1)]}{[\pi qq\ (r-1)]} [w_r\ (r-1)]. \qquad (I.2.60)$$

Алгоритмы $[w_2\cdot 1]$, $[w_3\cdot 2]$ и т. д. в системе уравнений (I.2.59) и в формуле (I.2.60) раскрываются аналогично алгоритмам (I.2.27) и (I.2.28). Например:

$$[w_2\cdot 1] = w_2 - \frac{[\pi ab]}{[\pi aa]} w_1;$$
$$[w_3\cdot 2] = w_3 - \frac{[\pi ac]}{[\pi aa]} w_1 - \frac{[\pi bc\cdot 1]\,[w_2\cdot 1]}{[\pi bb\cdot 1]}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

После вычисления поправок v_i по формуле (I.2.54) производят заключительный контроль

$$[pv^2] = -[kw]. \qquad (I.2.61)$$

Результаты, полученные по формулам (I.2.60), (I.2.61), должны быть равны между собой.

I.2.15. Некоторые виды условных уравнений

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды условных уравнений в геодезических сетях.

I. **Триангуляционные построения.**

Пусть имеем простую сеть триангуляции (вставка в угол) (рис. 15).

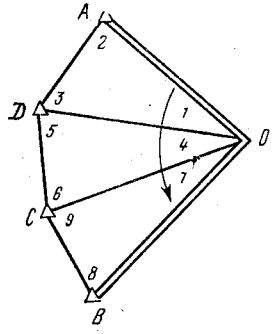


Рис. 15. Схема вставки простой триангуляционной сети в жесткий угол

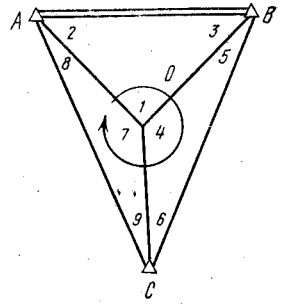


Рис. 16. Центральная система с двумя исходными пунктами

В этой сети возникает всего $r = 9 - 4 = 5$ условных уравнений ($n = 9$, $k = 4$ — удвоенное число координат определяемых пунктов), в том числе:

а) три условных уравнения уравненных фигур:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_1 = 0;$$
$$v_4 + v_5 + v_6 + w_2 = 0;$$
$$v_7 + v_8 + v_9 + w_3 = 0,$$

где невязки w равны разностям между суммой измеренных в треугольнике углов и 180°;

б) условное уравнение жесткого угла

$$v_1 + v_4 + v_7 + w = 0,$$

где невязка

$$w = y_1' + y_4' + y_7' - \angle AOB;$$

в) базисное условное уравнение, выражающее требование совпадения длины стороны OB с ее значением, вычисленным по уравненным углам от стороны OA.

В отличие от предыдущих это уравнение имеет нелинейный вид и носит название синусного условного уравнения. В линейном виде оно составляется по следующему правилу: 1) выбираем направление подхода от стороны AO к стороне OB (показано стрелкой); 2) последовательно по каждому треугольнику намечаем углы, лежащие против передней и задней по ходу стороны (углы *2*, *5*, *9* и *3*, *6*, *8*); 3) пишем условное уравнение

$$\Delta_2 v_2 + \Delta_5 v_5 + \Delta_9 v_9 - \Delta_3 v_3 - \Delta_6 v_6 - \Delta_8 v_8 + w = 0, \qquad (I.2.62)$$

где Δ_i — изменение логарифма синуса угла с изменением угла на одну секунду, выраженное в шестом знаке логарифма, а невязка

$$w = \lg \frac{s_1\cdot \sin 2\cdot \sin 5\cdot \sin 9}{s_2\cdot \sin 3 \sin\cdot 6\cdot \sin 8}. \qquad (I.2.63)$$

В центральной системе (рис. 16) кроме трех условных уравнений фигур возникает условное уравнение горизонта

$$v_1 + v_4 + v_7 + w = 0,$$

где

$$w = y_1' + y_4' + y_7'' - 360°,$$

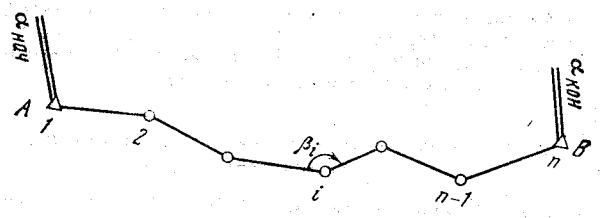


Рис. 17. Схема одиночного полигонометрического хода

и полюсное условное уравнение, составляемое так же, как и базисное, с той лишь разницей, что начальная и конечная стороны здесь совпадают, а направление обхода выбирают, например, от стороны AO и к ней же подходят. Условное уравнение также имеет вид (I.2.62), но в выражении (I.2.63) $s_1 = s_2$.

II. **Полигонометрический ход** (рис. 17).

В этом ходе возникает условное уравнение дирекционных углов

$$\sum_{i=1}^{n} v_i + w_\beta = 0,$$

где невязка

$$w_\beta = \alpha_{\text{нач}} + \Sigma \beta_{i\ \text{лев}} - \alpha_{\text{кон}} - 180^\circ (n - 1),$$

и два условных уравнения координат

$$\sum v_{\Delta x_i} + w_x = 0; \quad \sum v_{\Delta y_i} + w_y = 0,$$

где невязки

$$w_x = X_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i - X_B;$$

$$w_y = Y_A + \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i - Y_A.$$

В последних двух уравнениях поправки приращений координат следует заменить поправками непосредственно измеренных величин — углов и линий. Заметим, что координатные условные уравнения возникают также в сети триангуляции.

III. **Нивелирная сеть** (рис. 18).

В этой сети число условных уравнений $r = n - k = 5 - 2 = 3$ (n — число всех ходов, k — число узлов). Возникающие в этой сети условные уравнения называют полигонными, и они для выбранных трех полигонов имеют вид:

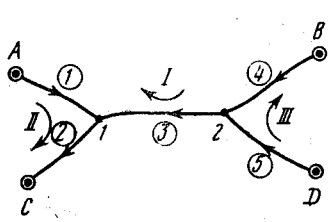


Рис. 18. Схема сети нивелирных ходов с двумя узловыми точками

$$-v_1 + v_3 + v_4 + w_1 = 0;$$

$$v_1 + v_2 + w_2 = 0;$$

$$-v_4 + v_5 + w_3 = 0,$$

где невязку w вычисляют как разность между данными отметками конечных марок и этими же отметками, но полученными от отметок начальных марок по измеренным превышениям.

Аналогичный вид имеют условные уравнения и в замкнутых полигонах, не содержащих твердых марок.

Полигонные условные уравнения возникают и в полигонометрической сети, но они имеют более сложный вид.

I.2.16. Оценка точности функций при коррелатном уравнивании

В отличие от параметрического способа при коррелатном способе уравнивания функцию составляют в виде

$$F = f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

После разложения в ряд получим ее выражение

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + \cdots + f_n v_n + f_0 = 0, \qquad \text{(I.2.64)}$$

где коэффициенты

$$f_i = \left(\frac{\partial F}{\partial Y_i}\right)_{Y_i = y_i'},$$

а свободный член

$$f_0 = f(y_1', y_2', \ldots, y_n').$$

Сравнивая выражение (I.2.64) с (I.2.62), замечаем, что выражение (I.2.64) имеет вид условного уравнения. В некоторых случаях это упрощает составление функций. Например, при оценке точности длины стороны DC (см. рис. 15) функцию составляют точно так же, как базисное условное уравнение от стороны OA к стороне DC. При оценке точности отметки репера 1 (см. рис. 18) функция совпадает с условным уравнением между маркой A и репером 1 (так называемый весовой полигон). Свободный член f_0 в выражении (I.2.64) не вычисляют, так как при оценке точности его не используют.

Обратный вес функции получают в виде алгоритма Гаусса

$$\frac{1}{P_F} =]\pi ff \cdot r] = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \frac{[\pi bf \cdot 1]^2}{[\pi bb \cdot 1]} - \cdots - \frac{[\pi qf\ (r-1)]^2}{[\pi qq\ (r-1)]}, \qquad \text{(I.2.65)}$$

и он может быть вычислен попутно с решением нормальных уравнений добавлением к схеме Гаусса столбца F с элементами $[\pi af]$, $[\pi bf]$, $\cdots$, $[\pi qf]$.

Контрольная формула обратного веса функции имее вид

$$\frac{1}{P_F} = [\pi fs r] = [\pi fs] - \frac{[\pi af]\,[\pi as]}{[\pi aa]} - \cdots - \frac{[\pi qf\ (r-1)]\,[\pi fs\ (r-1)]}{[\pi qq\ (r-1)]}, \qquad \text{(I.2.66)}$$

где

$$s_i = a_i + b_i + \cdots + q_i + f_i.$$

С учетом этого схемы для составления нормальных уравнений имеют тот же вид, что и в параметрическом способе уравнивания, однако с той разницей, что столбец l заменится столбцом f. Роль столбца f в параметрическом способе играет столбец невязок w.

Средняя квадратическая ошибка функции

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

в которой ошибка μ (или m при равноточных измерениях) вычисляется, как и в параметрическом способе, по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}} \quad \left(m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}\right).$$

I.2.17. Матричные формулы уравнивания коррелатным способом

Систему исходных условных уравнений (I.2.51) можно записать в виде

$$BV + W = 0, \tag{I.2.67}$$

где матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \\ \cdots\cdots \\ q_1 q_2 \ldots q_n \end{pmatrix},$$

а векторы

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_r \end{pmatrix}.$$

Введя диагональную матрицу обратных весов измерений

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{P_1} & & & & \\ & \frac{1}{P_2} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \frac{1}{P_n} \end{bmatrix},$$

нормальные уравнения получим в виде

$$NK + w = 0, \tag{I.2.68}$$

где матрица

$$N = BP^{-1}B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} [\pi aa] & [\pi ab] \ldots [\pi aq] \\ [\pi ab] & [\pi bb] \ldots [\pi bq] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\pi aq] & [\pi bq] \ldots [\pi qq] \end{pmatrix},$$

а вектор коррелат

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_r \end{pmatrix}.$$

Определив из решения (I.2.68) вектор коррелат (решение можно выполнять в виде $K = -N^{-1}W$), получим вектор поправок

$$V = P^{-1}B^{\mathrm{T}}K, \tag{I.2.69}$$

что соответствует уравнениям (I.2.54).

Обратный вес функции получают в виде

$$\frac{1}{P_F} = fP^{-1}f^{\mathrm{T}} - fP^{-1}B^{\mathrm{T}} \cdot N^{-1} \cdot BP^{-1}f^{\mathrm{T}}, \tag{I.2.70}$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, что соответствует алгоритму Гаусса (I.2.65).

На основании формулы (I.2.70) можно найти матрицу Q_F весовых коэффициентов сразу нескольких функций, при этом матрица f будет состоять из нескольких соответствующих функциям строк.

I.2.18. Определение допустимости невязок условных уравнений

Можно доказать, что среднее квадратическое отклонение невязки j-го условного уравнения выражается формулой

$$\sigma_{w_j} = \sigma_0 \sqrt{N_{jj}}, \tag{I.2.71}$$

где N_{jj} — соответствующие диагональные элементы матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Если среднее квадратическое отклонение единицы веса σ_0 неизвестно, что вместо формулы (I.2.71) имеем среднюю квадратическую ошибку невязки

$$m_{w_j} = \mu \sqrt{N_{jj}}.$$

Допустимая невязка определяется формулой

$$(w_j)_{\text{доп}} = t_\beta \sigma_0 \sqrt{N_{jj}} \quad \text{или} \quad (w_j)_{\text{доп}} = t_\beta \mu \sqrt{N_{jj}}. \tag{I.2.72}$$

При равноточных измерениях вместо σ_0 и μ следует иметь в виду σ и m.

Обычно в зависимости от точности и ответственности работ принимают $t_\beta = 2{,}5$ или 3, что соответствует вероятностям $\beta = 0{,}99$ или 0,997 (чем точнее измерения, тем меньше t_β).

Пример. При измерении углов в триангуляции с точностью $\sigma = 2''$ наибольшая невязка условных уравнений фигур получена равной $12''$. Проверить ее допустимость, приняв $t_\beta = 3$.

Решение. Так как нормальное уравнение имеет вид

$$3K_j + W_j = 0,$$

то $(N_{jj}) = 3$

и

$$(W_j)_{\text{доп}} = 3 \cdot 2\sqrt{3} = 10{,}4'',$$

следовательно, невязка недопустима.

Аналогичным образом подсчитываются допустимые значения невязок и в других условных уравнениях.

I.2.19. Пример уравнивания нивелирной сети коррелатным способом

Уравняем нивелирную сеть (см. гл. I.2.9). В этой сети возникает $r = 7 - 3 = 4$ условных уравнения полигона, показанные на рис. 19.

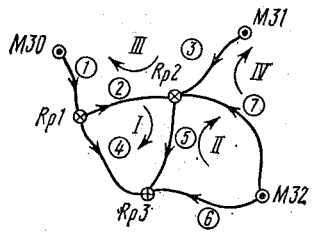


Рис. 19. Схема составления условных уравнений для сети нивелирных ходов

Условные уравнения полигонов имеют вид:

$$v_2 - v_4 + v_5 + w_1 = 0;$$
$$-v_5 + v_6 - v_7 + w_2 = 0;$$
$$-v_1 - v_2 + v_3 + w_3 = 0;$$
$$-v_3 + v_7 + w_4 = 0.$$

Оценим также точность функций отметок реперов *Rp1*, *Rp2* и *Rp3*, составив весовые функции по ходам *1*, *3* и *6* (весовые полигоны). В табл. 25 и 26 приведены коэффициенты условных и нормальных уравнений.

Решение нормальных уравнений по схеме Гаусса выполнено в табл. 27.

Обратим внимание, что последняя схема предусматривает двойной контроль. Второй контроль получается вычитанием из чисел в столбце «контроль 1» чисел из столбца W и прибавлением чисел из столбцов F_1, F_2, F_3.

Контроль вычисления обратных весов (или матрицы Q_F) выполняется так же, как и в параметрическом способе (см. гл. I.2.9).

По найденным значениям коррелат в табл. 27 получены поправки v_i и произведен заключительный контроль вычислений:

$$[pv^2] = -[kw].$$

После введения поправок v в измеренные значения получены уравненные значения превышений и отметок реперов:

$$h_1 = +6{,}108_6 \text{ м};$$
$$h_2 = +8{,}343_8 \text{ м}; \qquad H_{Rp1} = 189{,}614_6;$$
$$h_3 = +5{,}605_5 \text{ м};$$
$$h_4 = +1{,}367_2 \text{ м}; \qquad H_{Rp2} = 197{,}958_5;$$
$$h_5 = -6{,}976_7 \text{ м};$$
$$h_6 = -0{,}898_2 \text{ м}; \qquad H_{Rp3} = 190{,}981_8.$$
$$h_7 = +6{,}078_5 \text{ м};$$

Средние квадратические ошибки единицы веса и на 1 км хода

$$\mu = \sqrt{\frac{32{,}35}{4}} = 2{,}85 \text{ см}; \quad m = \frac{\mu}{\sqrt{40}} = 0{,}45 \text{ см};$$

Средние квадратические ошибки функций:

$$m_{F_1} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}}} = 1{,}75 \text{ см}; \quad m_{F_2} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 1{,}48 \text{ см};$$

$$m_{F_3} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{F_3}}} = 1{,}70 \text{ см}.$$

В пределах точности вычислений полученные результаты совпадают с результатами уравнивания этой же сети параметрическим способом.

Доверительные интервалы строят так же, как и в параметрическом способе.

ТАБЛИЦА 25

№ измерения	a	b	c	d	f_1	f_2	f_3	s	p	π	v	$[pv^2]$
1			−1		+1			0	1,20	0,83	−2,64	
2	+1		−1					0	1,18	0,85	+0,08	
3			+1	−1		+1		+1	1,32	0,76	−0,85	
4	−1							−1	1,22	0,82	−2,69	
5	+1	−1					+1	0	1,25	0,80	−0,77	
6		+1		+1				+2	1,33	0,75	+3,18	
7		−1						0	1,15	0,87	+0,05	
	+1	−1	−1	0	+1	+1	+1	+2			32,35	
$w = -2{,}0$		−3,9	−1,7	−0,9								
$k = +3{,}274$		+4,237	+3,174	+4,294								
$kw = -6{,}55$		−16,52	−5,40	−3,86								

$[kw] = -32{,}33$

ТАБЛИЦА 26

	a]	b]	c]	d]	f_1]	f_2]	f_3]	s]	Контроль	w	Σ
	−2,47	−0,80	−0,85	0	0	0	0	0,82	0,82	−2,00	−1,18
$[\pi a]$		2,42	0	−0,87	0	0	0,75	1,50	1,50	−3,90	−3,15
$[\pi b]$			2,44	−0,76	−0,83	0,76	0	0,76	0,76	−1,70	−0,87
$[\pi c]$				1,63	0	−0,76	0	−0,76	−0,76	−0,90	−0,90
$[\pi d]$					0,83	0	0	0	0		
$[\pi f_1]$						0,76	0	0,76	0,76		
$[\pi f_2]$							0,75	1,50	1,50		
$[\pi f_3]$											

k_1	k_2	k_3	k_4	W	Σ
+2,47	−0,80	−0,85	0	−2,00	−1,18
(−1)	+0,324	+0,344	0	+0,810	+0,478
(0,4630)	2,16	−0,27	−0,87	−4,55	−3,53
	(−1)	+0,125	+0,403	+2,107	+1,634
(0,4739)		+2,11	−0,87	−2,97	−1,73
		(−1)	+0,412	+1,407	+0,820
(1,0870)			+0,92	−3,95	−3,03
			(−1)	+4,294	+3,294
				−32,34	−32,33
+3,274	+4,237	+3,174	+4,294		

I.2.20. Способ полигонов В. В. Попова для составления нормальных уравнений коррелат

В случае, если полигонные условные уравнения имеют коэффициенты ± 1 или 0, нормальные уравнения можно получить, не составляя условные уравнения. При этом схему сети необходимо предварительно подготовить, пронумеровав на ней все ходы от 1 до l и полигоны от 1 до $r = l - m$, где m — число узловых точек. Следует выбрать также направления ходов и полигонов и выписать измеренные величины (сумму углов или превышений) и обратные веса ходов (например, число углов или длины ходов). Сделав это, нормальные уравнения составляют по простым и удобным правилам, предложенным В. В. Поповым:

а) квадратичные коэффициенты нормальных уравнений в строке i равны сумме обратных весов ходов, принадлежащих i-му полигону;

б) неквадратичные коэффициенты, расположенные в строке i и столбце j, равны обратному весу хода, принадлежащего полигонам i и j, причем взятому со знаком «плюс», если направления этих полигонов совпадают, и со знаком «минус» — в противном случае;

в) свободный член i-го нормального уравнения равен невязке i-го полигона.

Ясно, что каждому i-му полигону (условному уравнению) соответствует i-я коррелата.

Решив нормальные уравнения, получают все коррелаты и далее поправки в измеренные в каждом ходе величины (в сумму углов или превышений) по правилу: поправка v_j равна обратному весу π_j, умноженному на сумму коррелат тех полигонов, которым принадлежит i-й ход, причем, если направления хода и полигона не совпадают, коррелата берется с обратным знаком. Для сети (см. рис. 19) имеем нормальные уравнения:

$$\begin{aligned}
(\pi_2 + \pi_4 + \pi_5)\, k_1 - \pi_5 k_2 - \pi_2 k_3 \quad &+ W_1 = 0;\\
-\pi_5 k_1 + (\pi_5 + \pi_6 + \pi_7)\, k_2 - \quad &\pi_7 k_4 + W_2 = 0;\\
-\pi_2 k_1 + (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)\, k_3 - \quad &\pi_3 k_4 + W_3 = 0;\\
-\pi_7 k_2 - \pi_3 k_3 + (\pi_8 + \pi_7)\, k_4 \quad &+ W_4 = 0.
\end{aligned} \qquad (1.2.73)$$

Контроль 1	F_1	F_2	F_3	s	Контроль 2
−1,18	0	0	0	10,82	+0,82
+0,478	0	0	0	−0,266	+0,332
−3,53	0	0	+0,75	+1,77	1,77
+1,635			−0,347	−0,820	−0,819
−1,73	−0,83	+0,76	+0,10	+1,26	+1,27
+0,819	+0,393	−0,360	−0,047	−0,597	−0,602
−3,03	−0,34	−0,45	+0,34	+0,47	+0,47
+3,294	+0,370	+0,489	−0,370	−0,511	−0,511
—	+0,38	+0,13	+0,16	+0,67	+0,67
		+0,27	+0,13	+0,54	+0,53
			+0,36	+0,65	+0,65

Определив из решения (1.2.57) коррелаты, поправки вычислим по формулам

$$v_1 = -\pi_1 k_3;$$
$$v_2 = \pi_2 (k_1 - k_3);$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Для оценки точности отметок узлов выбирают весовой полигон от твердой точки до оцениваемого узла. Дополнительный столбец в схеме Гаусса тогда получается по тем же правилам, по которым составляются нормальные уравнения. Например, если для оценки точности отметки узла 1 выбрать полигон, совпадающий с первым ходом, то получим:

$$[\pi af] = 0;$$
$$[\pi bf] = 0;$$
$$[\pi cf] = -\pi_1;$$
$$[\pi\, df] = 0;$$
$$[\pi ff] = \pi_1.$$

Способ В. В. Попова применяется и при раздельном уравнивании полигонометрической сети.

I.2.21. Способ Крюгера—Урмаева

Проф. Н. А. Урмаев упростил применение двухгруппового способа Крюгера к уравниванию углов в сетях триангуляции. При этом в первую группу относят все условные уравнения фигур треугольников без пересекающихся диагоналей. Эти условные уравнения первой группы имеют вид

$$3k'_j + w_j = 0$$

и не содержат общих коррелат.

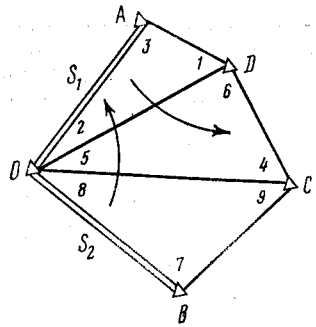


Рис. 20. Схема составления условных уравнений для сети триангуляции при двухгрупповом способе уравнивания

Решая каждое уравнение, относящееся к j-му треугольнику, получим первичные поправки

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = -\frac{w_j}{3}.$$

Затем измеренные углы исправляем первичными поправками. По этим углам вычислим невязки условных уравнений второй группы и преобразованные коэффициенты этих уравнений. В каждом треугольнике они вычисляются по формулам:

$$A_1 = \alpha_1 - \bar{\alpha}_j;$$
$$A_2 = \alpha_2 - \bar{\alpha}_j;$$
$$A_3 = \alpha_3 - \bar{\alpha}_j$$

(временно полагаем, что углы в треугольнике имеют свою нумерацию)

$$B_1 = \beta_1 - \bar{\beta}_j;$$
$$B_2 = \beta_2 - \bar{\beta}_j;$$
$$B_3 = \beta_3 - \bar{\beta}_j,$$

где

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3);$$

(I.2.74)

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

Контроль: для каждого треугольника $[A] = [B] = 0$.

Аналогично преобразуются коэффициенты функции f_i, которую целиком относят во вторую группу;

$$F_1 = f_1 - \bar{f}_j;$$
$$F_2 = f_2 - \bar{f}_j;$$
$$F_3 = f_3 - \bar{f}_j,$$

где

$$\bar{f}_j = \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3). \qquad \text{(I.2.75)}$$

Обратный вес получаем в виде

$$\frac{1}{P_F} = [FF] - \frac{[AF]^2}{[AA]} - \frac{[BF\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} \cdots$$

Приведем пример уравнивания способом Крюгера—Урмаева.

Пример. Уравнять по способу Крюгера—Урмаева углы в системе треугольников между двумя жесткими сторонами (рис. 20) и оценить точность определения стороны DC.

Исходные данные:

$$\lg S_1 = 3{,}2584263; \quad \lg S_2 = 3{,}3295004;$$
$$\angle BOA = 224^\circ\ 14'\ 40{,}5'' \text{ (твердый угол).}$$

Измеренные углы приведены в табл. 28.

ТАБЛИЦА 28

№ треугольника	Название вершины	№ угла	Измеренный угол	Первичная поправка $v'_i = -\frac{\zeta}{3}$	Предварительно уравненный угол	Вторичная поправка v''_i	Окончательно уравненный угол	Логарифм синуса угла
1	D	1	64° 36′ 00,9″	−1,8″	64° 35′ 59,1″	−0,3″	64° 35′ 58,8″	9.995 8478
	O	2	65 53 45,2	−1,8″	65 53 43,4	−1,0	65 53 42,4	9.960 3754
	A	3	49 30 19,3	−1,8″	49 30 17,5	+1,3	49 30 18,8	9.881 0793
	Σ		180° 00′ 05,4″ $\zeta_a = +5{,}4$	−5,4″	180° 00′ 00,0″	0,0″	180° 00′ 00,0″	
2	C	4	55° 19′ 45,2″	+2,4″	55° 19′ 47,6″	−0,3″	55° 19′ 47,3″	9.915 1042
	O	5	55 12 15,1	+2,4″	55 12 17,5	−0,7	55 12 16,8	9.914 4466
	D	6	69 27 52,6	+3,3″	69 27 54,9	+1,0	69 27 55,9	9.971 4899
	Σ		179° 59′ 52,9″ $\zeta_b = -7{,}1''$	+7,1″	180° 00′ 00,0″	0,0″	180° 00′ 00,0″	
3	B	7	33° 44′ 19,4″	−1,5″	33° 44′ 17,9″	−1,3″	33° 44′ 16,6″	9.744 6022
	O	8	103 13 43,4	−1,5″	103 13 41,9	−0,6	103 13 41,3	9.988 3211
	C	9	43 02 01,7	−1,5″	43 02 00,2	+1,9	43 02 02,1	9.834 0589
	Σ		180° 00′ 04,5″ $\zeta_c = +4{,}5''$	−4,5″	180° 00′ 00,0″	0,0″	180° 00′ 00,0″	

$[v'v'] = 33{,}28$ $\quad \Sigma v^2 = 1002$

ТАБЛИЦА 29

№ угла	Значение угла	Логарифм синуса угла	Δ1″
1	64° 35′ 59,1″	9.955 8481	+10,0
4	55 19 47,6	9.915 1047	+14,6
7	33 44 17,9	9.744 6390	+31,5
S_2		3.329 5004	
		$\Sigma_1 = 2.945\ 0922$	
3	49° 30′ 17,5″	9.881 082	+18,0
6	69 27 54,9	9.971 4873	+7,9
9	43 02 00,2	9.834 0579	+22,6
S_1		3.258 4263	
		$\Sigma_2 = 2.945\ 0797$	

Решение. I. Составим таблицу предварительного уравнивания углов.

II. Составим условные уравнения второй группы (см. гл. I.2.15):

а) условие жесткого угла

$$v_2'' + v_5'' + v_8'' + 2{,}3 = 0;$$

б) базисное $+1{,}00v_1'' - 1{,}80v_3'' + 1{,}46v_4'' - 0{,}79v_6'' + 3{,}15v_7'' - - 2{,}26v_9'' + 12{,}5 = 0$, получаемое с помощью табл. 29,

$$W_{II} = \Sigma_1 - \Sigma_2 = +125 \cdot 10^{-7}.$$

III. Составим весовую функцию F для оценки точности стороны DC

$$F = \lg S_1 \frac{\sin y_3 \cdot \sin y_5}{\sin y_1 \cdot \sin y_4}$$

и приводим ее к линейному виду

$$F = f_0 - 1{,}00v_1'' + 1{,}80v_3'' - 1{,}46v_4'' + 1{,}46v_5''.$$

IV. Составим табл. 30 коэффициентов условных и нормальных уравнений второй группы (все первое уравнение умножено на 3, чтобы избежать дробей).

V. Выполним решение нормальных уравнений в табл. 31.

По найденным коррелатам вычисляем вторичные поправки v_i'' в табл. 30.

Вычисленные v_i'' вводим в предварительно уравненные углы (см. табл. 28). По окончательно уравненным углам вновь вычисляем невязки всех условных уравнений. Они должны быть равны нулю.

VI. Оценка точности результатов. В данном примере:

1) сумма квадратов поправок

$$[vv] = [v'v'] + [v''v''] = 33{,}28 + 10{,}26 = 43{,}54;$$

ТАБЛИЦА 30

№ треугольника	Угол	α	β	t	A]	B]	F]	S]	v_i''
1	1	+1	+1,00	−1,00	−1	+1,27	−1,27	−1,00	−0,35″
	2				+2	+0,27	−0,27	+2,00	−0,97
	3		−1,80	+1,80	−1	−1,53	+1,53	−1,00	+1,32
2	4	+1	+1,46	−1,46	−1	+1,24	−1,46	−1,22	−0,33
	5			+1,46	+2	−0,23	+1,46	+3,23	−0,68
	6		−0,79		−1	−1,01	0	−2,01	+1,01
3	7	+1	+3,15		−1	+2,85		+1,85	−1,30
	8				+2	−0,29		+1,71	−0,64
	9		−2,26		−1	−2,56		−3,56	+1,94
	ϖ	+2,3	+12,5	ϖ	+6,9	+12,5		+19,400	10,26
				k	−0,409	−0,600			W
				[A]	+18,00	−0,78	+3,60	+20,82	+6,90
				[B]		+21,39	−6,17	+14,44	+12,50
				[F]			+8,28		Σ
				[S]				+5,72	24,12
								+40,98	33,11

ТАБЛИЦА 31

k_1	k_{II}	W	Σ	Контроль 1	F	S	Контроль 2
(0,0556) + 18,00	−0,78	+6,90	+24,12	+24,12	+3,60	+20,82	+20,82
(−1)	+0,043	−0,383	−1,341	−1,340	−0,200	−1,158	−1,158
(−0,0468)	+21,36	+12,80	+34,15	+34,16	−6,01	+15,34	+15,35
	(−1)	−0,599	−1,598	−1,599	+0,282	−0,718	−0,717
		−10,32	−10,32		+5,87	+5,88	
					$\frac{1}{P_F}$	$\frac{1}{P_F}$	
	−0,600						
−0,409							

2) средняя квадратическая ошибка результата непосредственного измерения

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r_1 + r_2}} = \sqrt{\frac{43{,}54}{3+2}} = 3{,}0''.$$

Ошибка самой ошибки

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(r_1 + r_2)}} = \frac{3{,}0''}{\sqrt{2 \cdot 5}} = 0{,}95'';$$

3) средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg s} = m\sqrt{\frac{1}{p_u}} + 3{,}0\sqrt{5.87} = 7{,}2 \cdot 10^{-6};$$

4) относительная ошибка определения длины стороны DC

$$\frac{m_s}{S} = \frac{m_{\lg s}}{M} = \frac{7{,}2}{0{,}43 \cdot 10^6} = \frac{1}{60\,000}.$$

Заметим, что способ Крюгера—Урмаева применяют также в случае, когда в сети имеются геодезические четырехугольники, относя в первую группу условные уравнения фигур треугольников, не содержащих общих углов. Остальные условные уравнения относят во вторую группу. Первичные поправки углов в геодезическом четырехугольнике

$$v'_i = -\frac{w_i}{4},$$

а формулы (I.2.58) и (I.2.59) принимают вид:

$$\bar{\alpha}_j = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4);$$

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{4}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4);$$

$$\bar{f}_j = \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4),$$

при этом для каждого треугольника придется вычислять по 4 коэффициента. Все остальные формулы останутся без изменений.

В. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.2.22. Уравнивание параметрическим способом с условиями (избыточными неизвестными)

В некоторых случаях вместо уравнений вида (I.2.2), возникающих при параметрическом способе уравнивания, бывает целесообразно составить уравнения

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k'}) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (I.2.76)$$

в которых число параметров $k' > k$. В таком случае эти параметры должны удовлетворять $r' = k' - k$ условным уравнениям вида

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k'}) = 0; \quad (j = 1, 2, \ldots, r'). \qquad (I.2.77)$$

После разложения в ряд Тейлора уравнений (I.2.76) и (I.2.77) получим уравнения поправок

$$v_i = a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \cdots + g_i\delta x_k + l_i$$

и условные уравнения:

$$[A\delta x] + W_1 = 0;$$
$$[B\delta x] + W_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$[G\delta x] + W_{r'} = 0.$$

Здесь, как и ранее, v_i, δ_x — поправки к результатам измерений, и приближенным значениям неизвестных $x_j^{(0)}$. Невязки $W_j = f_j(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{k'}^{(0)})$. Коэффициенты

$$A_j = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}, \quad B_j = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}, \ldots,$$

$$G = \left(\frac{\partial f_{r'}}{\partial x_j}\right)_{x_j = x_j^{(0)}}.$$

Условие $[pv^2] = \min$ приводит к системе уравнений:

$$[paa]\delta x_1 + \cdots + [paq]\delta x_{k'} + A_1k_1 + B_1k_2 + \cdots + G_1k_{r'} + [pal] = 0;$$
$$[pab]\delta x_1 + \cdots + [pbq]\delta x_{k'} + A_2k_1 + B_2k_2 + \cdots + G_2k_{r'} + [pbl] = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[paq]\delta x_1 + \cdots + [pqq]\delta x_{k'} + A_{k'}k_1 + B_{k'}k_2 + \cdots + G_{k'}k_{r'} + [pql] = 0; \qquad (I.2.78)$$
$$A_1\delta x_1 + A_2\delta x_2 + \cdots + A_{k'}\delta x_{k'} + W_1 = 0;$$
$$B_1\delta x_1 + B_2\delta x_2 + \cdots + B_{k'}\delta x_{k'} + W_2 = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_1\delta x_1 + G_2\delta x_2 + \cdots + G_{k'}\delta x_{k'} + W_{r'} = 0.$$

В системе уравнений (I.2.78) соблюдается симметрия коэффициентов. Поэтому система эта может быть решена любым из способов. Значение $[pv^2]$ может быть получено в данном способе по обычному правилу, т. е. как сумма произведений чисел элиминационных строк на вышестоящие числа в графе свободных членов при решении нормальных уравнений, или по формуле

$$[pa_1l]\tau_1 + [pa_2l]\tau_2 + \cdots + [pa_kl]\tau_k +$$
$$+ W_Ak_A + W_Bk_B + W_Ck_C + [pll] = [pv^2].$$

Обратный вес функции в рассматриваемом способе может быть найден в дополнительной графе по тому же правилу, по которому его находят в параметрическом способе.

Справедлива также формула

$$\frac{1}{P_F} = f_1f_1Q_{11} + 2f_1f_2Q_{12} + \cdots + 2f_1f_kQ_{1k'} +$$
$$+ f_2f_2Q_{22} + \cdots + 2f_2f_kQ_{2k'} + f_kf_kQ_{k'k'}. \qquad (I.2.79)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в формуле (I.2.63) фигурирует лишь часть общей системы весовых коэффициентов, которую определяют при помощи общей системы нормальных уравнений (I.2.78), учитывающей и условные уравнения.

Средняя квадратическая ошибка одного измерения

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n - (k' - r')}}.$$

В качестве примера можно привести уравнивание сетей, когда вместо искомых неизвестных — поправок координат приняты избыточные измерения — поправки приращений координат.

I.2.23. Способ условий с дополнительными неизвестными

В некоторых случаях имеется возможность упростить вид условных уравнений, вводя в них дополнительные неизвестные. Упрощения достигают путем увеличения числа условных уравнений на число дополнительных неизвестных, иногда это может оказаться выгодным (например, при уравнивании систем рядов триангуляции или сетей полигонометрии). При этом в отличие от коррелатного способа уравнивания условные уравнения имеют вид

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n, t_1, t_2, \ldots, t_s) = 0; \qquad (I.2.80)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r'),$$

где t — получаемые из уравнивания дополнительные неизвестные. Разложение уравнения (I.2.80) в ряд Тейлора приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} &[av] + [A\delta t] + W_1 = 0;\\ &[bv] + [B\delta t] + W_2 = 0; \qquad (I.2.81)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[qv] + [G\delta t] + W_{r'} = 0, \end{aligned}$$

где

$$A_p = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_p}\right)_{t_p = t_p^{(0)}}; \qquad B = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_p}\right)_{t_p = t_p^{(0)}};$$

$$G_p = \left(\frac{\partial f_{r'}}{\partial t_p}\right)_{t_p = t_p^{(0)}},$$

где $(p = 1, 2, \ldots, s)$; ($t_p^{(0)}$ — приближенные значения дополнительных неизвестных.

После решения уравнений (I.2.81) при условии $[pv^2] = \min$ получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &[\pi aa]\,k_1 + \cdots + [\pi aq]\,k_{r'} + A_1\delta t_1 + \cdots + A_s\delta t_s + W_1 = 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &[\pi aq]\,k_1 + \cdots + [\pi qq]\,k_{r'} + G_1\delta t_1 + \cdots + G_s\delta t_s + W_{r'} = 0; \qquad (I.2.82)\\ &A_1k_1 + \cdots + G_1k_{r'} = 0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A_sk_1 + \cdots + G_sk_{r'} = 0, \end{aligned}$$

решая которую, например, по схеме Гаусса, найдем неизвестные δt_p и коррелаты k. Поправки v_i определяются также по формулам (I.2.53). Значение $[pv^2] = -[kW]$.

Для оценки точности функции

$$F = F(y_1, y_2, \ldots, y_n, t_1, t_2, \ldots t_s)$$

ее приводят к линейному виду

$$F = F^{(0)} + f_iv_i + \Phi_p\delta t_p,$$

где

$$\Phi = \left(\frac{\partial F}{\partial t_p}\right)_{t_p = t_p^{(0)}},$$

и в схему Гаусса добавляют столбец из элементов

$$[\pi af], [\pi bf], \ldots, [\pi qf], \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s \text{ и } [\pi ff].$$

Обратный вес получают, исключив все $r' + s$ неизвестных, по формуле

$$\frac{1}{P_F} = [\pi ff] - \frac{[\pi af]^2}{[\pi aa]} - \cdots - \frac{[\pi qf\,(r'-1)]^2}{[\pi qq\,(r'-1)]} - \frac{[\Phi_1 \cdot r']^2}{[AA \cdot r']} - \cdots - \frac{[\Phi_s \cdot (r'+s-1)]^2}{[GG \cdot (r'+s-1)]},$$

где в условных обозначениях знаменатели во второй строчке — преобразованные квадратичные коэффициенты последних s уравнений.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r - s}}.$$

Наиболее широкое применение этот способ получил при уравнивании полигонометрических сетей. В качестве дополнительных неизвестных вводят поправки ориентирующих углов и координат узлов или только ориентирующих углов (предложение И. И. Купчинова, Б. А. Литвинова, Ю. И. Маркузе). Его применяют также для уравнивания при наличии систематических ошибок.

I.2.24. Уравнивание при большом числе неизвестных

И. Ю. Пранис-Праневич предложил следующий так называемый многогрупповой способ уравнивания больших сетей *, суть которого применительно к параметрическому способу уравнивания сводится к следующему.

Сеть делят на несколько примерно равных участков. Обозначив векторы неизвестных, относящиеся только к данному участку, через Δx, а неизвестных, общих для участков, через Δx_0 и поставив эти неизвестные в уравнениях поправок на последние места, получим, например, для трех участков следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} &R_1\Delta x_1 + R_{1.0}\Delta x_0 + b_1 = 0;\\ &R_2\Delta x_2 + R_{2.0}\Delta x_0 + b_2 = 0;\\ &R_3\Delta x_3 + R_{3.0}\Delta x_0 + b_3 = 0;\\ &R^{\mathrm{T}}_{1.0}\Delta x_i + R^{\mathrm{T}}_{20}\Delta x_2 + R^{\mathrm{T}}_{30}\Delta x_3 + R_0\Delta x_0 + b_0 = 0. \end{aligned}$$

* *И. Ю. Пранис-Праневич.* Руководство по уравнительным вычислениям триангуляции, М., Геодезиздат, 1956.

Первые три матричных уравнения называют частично независимыми, а последние — связывающим нормальным уравнением.

Эти уравнения могут быть получены одновременно по каждому участку. Затем в каждом участке исключают неизвестные Δx_i и в результате суммирования получают общую систему нормальных уравнений

$$[R_0 \cdot 3]\,\Delta x_0 + [b_0 \cdot 3] = 0.$$

Решая ее, находят вектор Δ_0, а затем и Δx_i независимо по каждому участку.

Этот способ получил заслуженное признание геодезистов и широко применяется, например, при уравнивании астрономо-геодезической сети СССР.

I.2.25. Понятие об уравнивании зависимых измерений

Метод наименьших квадратов можно применять и при зависимых (коррелированных) измерениях.

Суть уравнивания зависимых измерений заключается в том, что условие $[pv^2] = \min$, справедливое для независимых измерений, характеризующихся диагональной матрицей весов P, следует заменить условием

$$V^{\mathrm{T}} Q^{-1} V = \min,$$

где матрица весовых коэффициентов результатов измерений

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обычно в качестве зависимых рассматривают не сами измерения, а их функции. Так что возникает задача уравнивания функции измеренных величин.

В качестве примера можно привести задачу уравнивания углов при измеренных направлениях (углы, имеющие общую сторону, коррелированы между собой; коэффициент корреляции между ними $r = -0{,}5$).

Другим примером является уравнивание сетей с учетом ошибок исходных данных — коррелированных величин.

Можно показать, что двухгрупповое уравнивание по способу Крюгера или Бесселя является частной задачей уравнивания зависимых измерений. Например, при двухгрупповом уравнивании полигонометрического хода матрица весовых коэффициентов предварительно уравненных углов имеет вид

$$Q = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix}, \qquad (I.2.83)$$

где n — число сторон хода.

Появление центральных координат при двухгрупповом уравнивании и есть следствие преобразования матрицы коэффициентов при поправках углов в условных уравнениях второй группы с помощью матрицы (I.2.83).

Теорию уравнивания зависимых измерений удобно излагать в матричной форме.

Нормальные уравнения в параметрическом способе имеют вид

$$A^{\mathrm{T}} P A\,\Delta x + A^{\mathrm{T}} P L = 0,$$

где, в отличие от (I.2.31), матрица весов P «полная».

В коррелатном способе нормальные уравнения следует записать в виде

$$BQB^{\mathrm{T}} K + W = 0,$$

где $Q = P^{-1}$, а вектор поправок — в виде

$$V = QB^{\mathrm{T}} K.$$

I.2.26. Применение метода наименьших квадратов при аппроксимации функций

Метод наименьших квадратов находит широкое применение при решении задачи аппроксимации функций или при так называемом сглаживании экспериментальных зависимостей. Пусть производится опыт, целью которого является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x, причем предполагается, что y и x связаны функциональной зависимостью

$$y = \varphi(x).$$

В результате наблюдений получены пары чисел

$$(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

О форме зависимости судят исходя из существа задачи или по внешнему виду экспериментальной зависимости. Например, экспериментальные точки, изображенные на рис. 21, предполагают прямолинейную зависимость вида $y = ax + b$, а на рис. 22 — полином второй степени $y = ax^2 + bx + c$. В общем случае можно говорить о подборе полинома степени $n - 1$, который задает кривую, проходящую через все n точек (x_i, y_i). Но построение такого полинома нецелесообразно, ибо существующая закономерность будет искажена случайными ошибками наблюдений. Для сглаживания случайных уклонений как раз и служит метод наименьших квадратов.

С его помощью определяют коэффициенты сглаживающих полиномов. Так, для прямолинейных зависимостей будем иметь уравнения поправок вида

$$\begin{aligned} ax_1 + b - y'_1 &= v_1; \\ ax_2 + b - y'_2 &= v_2; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ ax_n + b - y'_n &= v_n. \end{aligned}$$

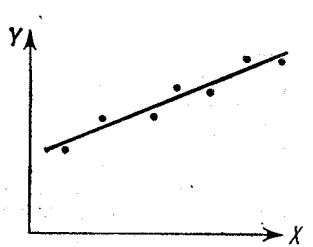


Рис. 21. Аппроксимация прямолинейной зависимости

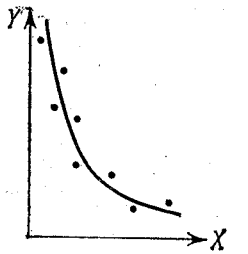


Рис. 22. Аппроксимация криволинейной зависимости

Здесь роль неизвестных играют два параметра a и b, а роль измерений величины — y^i, коэффициенты при a и b образуют матрицы

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}; \quad A^TA=\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}; \quad A^TL=\begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix}.$$

Так что имеем систему нормальных уравнений с двумя неизвестными:

$$[x^2]\,a+[x]\,b-[xy]=0;$$
$$[x]\,a+nb-[y]=0. \qquad (I.2.84)$$

Решение легко выполнить с помощью обратной матрицы по форме (I.2.32)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix},$$

где

$$Q=\frac{1}{[x^2]\,n-[x]^2}\begin{pmatrix} n & -[x] \\ -[x] & [x^2] \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$a=\frac{n\,[xy]-[x]\,[y]}{[x^2]\,n-[x]^2}; \quad b=\frac{-[x]\,[xy]+[y]\,[x^2]}{[x^2]\,n-[x]^2}. \qquad (I.2.85)$$

Рассмотрим пример. Пусть имеем пары наблюдений (x_i, y_i), представленные в табл. 32 и на графике рис. 23 в виде точек.

График показывает, что можно предположить функциональную зависимость $y=ax+b$. Согласно (I.2.85) имеем

$$a=\frac{2009-1870}{825}=0{,}168; \quad b=\frac{-11\,049+13\,090}{825}=2{,}473.$$

ТАБЛИЦА 32

№ наблюдения	x_i	y_i	v
1	1	2,8	—0,16
2	2	2,7	+0,11
3	3	2,9	+0,08
4	4	3,3	—0,16
5	5	3,2	+0,11
6	6	3,4	+0,08
7	7	3,6	+0,05
8	8	3,9	—0,08
9	9	4,0	—0,02
10	10	4,2	—0,04
	$\Sigma=55$	$\Sigma=34$	$\Sigma=-0{,}03$

$$[x^2]=385 \quad [xy]=200{,}9 \quad [x^2]\,n-[x]^2=825$$

Далее вычисляем уклонения (см. табл. 32)

$$v_i=0{,}168\cdot x_i+b-y_i$$

и осуществляем контроль на основании выражений (I.2.14):

$$[xy]=-0{,}18\approx 0;$$
$$[v]=-0{,}03\approx 0.$$

Для оценки точности вычисляем

$$[v^2]=0{,}0991 \quad \text{и} \quad m=\sqrt{\frac{0{,}0991}{10-2}}=0{,}11.$$

Далее имеем

$$m_a=m\sqrt{Q_{11}}; \quad m_b=m\sqrt{Q_{22}},$$

где

$$Q_{11}=\frac{n}{[x^2]\,n-[x]^2}=\frac{10}{825}=0{,}0121;$$
$$Q_{22}=\frac{[x^2]}{[x^2]\,n-[x]^2}=\frac{385}{825}=0{,}4667.$$

Поэтому

$$m_a=0{,}11\sqrt{0{,}0121}=0{,}012; \quad m_b=0{,}11\sqrt{0{,}4667}=0{,}075.$$

Еще проще данную задачу можно решить с помощью определителей. По данным табл. 32 имеем определитель системы нормальных уравнений

$$D=3850-3025=825;$$

определители неизвестных получаем:

$$D_a=-139; \quad D_b=-2040{,}5;$$

$$a=\frac{D_a}{D}; \quad a=-0{,}168_5; \quad b=\frac{D_b}{D}; \quad b=-2{,}473_8.$$

Искомое уравнение примет вид

$$y=-0{,}168_5x_i-2{,}473_8.$$

Оценим точность параметров a и b.

Нетрудно установить согласно работе [2], что

$$m_a=m\sqrt{\frac{A_{11}}{D}}; \quad m_b=m\sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \qquad (I.2.86)$$

где A_{11}, A_{22} — соответствующие алгебраические дополнения (в свою очередь, $\frac{A_{11}}{D}=Q_{11}$, $\frac{A_{22}}{D}=Q_{22}$).

Таким образом,

$$m_a=0{,}11\sqrt{(-1)^2\frac{10}{825}};$$
$$m_a\approx 0{,}012;$$
$$m_b=0{,}11\sqrt{(-1)^4\frac{385}{825}};$$
$$m_b=0{,}075.$$

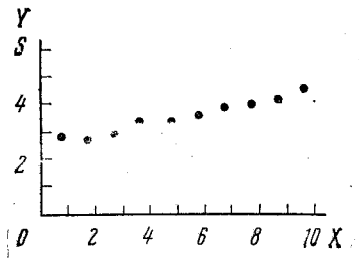


Рис. 23. График парной корреляционной зависимости

Можно показать, что когда функциональная зависимость имеет вид

$$y = ax + b,$$

задача нахождения параметров a и b математически тождественна задаче построения уравнения регрессии для случая, когда коэффициент корреляции окажется $r = \pm 1$. Применяя метод наименьших квадратов к примеру 29 (гл. I.1.18), получаем то же уравнение регрессии

$$y = 0{,}63x + 0{,}71.$$

Аналогично решается задача и для подбора параметров полиномов более высокого порядка, а также для определения коэффициентов систем линейных уравнений.

I.2.27. Решение нормальных уравнений методом приближений

Кроме описанных методов решения нормальных уравнений, называемых точными, для решения больших систем применяют методы приближений (итераций). В геодезических вычислениях наиболее часто используют метод простой итерации и метод Зейделя.

Метод простой итерации сводится к следующей процедуре. Система нормальных уравнений (например, трех) приводится к виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \cdot x_1 - \frac{[ab]}{[aa]} x_2 - \frac{[ac]}{[aa]} x_3 - \frac{b_1}{[aa]}; \\ x_2 &= -\frac{[ab]}{[bb]} x_1 - 0 \cdot x_2 - \frac{[bc]}{[bb]} x_3 - \frac{b_2}{[bb]}; \\ x_3 &= -\frac{[ac]}{[cc]} x_1 - \frac{[bc]}{[cc]} x_2 - 0 \cdot x_3 - \frac{b_3}{[cc]}. \end{aligned} \qquad (I.2.87)$$

Здесь роль неизвестных x_j могут играть как поправки δx_j, так и коррелаты, а роль свободных членов — соответственно величины $[al]$, $[bl]$, $[cl]$ или невязки w_1, w_2, w_3. Обозначим коэффициенты при неизвестных x_j в правых частях через α_{ij} (i — номер строки, j — номер неизвестных), а свободные члены — через β_i.

Тогда процесс приближений выполняют по формуле

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(p-1)} + \beta_i.$$

Здесь $p = 0, 1, 2, \ldots, m$ — номер приближения; n — число неизвестных в общем случае. В системе уравнений (I.2.87) $n = 3$.

Приближение начинают со значений

$$x_i^{(0)} = \beta_i$$

и заканчивают, когда значения неизвестных $x_j^{(m-1)}$ и $x_j^{(m)}$ будут в пределах точности вычислений совпадать.

Можно доказать, что процесс будет всегда сходиться, если наибольшая из сумм абсолютных величин коэффициентов α_{ij}, вычисленных по строкам, меньше единицы.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что при вычислении значений неизвестных x_j в приближении p используются уже полученные в этом же приближении неизвестные $x_{j-1}^{(p)}$, а остальные неизвестные будут из приближения $p - 1$.

Формула для вычислений имеет вид

$$x_i^{(p)} = \sum_{j=1}^{i=1} \alpha_{ij} x_j^{(p)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(p-1)} + \beta_i.$$

Например, при $p = 3$ и $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \alpha_{1.2} x_2^{(2)} + \alpha_{1.3} x^{(2)} + \beta_1; \\ x_2^{(3)} &= \alpha_{2.1} x_1^{(3)} + \alpha_{2.3} x_3^{(2)} + \beta_2; \\ x_3^{(3)} &= \alpha_{3.1} x_1^{(3)} + \alpha_{3.2} x_2^{(3)} + \beta_3. \end{aligned}$$

Вычисления выполняют в таблице следующего вида:

№ неизвестного	Коэффициенты			$\beta_i = x_i^{(0)}$	Приближения			
					$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	...	$x_i\,(m)$
1	0	α_{12}	α_{13}	β_1				
2	α_{21}	0	α_{23}	β_2				
3	α_{31}	α_{32}	0	β_3				

Метод Зейделя для системы нормальных уравнений всегда сходится.

Пример. Решить систему из трех нормальных уравнений, составленных при уравнивании нивелирной сети (см. гл. I.2.10) методом Зейделя:

$$\begin{aligned} 3{,}60\delta x_1 - 1{,}17\delta x_2 - 1{,}22\delta x_3 + 12{,}36 &= 0; \\ -1{,}17\delta x_1 - 4{,}88\delta x_2 - 1{,}25\delta x_3 + 5{,}05 &= 0; \\ -1{,}22\delta x_1 - 1{,}25\delta x_2 + 3{,}81\delta x_3 - 16{,}37 &= 0. \end{aligned}$$

Решение

				$\beta_i = x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$
1	0	+0,325	+0,339	−3,433	−2,31	−2,23
2	+0,240	0	+0,256	−1,035	0	−0,66
3	+0,320	+0,328	0	+4,296	+3,56	+3,36

	$x_i^{(3)}$	$x_i^{(4)}$	$x_i^{(5)}$	$x_i^{(6)}$	$x_i^{(7)}$	$x_i^{(8)}$
1	−2,51	−2,59	−2,621	−2,631	−2,634	−2,636
2	−0,78	−0,83	−0,847	−0,853	−0,855	−0,855
3	+3,24	+3,19	+3,179	+3,174	+3,173	+3,172

Как видим, неизвестные получены те же, что и в примере гл. I.2.10. Заметим, что значения x в первых приближениях целесообразно получать с меньшей точностью, увеличивая ее по мере сходимости процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.
2. *Большаков В. Д.* Теория ошибок наблюдений. М., Недра, 1983.
3. *Венцель Е. С., Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории вероятностей. М., Радио и связь, 1983.
4. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. М., Недра, 1972.

I.3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА В ГЕОДЕЗИИ

Е. Г. Ларченко, В. В. Голубев

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИМЕНЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

I.3.1. Классификация цифровых вычислительных машин

Современная вычислительная техника является важным фактором ускорения научно-технического прогресса. Она широко применяется при механизации и автоматизации различных научно-технических и производственных расчетов, в том числе при математической обработке результатов геодезических измерений. Особая роль принадлежит вычислительной технике в области отыскания оптимальных решений, в деле автоматизации геодезических работ и в создании автоматизированных систем управления (АСУ).

Наша промышленность выпускает настольные электронные клавишные вычислительные машины (ЭКВМ), миниатюрные электронные вычислительные клавишные машины (микрокалькуляторы), цифровые электронные вычислительные машины (ЭВМ).

И ЭКВМ и микрокалькуляторы — это вычислительные машины с ручным вводом исходных данных. Они имеют несколько операционных регистров и по 2—10 регистров памяти, а многие программно-управляемые ЭКВМ имеют несколько сотен и даже тысяч регистров памяти, что дает возможность автоматически решать на них задачи значительных объемов.

Цифровые вычислительные машины позволяют выполнять вычисления с любой необходимой точностью. В настоящее время имеется много разных цифровых вычислительных машин, которые находят широкое применение в различных областях науки и техники.

Все цифровые вычислительные машины можно разделить на два больших класса: с ручным вводом исходных данных и с автоматическим (рис. 24). Машины с ручным вводом исходных данных характеризуются тем, что каждое число набирается путем нажатия на клавиши. Эти машины делятся на суммирующие и вычислительные. Клавишные вычислительные машины (КВМ) наиболее приспособлены для инженерно-экономических расчетов небольших объемов.

Перфорационные вычислительные машины (ПВМ) — это машины, ввод исходных данных в которые производится автоматически. В комплект ПВМ входят 2—3 перфоратора для пробивки (в соответствии с исходными данными) отверстий на специальных карточках, называемых перфокартами, 1—2 контрольника для проверки правильности перфорации, сортировочное устройство для группировки перфокарт по заданному признаку, табулятор, являющийся основной счетно-записывающей частью.

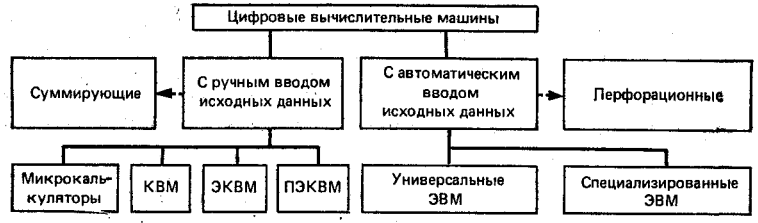


Рис. 24. Классификация цифровых вычислительных машин

В современный комплект ПВМ включают различные специальные устройства (электронные вычислители, электронные вычислительные приставки и др.), позволяющие эффективно выполнять все арифметические операции и значительно повышающие производительность труда.

Применение цифровых электронных вычислительных машин (ЭВМ) играет особо важную роль в техническом прогрессе и повышении эффективности производства. Машины III поколения образуют семейство программно совместимых ЭВМ единой серии (ЕС ЭВМ). Они выполняют от нескольких тысяч до нескольких миллионов операций в секунду. В настоящее время разработаны ЭВМ IV поколения, сконструированные на больших интегральных схемах (БИС). Их быстродействие достигает нескольких миллиардов операций в секунду.

Кроме универсальных выпускаются различные специализированные ЭВМ, предназначенные только для решения определенного класса задач. Программы для этих машин обычно записываются в постоянные запоминающие устройства (ПЗУ) при изготовлении машин.

I.3.2. Приближенные числа и правила действий с ними

Причины появления приближенных чисел. Приближенное число есть такое, которое отличается от точного на величину, допустимую по условиям данной задачи, и заменяет точное число в расчетных формулах. Основными причинами появления приближенных чисел являются: 1) ошибки исходных данных (результаты измерений, различные коэффициенты технологических данных и др.); 2) неточность формул, методов и моделей; 3) ошибки округлений в процессе счета. Для уменьшения накопления ошибок округления промежуточные результаты берут с дополнительными знаками; 4) ошибки, возникающие при переводе чисел из одной системы счисления в другую.

При решении задач на электронных вычислительных машинах пользуются двоичной, восьмеричной и другими позиционными системами счисления. Целые числа из одной позиционной системы в другую переводятся точно, а дробные, как правило, приближенно, поэтому появляются дополнительные ошибки. Они должны быть меньше ошибок исходных данных.

При действиях с приближенными числами необходимо учитывать точность, с которой можно получить значения искомых величин, и точность, с которой необходимо знать эти значения. В настоящее время разработаны правила вычислений с приближенными числами, применение которых облегчает решение различных задач и дает возможность выбирать соответствующие по точности средства вычислительной техники и рационально использовать их.

Относительную ошибку приближенного числа выражают обычно дробью

$$\varepsilon = \frac{1}{|a/\Delta|},$$

где a — приближенное значение числа, а Δ — его абсолютная ошибка. Чем меньше относительная ошибка, тем с большей точностью известен результат. В тех случаях, когда абсолютная ошибка неизвестна, а известно лишь ее предельное значение, вычисляют для характеристики точности результата предельную относительную ошибку как отношение предельной абсолютной ошибки к приближенному значению данной величины. Если, например, приближенные (округленные) числа 0,10 и 1,00 даны с предельной абсолютной ошибкой 0,005, то они имеют следующие предельные относительные ошибки:

$$\frac{0{,}005}{0{,}10} = \frac{0{,}5}{10}, \text{ или } 5\%; \quad \frac{0{,}005}{1{,}00} = \frac{0{,}5}{100}, \text{ или } 0{,}5\%.$$

Величина относительной ошибки связана с количеством значащих цифр. З н а ч а щ и м и называют все цифры, заключенные между старшей цифрой, отличной от нуля, и цифрой, имеющей ошибку не больше единицы. Сами эти две цифры тоже являются значащими. Например, число 480,65 имеет 5 значащих цифр, число 0,00603—3, число 6,00304—6, число 3,040—4.

Для приближенной оценки точности округленных чисел пользуются способом подсчета числа верных значащих цифр, который позволяет оценить точность приближенных чисел по их начертанию. Если абсолютное значение погрешности приближенного числа меньше половины единицы последнего знака, то все значащие цифры данного числа верны.

Точность результатов сложения и вычитания округленных чисел. Если дана сумма приближенных значений

$$s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

то предельная ошибка суммы может быть представлена выражением

$$|\Delta s|_{\text{пр}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|,$$

где Δx_i — ошибки слагаемых. Очевидно, что предельная ошибка суммы не может быть меньше предельной абсолютной ошибки слагаемого, имеющего наименьшее число десятичных знаков. Поэтому в сумме нет смысла сохранять больше десятичных знаков, чем их имеется в слагаемом с наименьшим количеством десятичных знаков.

При вычитании приближенных чисел, когда вычитаемое близко по величине к уменьшаемому, в разности уменьшается число значащих цифр, что вызывает увеличение относительной ошибки разности. Поэтому, чтобы результат имел заданную точность, близкие по значению уменьшаемое и вычитаемое необходимо брать с бо́льшим количеством значащих цифр или применять другие формулы.

Точность результатов умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. При умножении и делении в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр. В промежуточных результатах следует сохранять 1—2 запасных знака.

Пример. Пусть требуется вычислить

$$q = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{8{,}042 \cdot 20{,}060}{0{,}102} = 1581{,}593.$$

В этом примере все приближенные числа a, b, c даны с тремя десятичными знаками и с разным количеством значащих цифр. Наименьшее количество (три) значащих цифры имеет число c. Поэтому в результате (в числе q) верных значащих цифр будет не больше трех.

В этом можно убедиться, изменив грубейший компонент (число c) на величину предельной погрешности округления и вновь вычислив число:

$$q = \frac{8{,}042 \cdot 20{,}060}{0{,}1025} = 1573{,}878.$$

Сопоставляя первое и второе значения q, видим, что результат действительно имеет только три верные цифры.

Относительная предельная ошибка произведения и частного равна сумме предельных относительных ошибок аргументов. Для приведенного примера имеем:

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} = \frac{0{,}5}{8042} = \frac{0{,}5}{20\,066} + \frac{0{,}5}{102} \approx \frac{1}{200}.$$

Абсолютную предельную погрешность вычисляют по формуле

$$(\Delta q)_{\text{пр}} = q\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}}.$$

Для нашего примера получим $(\Delta q)_{\text{пр}} = 1582/200 \approx 7{,}9$, что приближенно равно разности найденных значений q $(\Delta q)_{\text{пр}} = 1581{,}6 - 1573{,}9 = 7{,}7$.

При делении и умножении приближенного числа на точное (или условно точное), а также точного числа на приближенное в результате получится значащих цифр не больше, чем их имеется в приближенном числе.

При возведении в квадрат в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число.

Пример. $P = d^2 = 21{,}04^2 = 442{,}7$.

Относительная ошибка результата возведения в степень равна показателю степени, умноженному на относительную ошибку основания.

Для нашего примера имеем:

$$\frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta d}{d} = 2\frac{0{,}5}{2104} \approx \frac{1}{2100};$$

$$\Delta P = 443/2100 = 0{,}21.$$

При извлечении квадратного корня в подкоренном числе необходимо брать столько значащих цифр, сколько их требуется получить в значении корня.

Пример. Найти $b = \sqrt{B} = \sqrt{3462{,}193081}$ с шестью значащими цифрами.

Округляя подкоренное выражение до шести значащих цифр, найдем $b = \sqrt{3462{,}19} = 58{,}8404$ с ошибкой, не превышающей 0,00005. Относительная ошибка извлечения корня из приближенного числа уменьшается пропорционально показателю корня n, если $n > 1$:

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{n}\frac{\Delta B}{B}.$$

Для нашего примера имеем:

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{2}\,\frac{0{,}5}{346\,219} \approx \frac{1}{1\,380\,000};$$

$$\Delta b = \frac{58{,}8}{1\,380\,000} = 0{,}000042.$$

Точность функции общего вида. Для функции с одним аргументом $y = f(x)$ относительную ошибку можно записать в виде

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\,\Delta x.$$

Пример. Вычислить площадь круга и определить абсолютную и относительную ошибки, если радиус круга $r = 10{,}0 \pm 0{,}05$ м (число π будем считать точным).

Дифференцируя функцию

$$P = \pi r^2$$

и переходя к конечным приращениям, получим:

$$\Delta P = \pi 2r\,\Delta r; \quad P = 3{,}142 \cdot 10{,}0^2 = 314 \text{ м}^2;$$

$$\Delta P = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10{,}0 \cdot 0{,}05 = 3{,}1 \text{ м}^2.$$

Относительная ошибка

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{3{,}1}{314} = \frac{1}{100}.$$

Если функция имеет несколько независимых аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то предельную абсолютную ошибку можно выразить формулой

$$(\Delta y)_{\text{пр}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Delta x_i \right|,$$

где Δx_i — предельные ошибки аргументов.

Иногда требуется определить ошибки нескольких аргументов по заданной ошибке функции. В этом случае получается одно уравнение с несколькими неизвестными, поэтому без дополнительных условий задачу решить нельзя. В качестве дополнительного условия часто принимают принцип равных влияний, заключающийся в том, что влияние ошибок отдельных аргументов $\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\Delta x_i$ на предельную абсолютную или относительную ошибку функции полагают равным.

I.3.3. Применение простейших вычислительных средств

Выбор средств и приемов вычислений. В зависимости от характера вычислений, а также от точности исходных данных и требуемой точности результатов применяют те или иные средства и приемы вычислений. Если ведутся отдельные вычисления с небольшой точностью (2—3 значащие цифры), то применяют логарифмические линейки.

Если проводятся многократные вычисления по одним и тем же формулам и результаты требуется знать с 2—3 значащими цифрами, то выгодно использовать номограммы, особенно в полевых условиях.

При значительных объемах вычислений рациональным средством являются клавишные вычислительные машины и различные таблицы. Для четкости и быстроты вычисления ведут по определенной схеме, а результаты записывают в специально разработанных таблицах.

Вычисления проверяют по контрольным формулам или выполняя вычисления каким-либо другим способом.

Выбор и использование математических таблиц. Инженеру-геодезисту приходится пользоваться различными таблицами, составляемыми для определенных функций. Таблицы обычно делят на общие и специальные. Общими являются, например, таблицы логарифмов чисел, умножения и деления, квадратных корней и т. п. Примером специальных таблиц служат таблицы превышений, приращений координат, размеров марок трапеций и др.

Материал таблиц располагают по определенному закону так, чтобы они были компактны, удобны и по ним можно было быстро находить нужные величины. По системе расположения материала различают таблицы с одним, двумя, тремя входами и т. д. Число входов связано обычно с числом аргументов функции, для которой составлены таблицы. При всех вычислениях выбирают таблицы с необходимым и достаточным числом знаков в зависимости от точности исходных данных и требуемой точности результатов вычислений.

В настоящее время, в связи с применением различных вычислительных машин, особое значение имеют таблицы натуральных значений тригонометрических и других функций.

При составлении, контроле и употреблении таблиц используют конечные разности.

Для функции $y = f(x)$, значения которой определены для ряда значений аргументов

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = a + 2h; \quad x_3 = a + 3h \ldots,$$

где h — приращение аргумента (ш а г т а б л и ц ы), можно написать:

$$\Delta' y_{x_i} = y_{x_i + h} - y_{x_i}.$$

Эта разность называется к о н е ч н о й р а з н о с т ь ю п е р в о г о п о р я д к а функции y, или п е р в о й р а з н о с т ь ю. Вторые разности, или разности второго порядка, составляются из первых разностей

$$\Delta'' y_{x_i} = \Delta' y_{x_i + h} - \Delta' y_{x_i}.$$

Третьи разности составляются из вторых

$$\Delta''' y_{x_i} = \Delta'' y_{x_i + h} - \Delta'' y_{x_i} \quad \text{и т. д.}$$

Табличные разности обычно записывают целыми числами в единицах младшего разряда значений функций.

При использовании таблиц приходится применять различные интерполяционные формулы. Если вторые разности $|\Delta'' y_{x_i}|$ меньше четырех единиц последнего знака, то ими и последующими разностями можно пренебречь и пользоваться линейным интерполированием. Если $|\Delta'' y_{x_i}|$ больше четырех единиц, а $|\Delta''' y_{x_i}|$ меньше семи единиц последнего знака, то без потери точности можно интерполировать по формуле

$$y = y_{x_i} + t \cdot \Delta' y_{x_i} + \frac{t(t-1)}{2}\,\Delta'' y_{x_i},$$

при этом t определяется по формуле

$$t = (x - x_i)/h,$$

где x_i — табличное значение аргумента, соответствующее табличному значению функции y_{x_i}; x — заданное значение аргумента, соответствующее искомому значению функции y; h — шаг таблиц.

Б. МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ И НАСТОЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ КЛАВИШНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

I.3.4. Общие сведения о микрокалькуляторах

Миниатюрные (массой 0,3—2,5 кг) клавишные электронные вычислительные машины, созданные на больших интегральных микросхемах, называют микрокалькуляторами (МК). Есть микрокалькуляторы простейшие, бухгалтерские, инженерные и наиболее совершенные — программируемые. Программы для них имеют свою отличительную особенность, обусловленную малыми размерами машин и малым объемом их памяти.

Сконструированы микрокалькуляторы с питанием от сети, автономным питанием и питанием от батарей солнечных элементов. К числу микрокалькуляторов с питанием от сети относится простейший МК «Электроника МК-44», имеющий массу 1,0 кг, габариты 24×18×8 см и три адресуемых регистра памяти, позволяющих хранить в них 12-разрядные числа, производить все арифметические операции, сложение и вычитание содержимого регистра индикации с содержимым регистра памяти.

Микрокалькулятор «Электроника МК-51» может выполнять различные арифметические операции, вычислять натуральные и десятичные логарифмы, антилогарифмы, прямые и обратные тригонометрические функции, производить различные операции с использованием регистра памяти, переводить значения углов, выраженные в градусах, минутах и секундах, в градусы и его десятичные доли.

К числу программируемых микрокалькуляторов с питанием от сети относятся «Электроника МК-46» и «Электроника МК-56», имеющие соответственно 15 и 18 регистров памяти, а массу 2,5 и 1,3 кг. К МК с автономным питанием относятся «Электроника БЗ-21» и «Электроника БЗ-34», имеющие соответственно 13 и 18 регистров и одинаковую массу 0,4 кг. Отметим, что «Электроника БЗ-34» аналогична «Электронике МК-56». Отличие их заключается в системе питания, размерах и в том, что в первой из них отсутствует возможность вычислять тригонометрические функции от аргументов, выраженных в градовой мере.

Во всех программируемых микрокалькуляторах, как правило, используется способ представления чисел с плавающей запятой, что повышает точность результатов вычислений.

I.3.5. Микрокалькулятор «Электроника МК-56»

Микрокалькулятор «Электроника МК-56» имеет 14 адресуемых регистров памяти, 4 регистра стековой памяти X, Y, Z, T. Регистр X служит для приема и хранения вводимого числа и результата вычислений. Содержимое регистра X отображается на индикаторе. Регистр Y служит для приема чисел из регистра X. Для использования предыдущего результата в дополнение к четырем стековым регистрам в микрокалькуляторе имеется регистр X1, называемый регистром предыдущего результата.

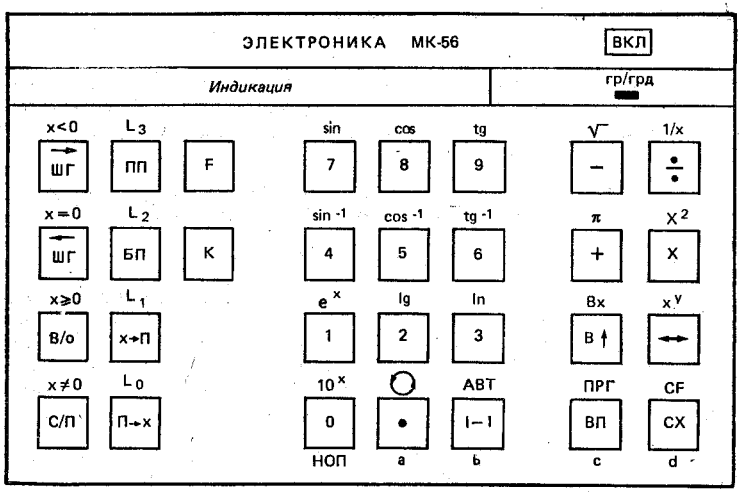


Рис. 25. Клавиатура микрокалькулятора «Электроника МК-56»

Вводимые числа и результаты вычислений отображаются на индикаторе с фиксированной или плавающей запятой, с мантиссой, имеющей не более восьми значащих цифр.

При вычислении значений тригонометрических функций их аргументы можно вводить в радианах, градах и градусах, предварительно переводя минуты и секунды в десятичные доли градуса.

Микрокалькулятор «Электроника МК-56» работает в двух режимах: «Автоматическая работа» и «Программирование». В режиме «Автоматическая работа» микрокалькулятор выполняет арифметические операции, вычисляет логарифмы чисел, тригонометрические функции, производит обмен чисел между регистрами и др. В этом же режиме микрокалькулятор работает и при вычислениях по программам. В режиме «Программирование» в микрокалькулятор вводят с помощью клавиатуры программы и производят их отладку. Большинство клавиш имеет двойную и тройную символику, которая позволяет использовать их для выполнения двух и трех операций, обозначенных символами на клавише и на панели сверху и снизу клавиш (рис. 25).

При выполнении операций, обозначенных символами на панели, сначала необходимо нажимать префиксную клавишу «F», а затем клавишу, которая имеет символ требуемой операции. Если, например, требуется найти $\sqrt{56\,300{,}24}$, то сначала вводят подкоренное число, а затем нажимают на клавиши «F» «$\sqrt{}$» и на индикаторе получают ответ: 237,27671. При определении значения $\sin\alpha \approx \sin 30^\circ\,30'\,04{,}2''$ сначала секунды и минуты переводят с необходимой точностью в десятичные доли градуса, переключатель устанавливают в положение «Гр» (градусы), вводят угол α (α = 30,501 167°) и, нажав на клавиши «F» «sin» получают на индикаторе ответ: 0,507 5559.

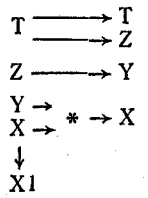
При выполнении некорректных операций, например, при делении на ноль, на индикаторе высвечивается сигнал ошибки «ERROR».

Стековая память состоит из 5 регистров X1, X, Y, Z, T, которые составляют единый блок. Он является входом в стековую память и выходом из нее. Информация здесь передвигается последовательно,

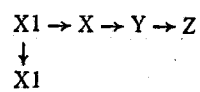
т. е. запись информации в регистр T осуществляется следующим образом $X \to Y \to Z \to T$. Такая передача осуществляется с помощью клавиши «B ↑». Последовательное нажатие клавиш «F», «↻» позволяет сделать обратную передачу информации $T \to Z \to Y \to X \to T$. С помощью клавиш «F», «↔» можно поменять информацию, хранящуюся в регистрах X и Y.

В режиме «автоматическая работа» можно осуществлять одноместные операции. Одноместные операции производят в регистре X. Результат записывается также в X. Информация в других регистрах остается без изменения.

При выполнении двухместных операций информация в стековой памяти передается следующим образом:



В качестве аргументов здесь выступают содержимое регистров X, Y. Результат записывается в X. Здесь используется регистр предыдущего результата X1. Чтобы вызвать содержимое регистра X1 на индикацию, т. е. передать его содержимое в X, достаточно нажать клавиши «F, «Bx». При этом осуществятся следующие действия:



Для очистки регистра X1 достаточно нажать клавишу «CX» и одну из клавиш «+» «—» «×» «÷».

Для управления стековой памятью используются следующие клавиши:

B ↑ — передача содержимого регистра X в регистр Y и передвижения информации в стеке;
CX — сброс X;
↔ — обмен содержимым регистров X и Y;
|—| — смена знака числа или знака порядка;
ВП — ввод порядка числа;
↻ — кольцевые передвижения информации в стеке;
Bx — восстановление предыдущего результата.

Запись чисел в 14 адресуемых регистров памяти осуществляется последовательным нажатием клавиши «x → П» и одной из клавиш «0», «1», ..., «9», «a», »b», «c», «d» регистра памяти, в который производится запись чисел.

Для вызова содержимого какого-либо регистра памяти (например, c) в регистр X нажимают клавиши «П → x» и «c».

Пример. Пусть требуется вычислить величину $s = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ при $b = 3{,}0003$ м и $\varphi = 7^\circ 32' 14{,}2''$.

Задачу можно решить, используя следующий порядок действий.

Набор на клавиатуре	*Показания индикатора*
14,2	14,2
B ↑	14,2
60	60
÷	2,3666666—01
32	32
+	32,236667
60	60
÷	5,3727778—01
7	7
+	7,5372778
2	2
÷	3,7686389
F, lg	6,5870177—02
F, 1/x	15,181377
3,0003	3,0003
X	45,548685
2	2
÷	22,774342

В режиме «программирование» используются клавиши, перечисленные ниже.

Название	*Назначение*
ПРГ	переход в режим «программирование»
АВТ	переход в режим «автоматическая работа»
$x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, $x \neq 0$	для выполнения команды условного перехода
ПП	1) в режиме «программирование» — для перехода к подпрограмме; 2) в режиме «автоматическая работа» — для потактового прохождения программы при ее отладке
В/о	возврат из подпрограммы; обнуление адреса при вводе программы в память или при ее запуске
С/П	1) в режиме «программирование» — останов и фиксация содержимого регистра X на индикаторе; 2) в режиме «автоматическая работа» — запуск вычислений по программе
L_0, L_1, L_2, L_3	выполнение команды организации циклов с регистрами 0, 1, 2, 3 соответственно
К	префиксная клавиша косвенных переходов и косвенного обращения к адресуемым регистрам
БП	клавиша безусловного перехода по адресу
НОП	выполнение команды «нет операции» при отладке программы
ШГ →	«шаг вперед»; для потактового прохождения программы в порядке возрастания адресов . . . .
ШГ ←	«шаг назад»

Последовательность действий, необходимых для решения какой либо задачи на микрокалькуляторе, является программой данной задачи.

Для хранения программы «Электроника МК-56» имеет специальную память из 98 ячеек с адресами от 00 до 97. Каждой клавише присвоен двухзначный код, который записывается в одну ячейку. Для записи программы в память необходимо нажать клавиши: «В/0» — для обнуления счетчика команд; «F», «ПРГ» — для перехода в режим «программирование». После этого вводится сама программа.

В конце программы должно стоять «С/П» (по этой команде вычисления прекращаются и на индикаторе появляется содержимое регистра X). Далее осуществляется переход в режим «автоматическая работа» нажатием клавиш «F», «АВТ». Для обращения к программе необходимо нажать клавиши «В/0» и «С/П».

Если программа начинается не с нулевого адреса, а с некоторого адреса α, а также если необходимо продолжить или исправить программу, то в режиме «автоматическая работа» следует нажать «БП», набрать α (двухзначное число) и нажать клавиши «F», «ПРГ», после чего ввести программу.

Для организации циклов в микрокалькуляторе предусмотрены безусловная и условная передачи управления. Безусловный переход имеет две модификации. В первой по команде БП α осуществляется передача управления команде с адресом α. Команда занимает две ячейки. В одну записывается код клавиши «БП», в другую — адрес α.

Во второй модификации по команде К БП β осуществляется косвенный безусловный переход. Здесь под β понимается один из 14 символов 0, 1,..., 9, a, b, c, d, которые обозначают соответствующие регистры памяти. При этом адрес α, по которому передается управление, формируется следующим образом:

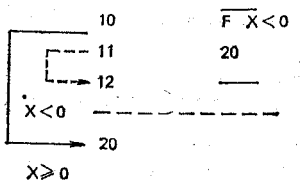
$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 - 1, & \text{если } \beta \text{ — символы } 0, 1, 2, 3; \\ \alpha_1 + 1, & \text{—»— } \beta \text{ — —»— } 4, 5, 6; \\ \alpha_1, & \text{—»— } \beta \text{ — —»— } 7, 8, 9, a, b, c, d. \end{cases}$$

Здесь α_1 — число, записанное в регистре, обозначаемом через β. Так, если в регистре RG3 находится число $\alpha_1 = 05$, то по команде КБП3 управление передается по адресу $\alpha = \alpha_1 - 1 = 05 - 1 = 04$. Команда косвенного перехода записывается в одну ячейку.

Команды условного перехода также имеют 2 модификации: 1) FZα, 2) KZβ. Здесь Z одно из условий $X = 0$, $X \neq 0$, $X < 0$, $X \geqslant 0$, по которому анализируется регистр X.

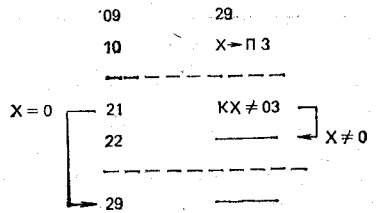
В случае первой модификации команда занимает две последовательные ячейки, в первой записывается код условия, во второй α. Если условие Z не выполняется, управление передается ячейке с адресом α, если выполняется, то ячейке, следующей за командой.

Пример.



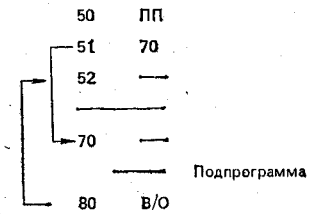
При второй модификации, как и в случае безусловной косвенной передачи управления, β обозначает регистр памяти, где хранится α — адрес передачи управления, в случае, если условие Z не выполняется. Если условие выполняется, то управление передается в ячейку, следующую за командой KZβ.

Пример.



В системе команд «Электроника МК-56» предусмотрена возможность обращения к подпрограммам по командам ППα и КППβ

Пример.



Команда В/0 обеспечивает возврат управления в основную программу после выполнения подпрограммы.

В режиме «автоматическая работа», нажав клавишу «В/0» и затем последовательно нажимая «ПП», на табло получают результаты выполнения каждой команды.

Для организации циклов могут быть использованы команды L0, L1, L2, L3. При выполнении этих команд происходит обращение к регистрам RG0, RG1, RG2, RG3 соответственно. При каждом обращении к регистру из его содержимого вычитается единица и производится анализ на нуль. Если содержимое регистра не равно нулю, то осуществляется переход к выполнению команды, записанной по адресу перехода α, следующему за командой цикла; если содержимое равно нулю, то выполняется команда, записанная в программе за адресом перехода.

Пример. Программа вычисления площади треугольника по формуле Герона (табл. 33)

$$P = \sqrt{(q-a)(q-b)(q-c)q},$$

где $q = (a + b + c)/2$.

Инструкция к программе.

1. Перед вводом программы необходимо нажать клавиши «В/0», «F», «ПРГ».

2. Перед запуском программы необходимо перейти в режим «автоматическая работа», нажав клавиши «F», «АВТ».

3. Ввести значения a, b, c (длины сторон треугольника), соответственно в регистры RGa, RGb, RGc, нажимая клавиши «x → П», a, «x → П», b, «x → П», c.

4. Для вычисления по программе нажать клавишу «С/П».

По завершении вычислений результат отображается на индикаторе.

ТАБЛИЦА 33

Адрес	Наименование клавиши	Пояснение
00	П → x a	Вызов из RGa в RGx величины a
01	П → x b	Вызов величины b
02	+	$a + b$
03	П → x c	Вызов величины c
04	+	$a + b + c$
05	2	2
06	÷	$q = (a + b + c)/2$
07	x → П d	Запись q в RGd
08	П → x a	Вызов a
09	—	$q - a$
10	X → П 0	Запись $q - a$ в RG0
11	П → X d	Вызов q
12	П → X b	Вызов b
13	—	$q - b$
14	X → П 1	Запись $q - b$ в RG1
15	П → X d	Вызов q
16	П → X c	Вызов c
17	—	$q - c$
18	П → X 1	Вызов $q - b$
19	X	$(q - c)(q - b)$
20	B↑	Запись $(q - c)(q - b)$ в RGY
21	П → X0	Вызов $q - a$
22	X	$(q - c)(q - b)(q - a)$
23	B↑	Запись $(q - c)(q - b)(q - a)$ в RGY
24	П → X d	Вызов q
25	X	$(q - c)(q - b)(q - a)\,q$
26	F $\sqrt{}$	$P = \sqrt{(q - c)(q - b)(q - a)\,q}$
27	С/П	Останов

I.3.6. Общие сведения о настольных ЭКВМ

ЭКВМ последних выпусков (табл. 34) по своим вычислительным возможностям близки к уровню средних ЭВМ. Они устанавливаются непосредственно на рабочих местах, просты в использовании, сравнительно дешевы.

Важной характеристикой ЭКВМ является количество имеющихся регистров. Кроме операционных имеются регистры оперативной и внешней памяти, увеличение числа которых расширяет возможности ЭКВМ.

Самая простейшая ЭКВМ «Искра-111» позволяет автоматически выполнять все арифметические операции над положительными и отрицательными числами, полуавтоматически (без записи промежуточных результатов) возводить числа в любую степень, извлекать квадратные корни, производить накопление в одном регистре.

Более совершенными ЭКВМ являются «Искра-114» и «Искра-1121» которые имеют одинаковые функциональные возможности, автоматически выполняют арифметические операции, накопление в четырех регистрах памяти, извлечение квадратного корня, засылку и выборку из регистров памяти чисел и результатов вычислений. «Искра-1121» имеет печатающее устройство. На этой машине удобно производить

ТАБЛИЦА 34

Название ЭКВМ и ПЭКВМ	Объем оперативной памяти: регистры	Объем оперативной памяти: кбайт	Разрядность десятичных чисел (максимальная)	Габариты, см	Масса, кг
Искра-111	1	—	12	36×30×12	7
Искра-112	3	—	12	40×38×13	8
Искра-114	4	—	15	30×32×10	5
Искра-1121	4	—	15	30×36×12	12
Искра-1122	3	—	12		12
Искра-123	5	—	16	41×38×13	15
Искра-124	10	—	16	41×39×14	15
Искра-1252	255	—	12	49×47×38	40
Искра-1256	—	4—64	12	52×55×35	45
Искра-226	—	64	13	52×55×35	45
Электроника Т3-16	32	0,4	12	20×43×62	18
Электроника Т3-16М	243	4	12	20×43×62	25
Электроника Т3-29	3971	32	12	61×46×18	25

геодезические вычисления по формулам, в которых нет тригонометрических функций. Например, вычисление площади P треугольника по измеренным на плане длинам сторон a, b, c удобно производить по формуле Герона, представив ее в виде:

$$P = \sqrt{(-q)(a - q)(b - q)(c - q)}; \quad q = (a + b + c)/2.$$

Порядок нажатия клавиш:

a, «А1», «+», b, «А2», «+», c, «А3», «÷», «2», «|—|», «x»;

«А1», «×», А2», «×», «А3», «=», «$\sqrt{}$».

Таким образом, в регистры А1, А2, А3 вводятся значения сторон a, b, c, а в РК появляется значение полупериметра q. Затем в тех же регистрах А1, А2, А3 получаются значения $(a - q)$, $(b - q)$, $(c - q)$, а в регистре К появляется ответ — значение площади P треугольника.

Широкое применение при экономических и некоторых инженерных расчетах нашла ЭКВМ «Искра-1122», которая позволяет накапливать результаты вычислений в трех регистрах памяти: А1, А2, А3. Автоматическое накопление чисел и результатов при выполнении арифметических действий осуществляется, если нажаты клавиши «Σ 1», «Σ 2», «Σ 3». Например, вычисление общей арифметической средины без промежуточных записей (с автоматическим накоплением значений числителя и знаменателя) производится так:

$$X = \frac{\sum a_i P_i}{\sum P_i} = \frac{6{,}4 \cdot 2{,}1 + 6{,}8 \cdot 1{,}7 + 4{,}3 \cdot 0{,}9}{2{,}1 + 1{,}7 + 0{,}9} = \frac{28{,}87}{4{,}70} = 6{,}14.$$

Для накопления значений $\sum P_i$ и $\sum a_i P_i$ необходимо нажать клавиши «Σ 2» и «Σ 3». Тогда в регистре А2 накопится $\sum P_i = 4{,}70$, а в регистре А3 — $\sum a_i P_i = 28{,}87$. Значение X можно определить следующим образом. Нажать на клавиши «Σ 2» и «Σ 3» (включить устройство накопления регистра памяти). Погасить число, находящееся

в регистре клавиатуры (нажать клавишу «С», от чего погасятся все три операционные регистра РК, РС, РВ). Нажатием на клавишу «А3» передать число 28,87 в регистр клавиатуры. Нажать клавишу деления «÷». Нажать клавишу «А2» (передать число 4,70 в регистр клавиатуры) и затем нажать на клавишу «=». После этого на экране ЭЛТ в четырех его строках появятся числа: 0; 4,70; 28,87; 6,14.

I.3.7. Программно-управляемые электронные клавишные вычислительные машины (ПЭКВМ)

Современные ПЭКВМ ориентированы на использование их как в области вычислений, так и в сфере управления. Они обладают большим диапазоном чисел и высокой точностью вычислений. Кроме того, они имеют встроенные устройства ввода-вывода (УВВ), малые габариты, массу и потребляемую мощность.

Широкое распространение получили ПЭКВМ «Электроника Т3-16», «Электроника Т3-16М», «Электроника Т3-29», «Искра-1256», «Искра-226». К некоторым из ПЭКВМ могут подключаться внешние устройства, такие, как накопители на магнитных дисках и магнитных лентах, графопостроители, печатающие устройства и др.

ПЭКВМ «Электроника Т3-16» имеет 35 регистров общей памяти, из них 3 регистра (X, Y, Z) служат для индикации на электронно-лучевой трубке (ЭЛТ) промежуточных и окончательных результатов. ПЭКВМ «Электроника Т3-16М» имеет 256 регистров общей памяти, что позволяет автоматически решать на ней значительные по объему геодезические задачи, в том числе системы нормальных уравнений до 14-го порядка. ПЭКВМ «Электроника Т3-29» имеет оперативную память объемом в 32 кбайта и кассетное ЗУ объемом в 80 кбайт, алфавитно-цифровые встроенные УВВ (дисплей и клавиатура), запоминающее устройство с прямым доступом на компакт-кассете. На ПЭКВМ «Электроника Т3-29» только при использовании оперативной памяти можно автоматически решать системы нормальных уравнений до 62-го порядка, а при использовании кассетного ЗУ до 120-го порядка.

Подробнее рассмотрим ПЭКВМ «Электроника Т3-16» и «Электроника Т3-16М» как наиболее распространенные. Клавиатура «Электроники Т3-16М» отличается от клавиатуры «Электроники Т3-16» только названием клавиши «ЦП», вместо которой стоит клавиша «КОСВ», служащая для обращения к косвенной памяти. На любой ПЭКВМ этого типа можно выполнять вычисления в трех режимах: 1) в счетном, когда используются клавиши ввода данных, арифметических операций, накопления и получения результатов; 2) с использованием подпрограмм, имеющихся в самой машине; 3) программирования, когда составленная программа некоторой задачи вводится в машину путем нажатия на соответствующие клавиши и затем задача решается требуемое число раз.

Чтобы избежать повторный ввод данной программы с клавиатуры, ее можно записать на магнитную карту, с которой эту программу автоматически можно опять записать в регистры машины нажатием клавиши «Ввод».

Числа, вводимые путем нажатия на клавиши, записываются в регистре X и высвечиваются для визуального контроля на электронно-лучевой трубке (ЭЛТ) в этом регистре. Каждая из этих машин имеет три оперативных регистра (X, Y, Z), служащие для индикации данных на ЭЛТ и выполнения операций с данными и командами программы.

Арифметические и другие операции на ПЭКВМ выполняются за доли секунды, основное время уходит на ввод-вывод данных. Поэтому

для повышения производительности труда программы представляют в таком виде, чтобы вычисления можно было выполнять без промежуточных записей и без повторного ввода исходных данных.

В отличие от машины «Электроника Т3-16», которая имеет только прямо адресуемое оперативное запоминающее устройство (ПАОЗУ), включающее три регистра ЭЛТ (X, Y, Z) и 32 регистра оперативной памяти (ОП), «Электроника Т3-16М» дополнительно имеет косвенно адресуемое оперативное запоминающее устройство (КАОЗУ), объемом 208 регистров (один регистр содержит 14 разрядов). Оперативная память как в модели «Т3-16», так и в модели «Т3-16М», расположена на двух страницах (положительной «+» и отрицательной «—») по 16 регистров в каждой. Последние два регистра (+e, +f, —e, —f) на каждой странице ОП используются как сумматоры (накопители). В остальных 28 регистрах можно разместить 28 чисел или 392 (28·14) команды программы. В регистрах КАОЗУ, пронумерованных от 0 до 207, можно разместить 208 чисел или 2912 команд программы (208·14).

Обращение к КАОЗУ модели «Т3-16М» осуществляется через клавишу «КОСВ» и только после нажатия этой клавиши можно нажимать необходимую клавишу управления или арифметической операции. При этом предварительно в регистр X ЭЛТ необходимо ввести адрес регистра (разряда) косвенной памяти, с содержимым которого требуется выполнить арифметическую операцию или переадресование (команду управления).

Решение задач на ПЭКВМ в счетном режиме. При сложении, вычитании, умножении, делении, возведении в степень результаты индицируются в регистре У на экране ЭЛТ. Числа, которые вводятся путем нажатия на соответствующие клавиши, индицируются в регистре X на ЭЛТ. Если окажется, что число введено неправильно, то его можно погасить нажатием клавиши «СБРОС X», при этом числа, находящиеся в других регистрах, не изменяются. Из числа, находящегося в регистре X, извлекается квадратный корень нажатием клавиши «$\sqrt{x}$», при этом значение корня индицируется в том же регистре X. Число, находящееся в регистре Z, может быть передано в регистр Y и затем использовано для продолжения вычислений.

Учитывая точность исходных данных, необходимую точность результатов, переключатель запятой (точки) устанавливают на требуемое количество десятичных знаков (от 0 до 9). При больших значениях чисел и большом количестве установленных десятичных знаков в регистре Y на ЭЛТ может не хватить разрядов. В этом случае результат автоматически выводится на ЭЛТ в форме с плавающей запятой.

Порядок действий при решении задач в счетном режиме рассмотрим на примере вычислений по формуле

$$q = a \cdot b \cdot c/d.$$

Нажатием клавиши «СБРОС» погасить регистры X, Y, e, f. Затем при помощи клавиатуры установить число a (которое появится в регистре X) и нажатием на соответствующую клавишу передать это число в регистр Y. Набрать на клавиатуре число b и нажатием на клавишу умножения получить произведение $a \cdot b$ в регистре Y. Установить число c и нажатием на клавишу умножения в регистре Y получить произведение $a \cdot b \cdot c$. После этого установить на клавиатуре число d и нажатием на клавишу деления в регистре Y получить ответ.

Рассмотрим пример вычисления общей арифметической средины в счетном режиме по формуле

$$x = \frac{240{,}4 \times 0{,}35 + 241{,}0 \times 0{,}86 + 240{,}4 \times 0{,}42}{0{,}35 + 0{,}86 + 0{,}42}.$$

Для уменьшения числа нажатий на клавиши запишем это выражение так:

$$x = \frac{0{,}4 \times 0{,}35 + 1{,}0 \times 0{,}86 + 0{,}4 \times 0{,}42}{0{,}35 + 0{,}86 + 0{,}42} + 240.$$

Устанавливают переключатель запятой на два десятичных знака. Вычисление x наиболее рационально определяется по схеме: «СБРОС» → → 0,4 → «↑» → 0,35 → «X» → «Н+» → 1,0 → «↑» → 0,86 → «X» → → «Н+» → 0,4 → «↑» → 0,42 → «X» → «Н+» → «ИН» → «:». Индикация на ЭЛТ: 0,86—Z, 0,72 — Y, 1,63 — X, следовательно, $x = 0{,}72 + 240 = 240{,}72$.

Примечание. Нажатие клавиши «Н+» производит сложение содержимого регистров X и Y с содержимым регистров f и e соответственно; нажатие клавиши «ИН» передает содержимое регистра f в регистр X и содержимое регистра e в регистр Y.

Решение задач на ПЭКВМ с использованием подпрограмм. Пользуясь подпрограммами удобно вычислять значения тригонометрических и логарифмических функций, с большой точностью решать некоторые геодезические задачи. Например, прямую геодезическую задачу можно решить так. Считая дирекционный угол α и длину линии s полярными координатами, после ввода их значений соответственно в регистры Y и X нажатием на клавишу «КПРЯМ» получают приращения координат Δx и Δy с заданным количеством десятичных знаков.

При вычислении приращений координат по формулам

$$\Delta x = s \cdot \cos\alpha, \quad \Delta y = s \cdot \sin\alpha$$

наиболее рациональной является схема:

«СБРОС» → α → «↑» → s → «КПРЯМ»

Показания ЭЛТ: регистр Z — 0; регистр Y — Δy, регистр X — Δx.

Решение обратной геодезической задачи, т. е. вычисление дирекционного угла α и длины линии s по прямоугольным координатам ее концов, наиболее рационально выполнять по схеме:

«СБРОС» → Δy → «↑» → Δx → «КПОЛЯР»

Показания ЭЛТ: регистр Z — 0; регистр Y — α, регистр X — s.

Если дирекционный угол больше 180°, то на ЭЛТ получается его дополнение до 360° со знаком минус. В этом случае, не гася регистров, на клавиатуре набирают 360° и после нажатия на клавишу „+" в регистре Y получают действительный дирекционный угол.

Решение задач на ПЭКВМ с использованием программ. После выбора алгоритма составляют логическую схему программы в виде блок-схемы, которая облегчает составление программы, наглядно отображает весь процесс решения задачи на ПЭКВМ. Составить программу — это определить последовательность шагов (нажатий на соответствующие клавиши), чтобы решить данного типа задачу. Составление программы включает в себя два вида работ: написание последовательности команд (шагов) и распределение памяти. В программе используются коды клавиш, представляющие собой двухзначные восьмеричные числа. При помощи клавиши «ПП» в программе можно обращаться к подпрограмме на любом шаге. В программу обязательно надо ввести команду «Конец» (или «Стоп»), иначе счетчик команд будет продолжать переход к следующим адресам, которые случайно могут оказаться в регистрах памяти.

Каждая ПЭКВМ имеет библиотеку программ, включающую в себя около 100 программ для решения задач различных областей знаний. Для решения геодезических задач из предлагаемой библиотеки можно использовать программы решения задачи Потенота, вычисления площадей участков по координатам их вершин, решения системы трех линейных уравнений и др.

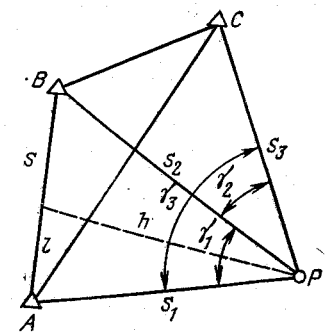


Рис. 26. Схема линейной засечки

Составленную программу можно ввести в память машины с клавиатуры и затем решить данную задачу необходимое число раз с различными исходными данными. Можно составленную программу записать на магнитную карту. Из записанных на магнитные карты программ составляется библиотека. Для решения задачи магнитная карта, на которой записана программа, вставляется в считывающее устройство и программа записывается в регистры машины.

Для примера рассмотрим вычисление координат точек методом линейной засечки (рис. 26). Программа (табл. 35) составлена по следующим формулам:

$$l = \frac{s^2 + s_1^2 - s_2^2}{2s}; \quad h = \sqrt{s_1^2 - l^2};$$

$$x_P = x_A + \frac{l\,\Delta x_{AB} - h\,\Delta y_{AB}}{s};$$

$$y_P = y_A + \frac{l\,\Delta y_{AB} + h\,\Delta x_{AB}}{s}.$$

Контроль вычислений выполняется по формуле

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = s_1.$$

В значении вспомогательной величины h «+» берется, если она расположена справа от линии AB; если h расположена слева, то берут «—». В программе не предусмотрен знак минус, поэтому, если точка P лежит по другую сторону линии AB, необходимо менять местами точки A и B так, чтобы вершины A, B и P следовали по ходу часовой стрелки.

Решение задачи на ПЭКВМ «Электроника Т3-16» по программе, приведенной в табл. 35, выполняют в следующем порядке.

1. Тумблер «Род работы» установить в положение «Вычисление».
2. Нажать клавишу «Сброс» и клавишу «Конец».
3. При вводе программы с клавиатуры тумблер переключить в положение «Программирование», а при вводе программы с магнитной карты тумблер оставить в положении «Вычисление».
4. Ввести исходные данные, начиная с нажатия клавиш «Сброс», «Конец».

На ЭЛТ в регистрах X, Y, Z соответственно появятся искомые значения x_P, y_P, s_1 (контрольное).

ТАБЛИЦА 35

Шаг	Клавиша	Код	Шаг	Клавиша	Код	Шаг	Клавиша	Код	Шаг	Клавиша	Код
00	x → ( )	23	20	a	13	40	y → ( )	40	60	x	36
01	a	13	21	←	27	41	e	12	61	→	25
02	стоп	41	22	x	36	42	a	13	62	+	33
03	x → ( )	23	23	→	25	43	x	36	63	c	16
04	b	14	24	—	34	44	f	15	64	:	35
05	стоп	41	25	c	16	45	↑	27	65	y → ( )	40
06	x → ( )	23	26	:	35	46	x → ( )	67	66	c	16
07	c	16	27	2	02	47	9	11	67	f	15
08	стоп	41	28	:	35	48	—	34	68	+	33
09	x → ( )	23	29	→	25	49		14	69	y → ( )	40
0a	d	17	2a	←	27	4a	x	36	6a	a	13
0b	стоп	41	2b	x	36	4b	→	25	6b	d	17
0c	x → ( )	23	2c	x → ( )	23	4c	+	33	6c	←	27
0a	e	12	2d	a	13	4d	c	16	6d	x → ( )	67
10	стоп	41	30	b	14	50	:	35	70	9	11
11	x → ( )	23	31	←	27	51	←	27	71	+	33
12	f	15	32	x	36	52	x → ( )	67	72	y → ( )	40
13	стоп	41	33	→	25	53	9	11	73	b	14
14	x → ( )	23	34	КП	22	54	x ↻ y	30	74	x ↻ y	30
15	9	11	35	—	34	55	f	15	75	←	27
16	8	14	36	→	25	56	—	34	76	d	17
17		27	37	$\sqrt{x}$	76	57	a	13	77	—	34
18	x → ( )	36	38	x → ( )	23	58	x	36	78	→	25
19	c	16	39	b	14	59	e	12	79	x	36
1a	←	27	3a	e	12	5a	КП	22	7a	a	13
1b	x	36	3b	←	27	5b	x → ( )	23	7b	←	27
1c	→	25	3c	d	17	5c	9	11	7c	f	15
1d	+	33	3d	—	34	5	8	14	7	—	34

Шаг	Клавиша	Код
80	c	16
81	x	36
82	→	25
83	+	33
84	→	25
85	$\sqrt{x}$	76
86	←	27
87	a	13
88	←	27
89	b	14
8a	конец	46

В. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ (ЭВМ)

I.3.8. Структурная схема и принципы работы ЭВМ

Каждая ЭВМ состоит из большого количества элементов электронной автоматики, которые объединены в отдельные блоки, называемые устройствами. К основным устройствам относятся: пульт ручного управления, устройство ввода информации (программы и исходных данных), запоминающее устройство, арифметическое устройство, устройство управления, устройство вывода.

Все эти устройства соединены между собой каналами связи (рис. 27). Каждое устройство выполняет определенную работу независимо от других частей машины. Пульт ручного управления (ПРУ) служит для оперативного ручного управления машиной (пуск, останов вычислений, ввод отдельных чисел, контроль за ходом вычислений). Устройство ввода (Увв) служит для переноса в запоминающее устройство (ЗУ) программы решения задачи и исходных данных. Запоминающее устройство (ЗУ) состоит из нескольких отдельных устройств: быстродействующего, называемого оперативным (ОЗУ) или памятью машины, внешнего запоминающего устройства (ВЗУ), называемого накопителем, долговременного запоминающего устройства (ДЗУ), в котором обычно записываются некоторые стандартные программы.

ОЗУ предназначено для приема, хранения и выдачи чисел и команд. Через ОЗУ проходит вся информация, поступающая в машину и идущая на вывод. Скорость работы ОЗУ выше скорости других устройств. ВЗУ имеет большую емкость. Оно может хранить от нескольких сотен тысяч до нескольких миллионов чисел.

Р и с. 27. Структура ЭВМ:
1 — основные управляющие сигналы; *2* — направление движения информации

ВЗУ и ДЗУ могут быть магнитными барабанами (МБ), магнитными лентами (МЛ), магнитными дисками, магнитными картами. ВЗУ и ДЗУ связаны только с оперативной памятью (ОЗУ) и хранящаяся в них информация используется другими устройствами только через ОЗУ.

Арифметическое устройство (АУ) выполняет элементарные арифметические, логические и другие операции. АУ, как и другие устройства, выполняет операции в соответствии с командами, предусмотренными программой, для решения данной задачи. Каждая команда изображается в виде некоторого условного числа, реализуемого электрическим сигналом. Команда состоит из адресов и кода операции. Последовательность команд является программой решения задачи. АУ и УУ составляют процессор машины. Устройство управления (УУ) обеспечивает автоматическое управление работой машины в процессе вычислений. Оно связано со всеми устройствами ЭВМ. УУ расшифровывает поступающие в него команды, вырабатывает управляющие сигналы и посылает их в другие устройства машины, указывая дальнейший путь вычислений.

Устройство вывода служит для записи полученных результатов вычислений на бумаге, пробивок на перфокартах, перфолентах или записи на магнитных лентах и фотопленках. Устройство вывода преобразует электрические сигналы в механические действия, скорость его работы значительно ниже скорости других устройств.

I.3.9. Системы счисления, применяемые в ЭВМ

Системы счисления подразделяют на позиционные и непозиционные. К позиционным относится, например, общепринятая десятичная система, к непозиционным — римская.

Позиционные системы называются так потому, что значение каждой цифры зависит от ее позиции в последовательности цифр. Например, в числе 648,36 цифра 6 слева обозначает шесть сотен, а цифра 6 справа — шесть сотых. Количество разных знаков, применяемых в данной позиционной системе, называется ее основанием. Десятичная система имеет 10 знаков — от 0 до 9. Число 648,36 в десятичной системе счисления можно записать так:

$$648{,}36 = 6\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 6\cdot 10^{-2}.$$

Обозначив буквами a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, ..., a_{-k} цифры некоторого числа N в системе счисления с основанием q, можно написать:

$$N = a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1}q^{-1} + \cdots + a_{-k}q^{-k}$$

или сокращенно

$$N = \sum_{i=1}^{-k} a_i q^i, \qquad (I.3.1)$$

где $n+1$ — положительное число, определяющее число разрядов в целой части N; k — положительное число, определяющее количество разрядов в дробной части; a_i — цифры числа, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant a_i \leqslant q-1$; q — основание системы счисления. Пользуясь формулой (I.3.1), можно переводить числа из любой позиционной системы в десятичную. При $q=2$ система называется двоичной, в ней $a_i = 0,1$; при $q=8$ система называется восьмеричной, в ней $a_i = 0, \ldots, 7$; при $q=16$ система называется шестнадцатиричной, в ней $a_i = 0, \ldots, 9, a, b, c, d, e, f$.

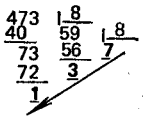
Пользуясь формулой (I.3.1), двоичную сумму легко перевести в десятичное число:

$$N_{10} = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 17 + 1/4,$$

при этом $10001_2 = 17_{10}$, $0{,}01_2 = 0{,}25_{10}$.

В любой позиционной системе целые числа всегда изображаются целыми, дробные числа, как правило, изображаются дробными.

Правило перевода целых чисел из одной позиционной системы в другую можно сформулировать так. Необходимо делить данное число и получающиеся частные на основание q новой системы до тех пор, пока не получится частное, меньшее основания системы. Новое число в системе q будет равно остаткам от деления, записанным начиная с последнего частного. Например, перевод десятичного числа 473 в восьмеричную систему выполняют следующим образом:

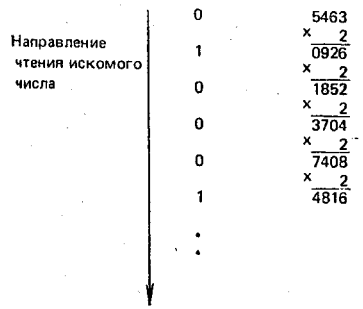


Это значит, что $473_{10} = 731_8$. Для контроля полученное восьмеричное число можно перевести в десятичное, пользуясь формулой (I.3.1)

$$N_{10} = 7\cdot 8^2 + 3\cdot 8^1 + 1\cdot 8^0 = 473.$$

Перевод дробных чисел производится путем умножения данного числа и получающихся дробных частей на основание новой системы, пока в дробной части числа не получится нуль, если число переводится точно, или пока не будет получено необходимое количество значащих цифр.

Десятичное число 0,5463 переводится в двоичное приближенно. Произведя последовательное умножение данного числа 0,5463 на 2, получим:



Следовательно, $0{,}5463_{10} = 0{,}10001\ldots_2$.

Необходимое количество значащих цифр при переводе чисел из одной позиционной системы в другую можно подсчитать по формуле

$$K = \frac{\lg a + (n-1)\lg q - \lg b}{\lg b} + 1, \qquad (I.3.2)$$

где K — количество значащих цифр в определенном числе с основанием b; n — количество значащих цифр в данном числе с основанием q;

a — первая значащая цифра данного числа; b — первая значащая цифра определяемого числа.

Пользуясь формулой (I.3.2), для рассматриваемого примера приближенно получим: $K = (0{,}7 + 3 - 0)/0{,}3 + 1 = 13$.

Таким образом, чтобы сохранить точность при переводе десятичного числа 0,5463, имеющего четыре значащие цифры, в его двоичный эквивалент, необходимо получить 13 значащих цифр (13 двоичных знаков).

В практике вычислений на ЭВМ используются также смешанные системы счисления: двоично-восьмеричная, двоично-десятичная, двоично-шестнадцатиричная.

Восьмеричная система счисления применяется для записи программы вычислений на ЭВМ благодаря простоте перевода чисел из восьмеричной системы в двоичную и обратно. Перевод в двоично-восьмеричную систему заключается в том, что десятичное число сначала переводится в восьмеричное, а затем каждая восьмеричная цифра заменяется тройкой двоичных знаков, называемых т р и а д о й:

Восьмеричные цифры	0	1	2	3	4	5	6	7
Триады	000	001	010	011	100	101	110	111

Каждая триада соответствует одному восьмеричному разряду. Поэтому для перевода двоичного числа в восьмеричное достаточно двоичное число разбить на триады вправо и влево от запятой и каждую триаду заменить восьмеричной цифрой. Например, двоичное число 101 001 111, 000 110 в восьмеричной системе изобразится так: 517,06. Если каждую цифру восьмеричного числа заменить двоичной триадой, то получится запись числа в двоичной системе счисления. Например: $175{,}61_8 = 1\ 111\ 101{,}110\ 001_2$.

ЭВМ обычно все вычисления выполняет в двоичной системе счисления. Двоично-десятичная запись чисел заключается в том, что каждая десятичная цифра представляется двоичной четверкой, называемой тетрадой:

Десятичные цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тетрады	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

Десятичное число 589,05 в двоично-десятичном коде изобразится так: $589{,}05_{10} = 101\ 1000\ 1001,\ 0000\ 0101_{2-10}$.

I.3.10. Операции с числами в ЭВМ

Двоичная система позволяет использовать наиболее простые электрические цепи в ЭВМ. С помощью запоминающих двоичных элементов может быть представлено любое двоичное число. В ЭВМ используются две формы представления чисел: с фиксированной запятой и с плавающей запятой.

В машинах с плавающей запятой любое число представляется как произведение двух сомножителей:

$$x = \pm mq^p,$$

где m — мантисса числа ($m < 1$); q — основание системы счисления; p — целое положительное или отрицательное число, называемое порядком. Например, десятичные числа 435,64 и —0,00568 могут быть записаны так: $435{,}64 = 0{,}43564 \cdot 10^3$; $-0{,}00568 = -0{,}568 \cdot 10^{-2}$.

Двоичные числа —1101,10 и 0,000101 могут быть записаны так: $-1101{,}10 = -0{,}110110 \cdot 10^{100}$; $0{,}000101 = 0{,}101 \cdot 10^{-11}$.

Различают нормализованные и ненормализованные числа. Нормализованным называют такое число, в котором в первом после запятой разряде стоит не нуль, а любая значащая цифра (для двоичного числа — единица). Таким образом, в нормализованном виде число записывается так, чтобы

$$\frac{1}{q} \leqslant |m| < 1.$$

Операции в ЭВМ выполняются с кодами чисел и их знаками. Знак «+» кодируется нулем, знак «—» — единицей. Все арифметические операции сводятся к сложению, точнее, к наложению импульсов. При умножении знаковые разряды чисел складываются.

Арифметические и логические операции выполняются в ЭВМ по правилам действий с двоичными числами, при этом двоичные числа представляются в прямом, обратном и дополнительном кодах. Положительные числа во всех трех кодах изображаются одинаково и их изображение совпадает с обычной формой записи двоичных чисел. Отрицательные двоичные числа имеют единицу в знаковом разряде. При записи отрицательных двоичных чисел в прямом коде числовые разряды не изменяются. При записи отрицательных чисел в обратном коде изменяются все нули на единицы, а единицы на нули, что позволяет вычитание чисел заменять сложением. При записи отрицательных чисел в дополнительном коде сначала находят обратный код числа и затем добавляют единицу в младший разряд. При сложении в ЭВМ числа сначала изображаются в обратном коде и после этого сложение выполняется по обычным правилам во всех разрядах, включая и знаковый разряд. При этом если слева у знакового разряда получается единица, то она прибавляется к младшему разряду.

I.3.11. Характеристика современных ЭВМ

Машины единой серии (ЕС ЭВМ) и серии малых ЭВМ (СМ ЭВМ). образуют семейство программно совместимых ЭВМ третьего поколения (табл. 36). ЕС ЭВМ представляют собой семейство ЭВМ, построенных по

ТАБЛИЦА 36

Модель	Страна-разработчик	Быстродействие, тыс. оп/с	Объем ОЗУ, кбайт	Число и скорость мультиплексных каналов, кбайт/с	Число и скорость селекторных каналов, Мбайт/с
ЕС-1020	СССР, НРБ	10—20	64—256	1×16	2×0,3
ЕС-1022	СССР	80—90	256—512	1×80	2×0,5
ЕС-1030	СССР, ПНР	60	128—512	1×40	3×0,8
ЕС-1032	ПНР	200	128—1 024	1×40	3×0,4
ЕС-1033	СССР	200	256—512	1×70	3×0,8
ЕС-1040	ГДР	400	256—1 024	1×50	6×1,25
ЕС-1050	СССР	500	512—1 024	1×110	6×1,3
ЕС-1015	ВНР	12	160	1×20	1×0,8
ЕС-1025	ЧССР	60	256	1×24	4×0,8
ЕС-1035	СССР, НРБ	140	512	1×30	5×1,3
ЕС-1045	СССР, ПНР	700	1 024—4 096	1×40	1×3,0
ЕС-1055	ГДР	450	512—3 072	2×40	3×1,5
ЕС-1060	СССР	1000	2 048—8 192	2×110	6×3,0
ЕС-1065	СССР	4000	4 096—16 384	2×110	14×3,0

ТАБЛИЦА 37

Модель	Производительность процессора, тыс. оп/с	Максимальная емкость ОЗУ, тыс. слов
СМ-1	140	32
СМ-2	400	128
СМ-3	160	32
СМ-4	800	128

модульному принципу. Каждый модуль состоит из стандартных блоков, узлов и элементов.

Машины семейства СМ ЭВМ относятся к мини-ЭВМ (табл. 37). Они могут сопрягаться с машинами ЕС ЭВМ.

ЭВМ третьего поколения могут работать в режиме разделения времени. Этот режим заключается в том, что ресурсы машины делятся между большим числом пользователей, имеющих свои индивидуальные дистанционные пульты, соединенные с машиной каналами связи.

Г. ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ЭВМ

1.3.12. Этапы решения задач на ЭВМ

Для решения конкретной задачи на ЭВМ необходимо выполнить комплекс ручных и машинных действий, которые можно разделить на следующие этапы: 1) выбор численного метода решения задачи; 2) разработка алгоритма решения задачи и составление программы; 3) перенесение программы и исходных данных на перфокарты, перфоленты или другие носители информации; 4) ввод в машину информации; 5) автоматическое решение задачи, контроль и вывод результатов.

Составленная программа целиком или по частям отлаживается (проверяется) при помощи тестов — небольших задач, решенных вручную. Далее решение выполняется в автоматическом режиме. Машина автоматически производит все арифметические и логические операции, контролирует вычисления, полученные результаты переводит в десятичную систему счисления и печатает их на бумажной ленте или перфорирует на перфокартах или перфолентах. При работе на ЭВМ руководствуются соответствующими инструкциями по подготовке исходной информации, проведению счета и др.

1.3.13. Адресность ЭВМ

В команде ЭВМ указываются следующие сведения: 1) действие, которое следует произвести (указывается с помощью кода операции); 2) два адресанта, A_1 и A_2, которые показывают, где взять аргументы; 3) адрес A_3, показывающий, куда записать результат; 4) явным или косвенным образом указывается, куда передать управление после выполнения команды.

Таким образом, вид команды следующий: КОД $A_1A_2A_3$.

По этой команде выполняются действия, указанные в коде команды, т. е. $[A_1] * [A_2] \Rightarrow [A_3]$. Здесь $*$ — символ выполняемого действия. Машины, в которых используются команды такого вида, называются трехадресными. К ним относятся: ЕС ЭВМ, СМ ЭВМ, БЭСМ-4, машины типа М-20 и др.

Большая группа ЭВМ, таких, как Минск, Наири и др., относятся к двухадресным. Команда этих ЭВМ выглядит следующим образом: КОД A_1A_2. Результат, как правило, записывается по второму адресу (на некоторых ЭВМ по первому). Аргумент, хранившийся по этому адресу, перед записью результата автоматически стирается. Система команд данного типа предусматривает возможность оперирования с сумматором, т. е. с регистром, в котором производятся арифметические операции.

1.3.14. Математическое обеспечение ЭВМ

Под математическим (программным) обеспечением понимают совокупность алгоритмов и программ, предназначенных для организации, проведения и контроля вычислительного процесса на данной ЭВМ и обнаружения ее неисправностей (рис. 28).

Всякий пользователь ЭВМ должен быть уверен, что машина исправна и все ее устройства работают безошибочно. Правильность работы ЭВМ и всех ее устройств обычно устанавливают с помощью тестовых и диагностических программ, комплекс которых с соответствующими инструкциями прилагается к каждой машине.

Для ускорения программирования составляют подпрограммы и стандартные программы для вычислений на конкретных ЭВМ. Примером подпрограмм являются программы перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную и обратно, извлечения корня, вычисления значений тригонометрических функций и др.

Стандартными являются программы решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения обратной матрицы, умножения векторов и др. Составлено много программ для уравнивания геодезических сетей. На основе подпрограмм и стандартных программ создаются библиотеки стандартных программ (БСП).

Математическое обеспечение должно обеспечивать рациональную организацию и проведение вычислительного процесса. В настоящее время наиболее распространенным методом автоматизации программирования является использование различных алгоритмических языков, в связи с чем в состав математического обеспечения ЭВМ включают трансляторы с этих языков.

Операционная система (ОС ЕС) и дисковая операционная система (ДОС ЕС) предназначены для использования во всех совместимых моделях ЕС ЭВМ. ДОС ЕС имеет относительно малую емкость памяти

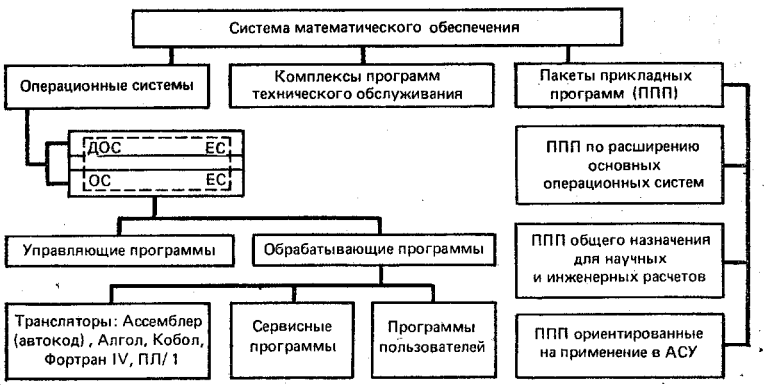


Рис. 28. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ

(64—128 кбайт). Она применяется главным образом для обработки экономической информации; ОС ЕС — более мощная система с емкостью памяти 128 — 2000 кбайт. В состав операционной системы входят управляющие и обрабатывающие программы. Управляющие программы осуществляют обмен данных между оперативной памятью и внешними ЗУ, организуют очередь выполнения заданий, распределяют устройства ввода-вывода. В основе управления задачами лежит программа, называемая супервизором, которая удовлетворяет запросы на основную память, обеспечивает службу времен , выполняет прерывания, осуществляет завершение задачи и выполняет ряд других функций. К обрабатывающим программам относятся трансляторы и сервисные программы, используемые для выполнения наиболее часто встречающихся функций обслуживания при обработке данных.

1.3.15. Общие сведения об алгоритмических языках

Алгоритмические языки характеризуются тем, что программы на них пишутся в удобной форме и затем с помощью особых программ, называемых *трансляторами*, переводятся в систему команд конкретной машины. Каждый алгоритмический язык содержит строго определенный набор символов и правила, позволяющие однозначно переводить (транслировать) программы, записанные на этом языке, в рабочие программы данной машины при помощи самой ЭВМ.

Существующие алгоритмические языки можно разделить на три группы: машинно-ориентированные (автокоды), универсальные и проблемно-ориентированные.

Отличительной особенностью машинно-ориентированных языков является простота трансляторов с них, так как в каждом таком языке учитываются конкретные особенности ЭВМ. Поэтому трансляторы с таких языков занимают мало места в запоминающих устройствах машины.

Универсальные языки отличаются тем, что в их структуре не учитываются особенности работы конкретной машины. К преимуществам таких языков относится простота составления и чтения программ, возможность широкого обмена программами между вычислителями, выполняющими работы на разных ЭВМ. К универсальным языкам относятся алгоритмический язык АЛГОЛ-60 и получивший широкое распространение язык ФОРТРАН, предназначенный главным образом для решения инженерных и научных задач. На базе языка ФОРТРАН разработано много специализированных языков.

Большое распространение получил универсальный язык программирования PL/1 (ПЛ/1). Его применяют для решения широкого круга вычислительных, экономических, управленческих, логических и других задач. Кроме того, широко используются проблемно-ориентированные языки для решения задач той или иной области. Примером проблемно-ориентированного языка является алгоритмический язык КОБОЛ, предназначенный для обработки экономической информации.

В последние годы стали широко применять машинно-ориентированные языки (автокоды). Хотя автокоды, не обладают такими широкими возможностями, как универсальные языки, они позволяют использовать более компактные трансляторы, значительно уменьшающие время трансляции.

1.3.16. Алгоритмический язык ФОРТРАН

Дословно ФОРТРАН (FORMULA TRANSLATOR) означает переводчик формул. Этот язык ориентирован в основном на решение научных и инженерных задач. Однако он может быть использован для решения экономических, учетно-бухгалтерских и других задач.

Программы на ФОРТРАНЕ представляют собой последовательность операторов. В программе допускаются комментарии, которые не обрабатываются машиной и служат для лучшего понимания текста программы на стадии отработки алгоритма. Строка комментария отличается от остальных строк программы наличием в ее начале буквы С. Язык ФОРТРАН позволяет записывать решение задачи в виде, близком к обычным математическим записям. Например, выражение $E = (A \cdot B + C)/D$ на языке ФОРТРАН будет записано в виде E = (A * B + C)/D. Существует несколько версий ФОРТРАНА. Наиболее распространенной является ФОРТРАН IV.

В ФОРТРАНЕ используются 26 заглавных букв латинского алфавита — от A до Z, знак ¤, который тоже считается буквой, десять арабских цифр, специальные символы: «+» (плюс), «—» (минус), «* *» (знак возведения в степень), «,» (запятая), «.» (десятичная точка), «=» (знак присвоения), «( )» (скобки), « » (пробел), «*» (знак умножения), «/» (знак деления).

Описание переменных. На ФОРТРАНЕ IV допускается пять типов переменных: целые (INTEGER), вещественные (REAL), с двойной точностью (DOUBLE PRECISION), логические (LOGICAL), комплексные (COMPLEX).

Тип переменных устанавливается программистом и должен быть описан в начале программы. Если переменные не описаны, то они считаются целыми в случае, когда их имена начинаются с букв I, J, K, L, M. В противном случае переменные считаются типа REAL. Описание имеет вид:

⟨Тип переменных⟩ ⟨список переменных⟩

Например,

```
INTEGER A, B, K
REAL X1, INIC, IY
DOUBLE PRECISION N
```

Описание массивов. Каждый массив обязательно должен быть описан. При описании указывается максимальное значение индексов массива и тип.

Для четырехмерного массива описание выглядит следующим образом: DIMENSION R (K_1, K_2, K_3, K_4), где R — имя переменной, K_1, K_2, K_3, K_4 — максимальные значения 1-го, 2-го, 3-го, 4-го индексов.

Ввод-вывод на ФОРТРАНЕ. Операторы ввода-вывода называют еще операторами обмена. Они обеспечивают обмен информации с внешними устройствами. Это — устройства считывания с перфокарт, перфолент, вывода на печать и записи на магнитные диски и ленты. Все устройства нумеруются целыми числами.

Оператор ввода служит для ввода информации с внешних устройств в оперативное запоминающее устройство ЭВМ и имеет вид:

READ (*m*, *n*) ⟨*список переменных*⟩

Здесь *m* — номер внешнего устройства, *n* — метка оператора FORMAT, в котором указывается тип переменных. В случае, если *n* отсутствует, то переменные передаются во внутреннем машинном представлении без преобразований. В списке переменные разделяются запятыми.

Оператор вывода передает информацию из ОЗУ на перфокарты, печать, перфоленту, магнитные ленты, диски и имеет вид:

WRITE (*m*, *n*) ⟨*список переменных*⟩,

где *m*, *n* — имеют тот же смысл, что и в операторе READ.

Пример. READ (1, 2) N, E (N), (F (K), K = M, N, 2).

С помощью данного оператора вводятся переменные N, E (N) и в цикле F (K) при K, изменяющемся от M до N с шагом 2.

Оператор FORMAT (*спецификации*) задает способ преобразования информации при вводе-выводе и записывается в любом месте программы до оператора END. Оператор FORMAT снабжается меткой. В ходе программы он пропускается как холостой и выполняется только при ссылке на него в операторах ввода-вывода. Каждый элемент ввода-вывода должен соответствовать спецификации своего типа. Спецификация целых чисел имеет вид: In, где n — число позиций, отведенных для переменной. В это число входит и знак переменной.

Пример. WRITE (3, 4) M.

4 FORMAT (I3)

Спецификация вещественных чисел $F_{n_1 \cdot n_2}$, где n_1 — общее число позиций числа, включая десятичную точку и знак числа, n_2 — число десятичных знаков после десятичной точки. Спецификация нормализованного числа $E_{n_1 \cdot n_2}$. Здесь n_1 — общее число позиций, n_2 — число знаков в мантиссе. Должно выполняться соотношение $n_1 \geqslant n_2 + 7$. В данном случае число представляется в виде $M \cdot E^p$, где M — нормализованная мантисса, p — порядок числа.

Спецификация чисел с двойной точностью имеет вид $D_{n_1 \cdot n_2}$. Здесь n_1 и n_2 имеют тот же смысл, что и в спецификации $F_{n_1 \cdot n_2}$.

Спецификация nX служит для выполнения n пробелов при печати или для пропуска n колонок на перфокарте.

Пример. WRITE (3,8) K, L, R0

8 FORMAT (1X, I4, 4X, I3, 4X, F 8.3)

При выполнении оператора WRITE, переменные K, L, R0 выведутся на печать в соответствии со спецификациями I4, I3, F8.3. При этом между K и L, L и R0 будет 4 пробела.

Перед каждой спецификацией может быть проставлено число, обозначающее кратность спецификаций, т. е. число ее повторений.

Пример. FORMAT (1X, 2I5, 2 (E15.6, 2I5).

Спецификации Gr или Gr·n употребляются для ввода и печати чисел. Здесь r — число позиций, отводимое для данного числа, n — число значащих цифр. В формате G положение десятичной точки не фиксируется, а число вводится и выводится с отведенных для него позиций. Во втором варианте печатается только указанное число значащих цифр.

Спецификация Tn служит для печати с заданной позиции в строке n.

Спецификация An служит для символьного ввода-вывода информации. Здесь n — число символов.

Пример. WRITE (6.2) X

2 FORMAT (1X, A3)

При выводе напечатаются три символа, которые хранятся в переменной X в двоичном представлении.

Спецификация литерал употребляется только при выводе и задает вставки, явно выписанные программистом. Имеет две разновидности:

1) текст заключается в кавычки, что приводит к печати данного текста:

FORMAT (' — K = ', I2)

2) спецификация nH, где n — число символов, которые требуется напечатать. Они должны следовать за спецификацией nH в операторе FORMAT:

WRITE (3.15) K

15 FORMAT (3H K =, I2)

Спецификация логических переменных имеет вид Ln, где n — число символов. Логические значения пробиваются на картах в виде символов T и F от слов TRUE (истина) и FALSE (ложь).

Встроенные функции. На ФОРТРАНЕ имеется ряд встроенных функций. При их описании будем придерживаться следующих обозначений:

1) если перед функцией стоит буква I, то это означает действие в форме целого, D — в форме двойной точности, C — в форме комплексного числа;

2) через R4 будем обозначать вещественную переменную длиной 4 байта, C4 — комплексную переменную, I4 — целую переменную.

Например, запись ABS (R4) ⇒ R4 в наших обозначениях означает, что функция ABS вычисляет абсолютное значение переменной длиной 4 байта и результат получается также в вещественной форме длиной 4 байта.

Основные операторы ФОРТРАНА. Оператор присваивания имеет вид: V = A, где V — переменная, A — арифметическое выражение.

Например, P (J, K) = P (J, K) + A (I) ∗Z ∗ ∗2, здесь ∗ — знак умножения, ∗ ∗ — знак возведения в степень.

Оператор безусловного перехода GO TO n. Здесь n — метка оператора, которому передается управление.

Условный арифметический оператор перехода IF (A) m_1, m_2, m_3, где A — арифметическое выражение, m_1, m_2, m_3 — целые числа, соответствующие меткам в программе.

Данный оператор передает управление на метку m_1, если A < 0, на m_2, если A = 0, и на m_3, если A > 0.

Вычисляемый оператор GO TO имеет вид: GO TO (m_1, m_2, ..., m_n), I, Здесь I — идентификатор простой переменной целого типа, m_1, m_2, ..., m_n — список меток. По данному оператору управление передается метке, у которой порядковый номер в списке равен значению переменной I.

Назначенный оператор GO TO имеет вид:

GO TO I (m_1, m_2, ..., m_n)

Здесь обозначения соответствуют предыдущему оператору. Но управление передается метке, которая сама равна значению переменной I. При этом значение переменной I можно задавать только с помощью оператора ASSIGN m TO I. Здесь m — метка, значение которой присваивается переменной I.

Логический оператор IF имеет вид:

IF (L1. Z. L2) S

Здесь L1, L2 — логические выражения; S — безусловный оператор (любой оператор, кроме IF и DO); Z — один из символов: EQ (равно) и NE (не равно), GT (больше), GE (больше или равно), LT (меньше), LE (меньше или равно).

Если выражение в скобках верное, то оно принимает логическое значение TRUE и оператор S выполняется. Если же оно несправедливо, то принимает значение FALSE и оператор S не выполняется.

Оператор цикла DO имеет вид:

DO m I = N, K, L

Здесь I — переменная целого типа; N, K, L — либо целые числа, либо переменные целого типа; N — начальное значение переменной I; K — конечное значение этой переменной; L — величина изменения значения переменной I (шаг изменения).

Все операторы, следующие за оператором цикла до оператора с меткой m включительно, входят в тело цикла и выполняются (K + I — — N)/L раз. Если шаг равен 1, то его можно не указывать.

Пример.
```
      DO 10 K = 2, 50
   10 SUMMA = SUMMA + X (K) * *2
```
Здесь определяется $\sum_{k=2}^{50} x_k^2$.

Последним оператором в теле цикла не могут быть операторы управления GO TO, IF, DO, RETURN, PAUSE, STOP и невыполняемые операторы. Это ограничение снимается с помощью оператора CONTINUE, который является холостым и употребляется для закрытия цикла. Его ставят в конце цикла и приписывают ему метку m.

Пример.
```
      DO 15 M = 1, 5 00
      DO 15 N = 2, 30
      IF S·LE 0 GO TO 16
   15 CONTINUE
   16----------
```
Подпрограммы. Программирование сложных задач принято разбивать на небольшие задачи и отлаживать их независимо. Подпрограммы имеют две формы SUBROUTINE и FUNCTION. Последняя форма предназначена для вычисления значений одной какой-либо функции.

Синтаксическая структура подпрограммы SUBROUTINE имеет вид:
```
SUBROUTINE S (F1, F2, ..., Fn)
RETURN
END
```
Здесь S — имя программы, F_1, F_2, ..., F_n — список формальных параметров.

Пример. Подпрограмма вычисления полинома $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$
```
      SUBROUTINE POLY (N, X, A0, A, P)
      DIMENSION  A (N)
      P = A0
      Z = X
      DO 5 I = 1, N
      P = P + A (I) * Z
      Z = Z * X
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```


Имя данной программы POLY; N, X, A0, A, P — являются формальными параметрами, которые используются в данной подпрограмме. Существенно, что в подпрограммах типа SUBROUTINE допускается описание динамических (т. е. изменяющихся) массивов, что недопустимо в основной программе. Оператор RETURN возвращает управление на основную программу.

Вызов программы осуществляется с помощью оператора CALL. Он имеет вид: CALL S (T_1, T_2, ..., T_n), где S — имя вызываемой подпрограммы, T_1, T_2, ..., T_n — список фактических параметров, которые соответствуют списку формальных параметров в подпрограмме.

Пример.
```
      DIMENSION  A (3)
      A (1) = 3
      A (2) = 3
      A (3) = 1
      CALL POLY (3, 1, 1, A, P)
      WRITE (6, 1) P
    6 FORMAT (F  5.2)
      END
```
Данная программа использует для вычисления полинома предыдущую подпрограмму.

Подпрограмма типа FUNCTION имеет вид: FUNCTION F (F_1, F_2, ..., F_n), здесь F — имя подпрограммы и переменной, которой присваивается значение в ходе выполнения программы. F_1, F_2, ..., F_n — список формальных параметров подпрограммы.

Пример.
```
FUNCTION  E (Z)
E = < арифметическое  выражение>
RETURN
END
```
В основной программе указатель функции E вызовет обращение к данной подпрограмме. Например, при наличии в основной программе оператора D = (E (A) + E (B))/(E (A) — E (B)) значения E (A) и E (B) будут вычисляться по подпрограмме. При выполнении данного оператора значения аргументов A и B должны быть определены. Их значения присваиваются формальному параметру Z подпрограммы.

На ФОРТРАНЕ предусмотрен аппарат, позволяющий считать часть памяти, общей для программы и для всех подпрограмм. Описание общей части памяти располагается в начале программы или подпрограммы и имеет вид: COMMON <*список общей памяти*>.

Пример.
```
COMMON A, B, N, C (10)
      LOGICAL B
      DOUBLE PRECISION C
```
В подпрограмме переменные могут иметь другие имена и другой порядок расположения, но их типы должны соответствовать. Например, описание того же блока в подпрограмме можно сделать так:
```
      COMMON X, P, J, D (5)
      DOUBLE PRECISION D
      LOGICAL P
```

При таком описании переменные X и A, B и P, N и J и пять первых элементов массива располагаются фактически в одной и той же области памяти. Изменение одной из них в подпрограмме вызывает соответствующее изменение переменной в основной программе.

Пример. Программа обработки ряда равноточных измерений, выполненной по формулам:

$$\bar{x} = x_1 + [\varepsilon]/n; \quad \varepsilon_i = x_i - x_1; \quad m = \sqrt{[v^2]/(n-1)},$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$; $M = m/\sqrt{n}$.

```
      DIMENSION X (SC0), V
      REAL M1, MY
      READ (1, 10) N
      READ (1, 20) (X (K), K = 1, N)
   10 FORMAT (I3)
   20 FORMAT (F8.3)
      Y = 0
      DO 21 K = 1, N
   21 Y = Y + X (K) — X (1)
      Y = X (1) — Y/FLOAT (N)
      M1 = 0
      DO 22 K = 1, N
   22 M1 = M1 (X (K) — Y * *2
      M1 = SQRT (M1/(FLOAT (N) — 1))
      MY = M1/SQRT (FLOAT (N))
      WRITE (3, 23) Y, M1, MY
      STOP
      END
   23 FORMAT (1X, 3F8.3)
```

I.3.17. Алгоритмический язык АЛГОЛ

Алгоритмический язык АЛГОЛ имеет две особенности:

1) строчный характер данных; при вводе и в операциях присвоения вещественные и целые типы переменных не различаются, но описываются так же, как и на ФОРТРАНЕ;

2) синтаксис языка носит рекурсивный характер; он имеет строгую грамматику, которая в своих рамках допускает произвольные конструкции.

АЛГОЛ имеет блочную структуру. Блок — это часть программы, обладающая автономностью. Блоки могут вкладываться один в другой. Блок заключается в так называемые операторные скобки: открывающая скобка *begin*, закрывающая *end*. В начале блока располагаются описания, затем операторы. Описания и операторы отделяются точкой с запятой.

Алфавит АЛГОЛА содержит цифры, латинские малые буквы и ряд символов. Служебные слова на АЛГОЛЕ выделяются подчеркиванием.

Все остальные слова — это либо слова программиста, либо имена функций и подпрограмм, входящих в матобеспечение. На АЛГОЛЕ переменные принимают численные и логические значения. Точность переменных зависит от используемого транслятора.

Числа записывают с десятичной точкой. Для записи числа в форме с плавающей запятой вместо буквы E, принятой в ФОРТРАНЕ, используются символы, записываемые как индекс. Например, 2_{10} 6, $_{10}4$.

В АЛГОЛЕ используются следующие описатели переменных: *integer* (целые), *real* (вещественные), *boolean* (логические). Так же как и на ФОРТРАНЕ, логические переменные могут принимать два значения *true* (истина) и *false* (ложь).

АЛГОЛ допускает задание динамических массивов, т. е. массивов с переменными границами. Индексы переменных заключаются в квадратные скобки, допускается отрицательное значение индекса; например, a [s], a [—4], a [5.2] = a [5], a [5 + 2.1] = a [7].

При описании массива задаются верхние и нижние границы индексов. Если массив динамический, т. е. границы значений индексов задаются с помощью переменных, то численное значение границ должно быть задано до блока, в котором действует данный массив.

Пример. *array* a [1 : 5], b [—5 : 5], c [1 : n]. Данным описанием зарезервировано 5 ячеек памяти для переменной a, 11 — для переменной b и n — для c.

Массивы могут быть целыми, вещественными, логическими. Например, *integer array* k [0 : m]; *real array* d [m : n]; *boolean array* s [1 : 10]; t [m : n + 1].

Если тип переменных не указан, то считают, что данный массив вещественный.

Память под массивы автоматически распределяется в момент передачи управления в блок. После его выполнения память автоматически освобождается и значения элементов массивов утрачиваются.

Аналогом подпрограмм на ФОРТРАНЕ здесь являются процедуры, которые являются частями блоков.

Основные операторы АЛГОЛА. Оператор присваивания имеет вид A: = F, где A — переменная, F — арифметическое или логическое выражение.

Пример. x: = 1; a [2]: = 3.1; s [3]: = *false*; b [m] = b [m + + 1]; n: = a [3] * b [3] + 5;

В арифметических операциях используются следующие знаки: «+», «—», «/», «↑», «*», «×». Знак «↑» используется для возведения в степень. В зависимости от транслятора в качестве знака умножения может быть использован либо «*», либо «×».

Безусловный оператор перехода имеет вид: *go to* m, где m — метка. На АЛГОЛЕ метка является словом, а не числом, в отличие от ФОРТРАНА.

Пример. $m1$: x : = 0; *metka* 2: y [3]: = 3.1; Здесь m 1 и *metka* 2 — метки операторов. Для безусловного перехода на них необходимо записать: *go to* m *1* или *go to metka* 2.

Оператор условного перехода имеет две модификации:

1) *if* z *then* s 1 *else* s 2;

2) *if* z *then* s 1;

Здесь z — некоторое условие, s 1 — любой оператор, кроме условного и оператора цикла, s 2 — оператор. Так как блок является оператором, то s 1 и s 2 могут быть блоками. В качестве условия может стоять любое логическое выражение, состоящее из логических значений, неравенств, равенств, логических переменных и знаков логических операций.

Пример. *if* $x < 0$ *then* $i := -1$ *else if* $x = 0$ *then* $i := 0$ *else* $i := 1$;

Оператор цикла имеет три модификации:

1) с явным списком цикла

for s 1 *do* s 2;

Здесь s 1 — оператор присваивания, который имеет вид: A: = M1, M2, ..., MK, где A — переменная, последовательно принимающая значения M1, M2, ..., MK, которые в свою очередь являются либо числами, либо переменными; s 2 — оператор, в который входит переменная цикла A;

2) с шагом

for s 1 *step* h *until* b *do* s 2;

Здесь s 1 — оператор присваивания, задающий начальное значение переменной цикла; h — шаг изменения переменной цикла; b — ее конечное значение;

3) со списком цикла типа пересчета

for $v = a$ *while* z *do* s 2;

где a — переменная цикла, z — условие выхода из цикла.

Эти три модификации можно комбинировать в одном операторе.

Пример.

1) $s := 0$; *for* $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ *do* $s := s + a[i]$;
2) $s := 0$; *for* $i := 1$ *step* 1 *until* 10 *do* $s := s + a[i]$;
3) $s := 0$; $i := 0$; *for* $i := i + 1$ *entil* $i \leqslant 10$ *do* $s := s + a[i]$;
4) $s : 0$; *for* $i := 1$, $i + 1$ *while* $i \leqslant 10$ *do* $s := s + a[i]$;
5) $s := 0$; *for* $i := 1, 2, i + 1$ *while* $i < 10, 10$ *do* $s := s + a[i]$;

Приведенные пять операторов позволяют получить $\sum_{i=1}^{10} a_i$.

Область действия оператора цикла состоит из одного оператора, который располагается после *do*. Если же необходимо выполнить несколько операторов в цикле, то после *do* записывают блок, в котором может быть произвольное количество разных операторов.

Пример. Переписать массив a в массив b и одновременно обнулить переменные массива a.

for $i := 1$ *step* 1 *until* 10 *do*;

begin $b[i] := a[i]$; $a[i] := 0$, *end*;

Блок обладает автономностью. Описанные в нем величины существуют только в этом блоке или во внутренних по отношению к нему. С помощью оператора *go to* можно выйти из любого места блока, но войти в него можно только через начало.

АЛГОЛ, в зависимости от транслятора, имеет различное управление вводом-выводом. Процедуры на АЛГОЛЕ являются аналогом подпрограмм на ФОРТРАНЕ. Процедура локализуется в блоках. В начале блока помимо описания переменных массивов могут в любом порядке располагаться описания процедур. При выходе из блока процедура утрачивается и остаются только процедуры внешние по отношению к данному блоку. Имеется два типа процедур: процедура-оператор и процедура-функция. Процедура начинается со слова *procedure* и ее имени, после чего в скобках записывается список формальных параметров, а за ними тело процедуры. Формальные параметры могут быть именами простых переменных, массивов, меток, других процедур. Вызов процедуры возможен в блоке, в котором она описана, или во внутренних блоках. При вызове процедуры вместо формальных параметров пишутся фактические.

Пример. Программа вычисления простой арифметической середины и средней квадратической ошибки одного измерения по формулам

$$\bar{x} = [x]/n; \qquad m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Поскольку ввод и вывод данных на АЛГОЛЕ определяется транслятором, то в данной программе эти операторы показаны условно.

begin integer k, n; *real* y, m, my;
Ввод (n);
real array x [1 : n];
Ввод (x);
$y := 0$; *for* $k := 1$ *step* 1 *until* n *do* $y := y - x[k] - x[1]$;
$y := x[1] - y/n$;
$m := 0$; *for* $k := 1$ *step* 1 *until* n *go* $m := m - (x[k] - y) \uparrow 2$;

1.3.18. Алгоритмический язык PL/1

PL/1 — универсальный язык программирования. Он объединяет возможности таких языков, как АЛГОЛ, ФОРТРАН, КОБОЛ. Основной единицей памяти в PL/1 является байт. Два смежных байта, адрес первого из которых делится на два, составляют полуслово. Два полуслова образуют слово.

В языке PL/1 используются 26 букв латинского алфавита — от A до Z, десять цифр, специальные символы: арифметических операций «+», «—», «/», «**»; соотношений «=», «>», «<«; логических операций: « & » — конъюнкции, | — дизъюнкции, «¬» — отрицания; разделителей: «—» — пробел, «·», «,», «:», «;», «—»; «(»,«)», «?», «%».

Существуют сочетания этих символов, за которыми закреплен определенный смысл. Например, «**» — символ возведения в степень; «/*» — операторные скобки комментария; «||» — контетенация, т. е. объединение двух текстов; «> =» не меньше; «< =» не больше; «¬ =» не равно; «— >» символ пересылки.

Типы переменных. Переменные типа FIXED DECIMAL (p, q) — десятичные числа с фиксированной запятой, где p — количество цифр в числе, q — количество цифр после запятой. Внутреннее представление — двоично-десятичное, т. е. каждая десятичная цифра занимает 4 бита. Максимальное количество цифр переменной равно 15.

$m := sqrt\ (m/(n - 1))$;
$my := m/sqrt\ (n)$;
Вывод (y, m, my);
end;

Переменные типа FLOAT DECIMAL (p) — десятичные числа с плавающей запятой ($p \leqslant 16$). В этом случае мантисса записывается как FIXED DECIMAL. После мантиссы записывается буква E, знак порядка и порядок, состоящий из двух десятичных цифр.

Переменные типа FIXED BINARY (p, q) — двоичные числа с фиксированной запятой ($p \leqslant 31$).

FLOAT BINARY (p) — двоичные числа с плавающей запятой ($p \leqslant 53$).

CHARACTER (w) — символьная строка. Каждый символ занимает один байт; w — число символов ($w \leqslant 32676$).

CHARACTER (w) VARYING — литерная строка переменной длины; w — максимально допустимая длина строки.

BIT (w) — битовая строка, состоящая из нулей и единиц; w — число нулей и единиц ($w \leqslant 32676$).

BIT (w) VARYING — битовая строка переменной длины.

Основные операторы языка PL/1. Оператор описания имеет вид: DECLARE $n_1A_1F_1n_2A_2F_2 \ldots nkA_kF_k$, где n_i — номер уровня, задаваемый только при описании структур (в остальных случаях отсутствует); A_i — идентификатор переменной; F_i — атрибуты или описатели переменной. Например, DECLARE A FIXED DECIMAL (7, 2);

Оператор присваивания имеет вид: $a_1, a_2, \ldots, a_n = B$; здесь a_i — имена переменных, B — арифметическое, символьное или логическое выражение. Например, J = (J + B)/2 + J. Оператор перехода имеет вид GO TO x, где x — метка либо переменная типа метки. Переменная типа метки должна быть заранее описана описателем LABEL, т. е. LABEL ($m_1, m_2, \ldots, m_k$). Здесь m_i — метки операторов. (Должны быть перечислены все возможные значения переменной типа метки).

Условный оператор имеет две модификации:

1) IF z THEN $s1$;
2) IF z THEN $s1$ ELSE $s2$.

здесь z — выражение, определяющее условие, при котором должны выполняться операторы $s1$ и $s2$. Например, IF A < 0 THEN C = (A + + C)/2; ELSE C = (A — K)/C.

Оператор цикла имеет три модификации:

1) DO WHILE (A);
2) DO $s = A_1$ TO A_2 BY A_3 WHILE (A_4);
3) DO;

В первом случае перед каждым циклом вычисляется значение выражения A. Если в результате получается битовая строка, состоящая из нулей, то управление передается оператору, следующему за оператором цикла.

Во втором случае A_1 определяет начальное значение переменной цикла, A_2 — конечное, A_3 — шаг. Если шаг равен единице, то BY A_3 может отсутствовать. В операторе может отсутствовать TO A_2. В этом случае выход из цикла осуществляется либо, как в первой модификации, с помощью WHILE (A_4), либо с помощью оператора перехода, стоящего среди операторов цикла; WHILE (A_4) — может отсутствовать. Конструкция A_1 TO A_2 BY A_3 WHILE (A_4) может быть повторена несколько раз, задавая определенное число циклов.

В третьем случае цикл выполняется только один раз.

Сфера действия оператора цикла ограничивается оператором END.

Примеры:

```
1) DO WHILE (A + B > 16);
   (операторы цикла)
   END;
```



```
2) DO K = 2 TO 20 WHILE (C ¬ = X);
   (операторы цикла)
   END;
3) DO Y = 5 TO 30 BY 3.7;
   (операторы цикла)
   END;
4) IF C < D THEN DO;
   (операторы цикла)
   END;
```

Процедуры на PL/1. На PL/1 процедуры имеют тот же смысл, что и на АЛГОЛЕ, но включаются в любую программу, поскольку основная программа тоже является процедурой.

Начинается программа с заголовка главной процедуры:

имя процедуры: PROC OPTIONS (MAIN);

заканчивается программа ключевым словом END, за которым следует имя главной процедуры.

Программа может состоять из некоторого числа отдельно написанных процедур. Процедуры могут вкладываться друг в друга. Различают два типа процедур — процедуры-подпрограммы и процедуры-функции.

В процедурах-функциях описывается имя процедуры, за которым следует список формальных параметров, заключенных в круглые скобки. Затем записываются атрибуты значения функции. Если же их не указать, то они присваиваются по правилам умолчания, действующим для переменных. В результате выполнения процедуры-функции получается только одно значение. Обращение к процедуре-функции происходит по ее имени, за которым в скобках следует список фактических параметров. Значения параметров, соответствующие аргументам, к данному моменту должны быть определены.

Пример.

```
A: PROC OPTIONS (MAIN);
COMBIN: PROC (K, N) FIXED (8)
DCL (J, K, N) FIXED (8);
RES = 1;
DO J = 1 TO K;
RES = RES * (N — J + 1)/J;
END;
END COMBIN;
X = 10; Y = 15;
Z = COMBIN (X, Y);
END A;
```

Здесь имя главной процедуры A, имя процедуры-функции COMBIN.

Возврат в вызывающую процедуру может происходить либо по достижении закрывающейся операторной скобки процедуры END (как показано в предыдущем примере), либо по достижении оператора RETURN (*имя переменной возвращаемого значения*). Возвращаемое значение должно быть простой переменной.

Процедуры-подпрограммы в отличие от процедуры-функции передают в вызывающую программу несколько значений. Вызов процедуры-подпрограммы осуществляется с помощью оператора CALL, за которым следует имя процедуры-подпрограммы и в скобках список фактических параметров. В операторе RETURN выражение в скобках отсутствует.

Пример. Составить процедуру вычисления расстояний между двумя точками в трехмерном пространстве по формуле

$$s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

```
R3: PROC;
DCL (XYZ, X1, Y1, Z1, D3) EXT;
D3 = SQRT ((X — X1) * *2 + (Y — Y1) * *2 + (Z — Z1) * *2);
RETURN;
```

Обращение к подпрограмме осуществляется оператором CALL R3. Здесь EXT (EXTERNAL) означает, что переменные являются теми же самыми, что и в главной процедуре.

Объявление имен переменных. Сфера действия имен. Идентификатор может быть описан тремя способами: явно, неявно и контекстуально.

Идентификатор описан явно, если он дан в операторе описания, или является меткой какого-либо оператора, или входит в список формальных параметров процедуры. Сфера действия явного описания определяется следующим образом: описание действует в процедуре, в которой оно содержится, и во всех внутренних процедурах, если в них нет своего явного описания. Иногда смысл описания имен следует из контекста. Например, если в операторе цикла идентификатор стоит левее знака равенства, то это — имя простой переменной. Неявное описание идентификаторов действует по первой букве имени по аналогии с ФОРТРАНОМ. Сфера действия имени может быть объявлена явно операторами EXTERNAL (для внешних имен) и INTERNAL (внутренних имен).

Обмен данных потоком. При обмене данных потоком анализируется каждый символ. Существуют два оператора: GET — для ввода данных и PUT — для вывода данных. Эти операторы могут сочетаться с одним из следующих трех: LIST (*список*), DATA (*данные*), EDIT (*редактирование*). Поток представляет собой последовательность символов, отделенных друг от друга пробелами.

Пример.

```
DCL (A, B) FIXED (3, 1);
C (2, 3)  CHAR (3);
GET LIST (A, B, C);
```

Здесь C — символьный массив; A, B — числовые переменные.

При вводе, управляемом редактированием, используются описатели форматов: F (p, q, r) — для переменных FIXED DECIMAL (p — количество символов данного числа, q — количество символов после запятой, r — масштабный множитель); E (p, z) — для переменных FLOAT DECIMAL (z — количество значащих символов); A (w) — для литерных строк (w — число символов); B (w) — для битовых строк; PAGE — переход на новую страницу; SKIP (w) — пропуск w строк; LINE (w) — печать с w строки страницы; COLUMN (s) — печать с s-й колонки; X (s) — печать через s пробелов от предыдущей печати; R (M) — удаленный формат (M — метка).

Пример.

```
DCL M LABEL;
DCL CODE CHAR (3);
M 1: GET EDIT (CODE) (A (3));
IF CODE = 'A01' THEN M = MET1;
ELSE IF CODE = 'BMM' THEN M = MET2;
ELSE GO TO M1;
GET EDIT (A, B) (R (M));
GO TO M1;
MET1: FORMAT (F (3), A (8));
MET2: FORMAT (E (6, 1), B (1));
```

В зависимости от значения метки M, с помощью GET EDIT ввод осуществляется с различными спецификациями.

I.3.19. Алгоритмический язык БЭЙСИК

Алгоритмический язык БЭЙСИК предназначен для диалоговых систем. По своей структуре БЭЙСИК близок к ФОРТРАНУ. Алфавит БЭЙСИК включает следующие символы: 26 заглавных латинских букв — от A до Z; десятичные цифры от 0 до 9; три специальных знака, используемых как буквы «¤» — денежный знак, «@» — коммерческий знак ЭТ, «#» — знак номера; операции отношения «=», «≠», «>», «≥», «<», «≤»; знаки арифметических операций: «+», «—», «*» — умножение, «/», «↑» возведение в степень; скобки — ( ); специальные символы: ␣ (пробел), ' (апостроф), · (точка), , (запятая), ; (точка с запятой), ?, | (разделительный знак), !, :, » (кавычки).

Программа на БЭЙСИКЕ представляет собой последовательность операторов, каждый из которых занимает одну строку. Каждый оператор начинается с метки — целого числа в диапазоне от 1 до 99999. За меткой располагаются имя оператора и его текст.

Язык БЭЙСИК допускает представление данных в виде числовых констант, арифметических переменных с плавающей запятой (для отделения целой части числа от дробной используется точка) и типа строка знаков, т. е. последовательности символов (не более 18), заключенных в апострофы. Переменные могут быть объединены в наборы данных. Идентификатор числовой переменной состоит из буквы или из буквы с цифрой. Например, A3, #9, B. Идентификатор переменной типа строка состоит из буквы и символа ¤, например: C¤, N¤, ¤¤.

Допустимы числовые переменные с одним и двумя индексами и переменные типа строка с одним индексом. Индексы лежат в пределах от 1. до 255 и записываются в круглых скобках, например: A (50); # (240); B (J, I); C¤ (4); L (2, 3).

Операторы БЭЙСИКА. Оператор описания массивов имеет вид DIM *имя массива* (*границы*), *имя массива* (*границы*), ... Границы не должны превосходить 255. Например, 15 DIM B (100, 100), A¤ (10). Описание массива можно сделать, записав отдельный элемент массива. При этом границам присваивается значение 10. Таким образом можно описать одномерные массивы размером 10 элементов и двумерные, размером 10×10. Например, C (2, 8) = 50.

Оператор присваивания имеет вид: LET *идентификатор*, *идентификатор*, ... = *выражение*. Здесь под идентификатором понимают либо переменную, либо элемент массива. Ключевое слово LET можно опускать.

Пример. 10 LET B1 = 412

30 C¤' = ИВАНОВ'

40 B¤ = L¤

Оператор DATA служит для последующего присвоения значений переменным и имеет вид: DATA *данное, данное, ...*

Данные, записанные в операторе DATA, присваиваются переменным, записанным в операторе READ, который имеет вид: READ *переменная, переменная, ...*

Пример. 5 READ A, B, C, D

10 DATA 5, 2, 10, 0

Здесь переменным A, B, C, D присваиваются соответственно значения 5, 2, 10, 0. Если в программе имеется несколько операторов DATA, то они рассматриваются как объединенный оператор DATA.

Операторы READ задаются независимо от места расположения оператора DATA. Если число данных меньше числа переменных, производится аварийный останов программы. Блок данных можно использовать повторно, если задать оператор RESTORE. Он имеет вид: RESTORE *комментарий*.

Оператор безусловной передачи управления имеет две модификации: 1) GO TO N, где N — номер оператора, которому передается управление; 2) GO TO N_1, N_2, ..., N_k ON — *арифметическое выражение*. Здесь N_1, N_2, ..., N_k — номера операторов. Управление передается оператору, номер которого совпадает с целой частью арифметического выражения.

Примеры. 10 GO TO 50

50 LET A = 10

60 LET B = 30

90 GO TO 10, 20, 50 ON A*6

Оператор условной передачи управления имеет вид: IF *арифметическое или символьное выражение* THEN GO TO N, где N — номер оператора, которому передается управление в случае выполнения условия. Если условие не выполняется, управление передается оператору, следующему за оператором IF.

Пример. 30 IF I < 0 GO TO 100

40 IF B¤ < D¤ THEN 130

Оператор цикла имеет вид: FOR *переменная = начальное значение* TO *конечное значение* STEP *шаг*.

Пример. 50 FOR K = 2 TO 10 STEP 2

Момент выхода из цикла в данном случае определяется величиной K, которая изменяется в пределах от 2 до 10 с шагом 2. При достижении значения, превышающего 10, управление будет передано за тело цикла. Тело цикла ограничивается оператором NEXT. Он имеет вид: NEXT *переменная*. Здесь участвует та же переменная, что и в операторе FOR.

Пример. 10 LET B = 0

20 FOR J = 1 TO 10

30 B = B + A (J)

40 NEXT J

Если шаг в цикле не задан, то его значение принимается равным единице.

Оператор PAUSE служит для задержки выполнения программы и имеет вид: PAUSE *комментарий*. Для продолжения выполнения программы вводится пустая строка.

Оператор STOP предназначен для прекращения выполнения программы. Его вид: STOP *комментарий*. Оператор рекомендуется использовать в случае ошибочной ситуации.

Оператор END з вершает выполнение программы и имеет вид: END *комментарий*.

Оператор INPUT служит для ввода данных и имеет вид: INPUT *идентификатор, идентификатор, ...*

Оператор PRINT предназначен для вывода данных на печать. Он имеет вид: PRINT *данное, разделитель, данное, разделитель, ...* . В качестве разделителей используются точка и точка с запятой. Оператор вывода данных по формату аналогичен выводу данных на языке PL/1 с форматом PICTURE. Он имеет вид: PRINT USING N, *данное, данное, ...*, где N — номер оператора формата, по которому выводятся на печать данные.

Оператор формата имеет вид: *текст, элемент формата, текст, элемент формата, ...* Текст в операторе может отсутствовать. В качестве элементов формата используются символы: «+» или «—» для вывода знака арифметического данного; # — для вывода одного символа выводимого значения; . — указывает местоположение десятичной точки при выводе числа; !!!! — указывает позицию буквы E при выводе числа с плавающей запятой.

Пример. 10 PRINT USING 70, 'АБСЦИССА', 340.75

70 КООРДИНАТА####.####+###.##

На печать выведется: координата абсцисса +340.75.

На БЭЙСИКЕ наборы данных организуются в виде файлов. Каждому файлу присваивается имя, состоящее не более чем из трех символов первый из которых — буква. В файлы могут записываться числовые переменные типа строка знаков.

Для записи значений в файл применяется оператор PUT. Он имеет вид: PUT *'имя файла', данное, данное, ...* . Значения указанных данных последовательно записываются в файл. При повторном использовании оператора PUT данные в файл записываются после имеющейся в нем информации. Для записи же в файл с самого начала используют оператор RESET. Он имеет вид: RESET *имя файла, имя файла, ...*

Пример. 10 PUT 'ПУНКТ', C2, A*D + 4,5

Оператор GET служит для записи данных из файла в память. Он имеет вид: GET *'имя файла', переменная, переменная, ...* . Для закрытия файла используется оператор CLOSE. Общий вид его следующий: CLOSE *'имя файла', 'имя файла', ...* .

На БЭЙСИКЕ предусмотрена возможность оперирования с нестандартными функциями. Для задания таких функций пользуются оператором DEF. Он имеет вид: DEF FNS (*параметр*) = *арифметическое выражение*. Здесь FN — признак функции; S — любой буквенный символ, определяющий имя нестандартной функции.

Таким образом, в программе может быть 29 нестандартных функций. Пользование такого рода функциями аналогично подпрограммам-функциям в ФОРТРАНЕ.

Пример. 10 DEF FNL (X, Y) = SQR (X ↑ 2 + Y ↑ 2)

40 B = FNL (A, Z) * SIN (C)/SIN (D)

Здесь X, Y — формальные параметры; A, Z — фактические параметры. При выполнении 40-го оператора по имени функции FNL будет вычислено расстояние $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, а затем решен треугольник $b = s \times \times \sin c / \sin D$.

Оператор COSUB используется для обращения к подпрограммам. Он имеет вид: COSUB N, где N — метка первого оператора подпрограммы. Для выхода из подпрограммы предназначен оператор: RETURN *комментарий*. Он передает управление оператору, следующему за оператором COSUB.

БЭЙСИК имеет операторы, предназначенные для работы с числовыми массивами и матрицами.

Для присвоения всем элементам заданного массива нулевых значений используется оператор MAT *имя* = ZER (*границы*), где имя — идентификатор массива.

Пример. 40 MAT A = ZER (10)

50 MAT B = ZER 5, 6)

Аналогичный вид имеет оператор присваивания массиву единичных значений. Он отличается от данного оператора ключевым словом CON вместо ZER. Для присваивания массиву значений единичной матрицы необходимо написать слово IDN.

Пример. 10 DIM (9, 1, 2)

70 MAT X = IDN (4, 4)

Элементам матрицы по оператору MAT READ можно присваивать значения построчно из блока данных, описанных оператором DATA. Оператор имеет вид: MAT READ *имя* (*границы*), *имя* (*границы*), ...

Пример. 10 DIM A (2, 3), B (5)

20 MAT READ A, B (3)

30 DATA 4, 12, 23, 14, —2, —3, 1, 2, 3

Массивы можно складывать, вычитать, умножать на число, перемножать по правилам перемножения матриц, присваивать элементы одного массива другому.

Пример. 10 DIM A (2, 3), B (2, 3), C (2, 3)

30 MAT C = A

40 MAT B = A + C

50 MAT A = (5) * B

60 MAT C = A * B

Матрицы на БЭЙСИКЕ можно транспонировать и обращать.

Пример. 20 MAT A = TRN (B)

30 MAT C = INV (A)

Кроме того, существует ряд операторов для ввода и вывода массивов. Оператор ввода массивов имеет вид: MAT INPUT *имя* (*границы*), *имя* (*границы*), ...; операторы вывода: MAT PRINT *имя*, *разделитель*, *имя*, *разделитель*, ...; MAT PRINT USING N, *имя*, *имя*, ...
Здесь N — номер оператора формата, по которому производится вывод данных.

Для ввода массива в память машины из файла используется оператор MAT GET *'имя файла'*, *имя* (*границы*), *имя* (*границы*), ... Для вывода элементов массива из памяти в файл: MAT PUT *'имя файла'*, *имя*, *имя*, ...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнберг В. Д., Геронимус Ю. В.* Основы программирования для Единой системы ЭВМ. М., Машиностроение, 1980.
2. *Бухтияров А. М., Фролов Г. Д., Олюнин В. Ю.* Сборник задач по программированию на языке ПЛ-1. М., Наука, 1978.
3. *Кетков Ю. Л., Максимов В. С., Рябов А. Н.* Введение в системное программирование на языке ассемблера. М., Наука, 1982.
4. *Кетков Ю. Л.* Программирование на БЭЙСИКе. М., Статистика, 1978.
5. *Ларченко Е. Г.* Вычислительная техника и экономико-математические методы в землеустройстве. М., Недра, 1973.
6. *Маркузе Ю. И., Голубев В. В.* Техника вычислений в геодезии. М., Недра, 1980.

РАЗДЕЛ II
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

II.1. ТЕОРИЯ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И ГРАВИМЕТРИЯ

Б. П. Шимбирев

А. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

II.1.1. Сила тяжести

Гравиметрия, как это следует из ее дословного перевода (латинское — *gravitas* — тяжелый, греческое — μετρεω — измеряю), может быть определена как наука об измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли. Однако ее действительное содержание значительно шире. Она включает вопросы использования данных измерений для определения фигуры Земли и ее внутреннего строения, а также для изучения геологического строения земной коры.

В настоящее время гравиметрические методы нашли широкое применение при изучении космических тел (Луны и планет). Под гравитационным полем Земли понимается поле силы тяжести, которая определяется как составляющая двух сил: силы притяжения (тяготения) Земли и центробежной силы, вызванной ее суточным вращением. Она измеряется ускорением $\bar{g}$, сообщаемым ею свободно падающему телу.

Единицей ускорения силы тяжести в Международной системе единиц СИ является метр на секунду в квадрате ($м \cdot с^{-2}$). В гравиметрии широко применяется единица, называемая г а л о м (1 Гал = 1 $см \cdot с^{-2}$ = 0,01 $м \cdot с^{-2}$).

Поскольку сила тяжести для единичной массы численно равна ускорению силы тяжести, то обычно под силой тяжести понимается ее ускорение $\bar{g}$.

Если ускорение силы притяжения обозначить $\bar{F}$, а ускорение центробежной силы $\bar{K}$, то получим

$$\bar{g} = \bar{F} + \bar{K}. \qquad (II.1.1)$$

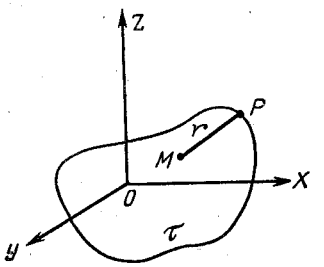
При этом будем полагать, что Земля вращается с постоянной угловой скоростью ω около неизменной оси как абсолютно твердое тело. При таком определении силу тяжести следует считать в каждой точке Земли величиной постоянной, не меняющейся с течением времени. Однако в действительности дело обстоит значительно сложнее. Земля не является абсолютно твердым телом, она испытывает приливные возмущения, в ней происходят физические процессы, скорость вращения и положение мгновенной оси вращения в теле Земли не остаются неизменными, меняется также с течением времени и положение небесных светил относительно центра инерции Земли. Все эти факторы влияют на значение силы тяжести на Земле, и с величиной этих влияний в настоящее время приходится считаться. Поэтому в измеренное значение

силы тяжести следует вводить соответствующие поправки, учитывающие перечисленные выше влияния. Обычный способ представления вектора в прямоугольных координатах состоит в использовании трех единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, и $\bar{k}$, которые направлены вдоль осей x, y, и z соответственно (рис. 29). Формулу (II.1.1) представим в виде

$$\bar{g} = g_x\bar{i} + g_y\bar{j} + g_z\bar{k},$$

где g_x, g_y и g_z — проекции ускорения $\bar{g}$ на оси координат. Величина ускорения g получается как

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}, \qquad (II.1.2)$$



Р и с. 29. Система прямоугольных координат

направление вектора $\bar{g}$ определяется через направляющие косинусы по следующим формулам:

$$\cos(g, x) = g_x/g;$$
$$\cos(g, y) = g_y/g; \qquad (II.1.3)$$
$$\cos(g, z) = g_z/g.$$

Проекции силы тяжести на оси координат g_x, g_y, g_z можно получить, если воспользоваться теоремой: проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих. Тогда на основании формулы (II.1.1) получим:

$$g_x = F_x + K_x,$$
$$g_y = F_y + K_y,$$
$$g_z = F_z + K_z.$$

Проекции силы притяжения:

$$F_x = -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, x);$$
$$F_y = -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, y); \qquad (II.1.4)$$
$$F_z = -f\int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2}\cos(r, z),$$

где $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3 кг^{-1} с^{-2}$ — гравитационная постоянная; δ — объемная плотность в текущей точке M; $d\tau$ — элемент объема; r — расстояние между текущей точкой M и точкой P, в которой определяется сила тяжести; x, y, z — прямоугольные координаты точки P; τ — объем Земли.

Следует указать, что величины F_x и F_y — горизонтальные составляющие силы притяжения — необходимо знать для определения составляющих уклонения отвеса, вызванных притяжением топографических масс, тогда как F_z — вертикальная составляющая — необходима для введения поправки за притяжение топографических масс в измеренное значение силы тяжести g.

Проекции центробежной силы определяются формулами:

$$K_x = \omega^2 x; \qquad K_y = \omega^2 y; \qquad K_z = 0. \qquad \text{(II.1.5)}$$

Вследствие неравномерного распределения масс в теле Земли сила тяжести изменяется на ее поверхности по очень сложному закону. Наибольшего значения она достигает на полюсе — около 9,83 м·с$^{-2}$ на уровне моря, а на экваторе на уровне моря равна 9,78 м·с$^{-2}$. Увеличение силы тяжести на полюсе объясняется двумя причинами: во-первых, на полюсе центробежная сила равна нулю, во-вторых, точка полюса находится ближе, чем точка экватора, к центру масс Земли вследствие ее сжатия. Центробежная сила увеличивается от полюса к экватору, где она достигает 0,034 м·с$^{-2}$.

Сила тяжести в любой точке Земли изменяется в зависимости от положения небесных тел, мгновенной оси вращения в теле Земли, от изменения скорости вращения Земли, а также перемещения масс Земли и атмосферы и деформации поверхности Земли. Различают вековые, периодические и непериодические изменения силы тяжести. Причиной вековых изменений могут быть изменения гравитационной постоянной и замедление вращения Земли. Они вызывают очень небольшие изменения силы тяжести и экспериментально не обнаружены. Среди периодических главными являются приливные изменения, вызванные влиянием Луны и Солнца, достигающие $2 \cdot 10^{-6}$ м·с$^{-2}$. Непериодические изменения гравитационного поля вызываются природными явлениями (вулканическая деятельность, землетрясения, перемещения воздушных масс и др.) и деятельностью человека (создание крупных инженерных сооружений, горные выработки и др.). По величине эти изменения являются наибольшими и могут достигать 10^{-5} м/с^2. Однако непериодические изменения всегда носят локальный характер и вызывают в целом для Земли незначительные деформации гравитационного поля.

II.1.2. Потенциал силы тяжести

Изучение гравитационного поля Земли значительно упрощается, если воспользоваться понятием потенциальной функции, или просто — потенциала. Потенциалом называется функция, частные производные которой по осям координат равны проекциям действующей силы на соответствующие оси.

Следовательно, если через W обозначить потенциал силы тяжести, то проекции силы тяжести на оси координат будут связаны с потенциалом W следующими соотношениями:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}; \qquad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}; \qquad g_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \qquad \text{(II.1.6)}$$

Потенциал силы тяжести равен сумме потенциалов силы притяжения V и центробежной силы Q:

$$W = V + Q. \qquad \text{(II.1.7)}$$

Потенциал силы притяжения вычисляется по формуле

$$V = f \int_\tau \frac{\delta \, d\tau}{r},$$

а потенциал центробежной силы — по формуле

$$Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Дифференциал потенциала силы тяжести при перемещении единичной массы на бесконечно малый отрезок ds:

$$dW = g \cos(g, s)\, ds, \qquad \text{(II.1.8)}$$

где s — направление перемещения единичной массы, а угол (g, s) — дополнение зенитного расстояния до 180°:

Полученная формула (II.1.8) позволяет получить проекцию силы тяжести g_s на любое произвольное направление s.

В самом деле, поскольку $g \cos(g, s) = g_s$, имеем $g_s = \frac{dW}{ds}$.

Формула (II.1.8) показывает также, что дифференциал потенциала равен работе, которая производится силой тяжести при бесконечно малом перемещении единичной массы. Следовательно, работа, которую совершает сила тяжести g при перемещении единичной массы между точками A и B, находящимися на конечном расстоянии, равна разности потенциалов в этих точках:

$$W_B - W_A = \int_A^B g \cos(g, s)\, ds. \qquad \text{(II.1.9)}$$

Потенциал силы тяжести является функцией ограниченной и непрерывной. Он имеет три первые производные $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$, которые являются также непрерывными функциями. Физический их смысл ясен из формул (II.1.6) — они являются проекциями силы тяжести на оси координат.

Потенциал силы тяжести имеет шесть вторых производных: $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z}$.

Поясним физический смысл вторых производных потенциала $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z}$. Возьмем начало прямоугольных координат в точке M, находящейся на земной поверхности. Ось z направим по отвесной линии внутрь Земли, а оси x и y — на север и восток соответственно. Тогда очевидно, что $\frac{\partial W}{\partial z} = g$.

Представим вторую производную $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ следующим образом:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Отсюда видно, что эта производная представляет собой вертикальный градиент силы тяжести.

Переписав аналогичным образом производные

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \frac{\partial g}{\partial y},$$

убеждаемся в том, что они характеризуют изменение силы тяжести в горизонтальной плоскости: первая — в направлении меридиана, вторая — в направлении первого вертикала. Они получили наименование горизонтальных градиентов силы тяжести.

Полным горизонтальным градиентом называется геометрическая сумма векторов $\frac{\overline{\partial g}}{\partial x}$ и $\frac{\overline{\partial g}}{\partial y}$, т. е. вектор $\frac{\overline{\partial g}}{\partial s}$, указывающий направление, в котором сила тяжести возрастает (или убывает) быстрее всего. Величина его определяется по формуле

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\right)^2},$$

а угол с осью x, т. е. азимут, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}}{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}}.$$

На основании формулы (II.1.7) получаем

$$\Delta W = \Delta V + \Delta Q,$$

где символом Δ, называемым оператором Лапласа, обозначена сумма вторых частных производных. Во внешнем пространстве потенциал притяжения является гармонической функцией и потому $\Delta V = 0$, во внутреннем пространстве $\Delta V = -4\pi f\delta$. Потенциал центробежной силы удовлетворяет уравнению $\Delta Q = 2\omega^2$. На основании вышеизложенного полагаем, что потенциал силы тяжести во внешнем пространстве относительно объема τ удовлетворяет уравнению

$$\Delta W = 2\omega^2, \qquad \text{(II.1.10)}$$

и во внутреннем пространстве

$$\Delta W = -4\pi f\delta + 2\omega^2. \qquad \text{(II.1.11)}$$

Поскольку вторые производные потенциала связаны с плотностью [формула (II.1.11)], можно сделать вывод, что вторые производные W (или по крайней мере одна из них) испытывают разрыв на земной поверхности и внутри Земли там, где плотность притягивающих масс δ меняется скачком.

Потенциал силы тяжести полностью характеризует гравитационное поле Земли, поскольку всегда, в случае необходимости, по формулам (II.1.6) можно вычислить составляющие силы тяжести g_x, g_y, g_z, а, зная их, по формулам (II.1.2) и (II.1.3) — величину силы тяжести g и ее направление в пространстве.

II.1.3. Силовые линии, уровенные поверхности

Важной характеристикой гравитационного поля Земли являются силовые линии и уровенные поверхности. С и л о в ы м и, или о т в е с н ы м и, линиями поля силы тяжести называются такие, касательные к которым во всех точках совпадают с направлением вектора силы тяжести. Силовые линии выражаются всюду непрерывными функциями; непрерывно меняются и направления касательных к силовым линиям. Вектор кривизны силовой линии определяется по формуле

$$\frac{\bar{\nu}}{\rho} = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\,\bar{i} + \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\,\bar{j}\right), \qquad \text{(II.1.12)}$$

где $\bar{\nu}$ — единичный вектор главной нормали кривой, ρ — радиус кривизны силовой линии.

Из формулы (II.1.12) следует вывод: при пересечении силовой линией масс с различными плотностями ее вектор кривизны будет меняться скачком. Однако вне масс вторые производные потенциала W непрерывны, а поэтому и силовые линии вне масс изменяют свою кривизну непрерывно.

Подчеркнем, что вторые производные потенциала силы тяжести $\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}$ позволяют определить кривизну силовой линии.

У р о в е н н о й п о в е р х н о с т ь ю называется поверхность, на которой потенциал сохраняет постоянное значение. Уравнение уровенной поверхности потенциала силы тяжести имеет вид

$$W(x, y, z) = \text{const}. \qquad \text{(II.1.13)}$$

Придавая различные значения постоянной, будем получать различные уровенные поверхности. В зависимости от величины постоянной уровенные поверхности могут проходить вне Земли, пересекать ее поверхность или же находиться внутри Земли. В каждой точке уровенной поверхности сила тяжести направлена по нормали к ней.

Если единичная масса перемещается вдоль уровенной поверхности ортогонально направлению силы тяжести, то в этом случае угол (g, s) всегда будет равен 90°. Тогда на основании формулы (II.1.8) получаем $dW = 0$, т. е. при движении по уровенной поверхности работа не совершается.

Поверхность воды в спокойном состоянии, находящаяся под действием только силы тяжести, совпадает с одной из уровенных поверхностей. Уровенные поверхности являются поверхностями равновесия, поскольку слагающая силы тяжести по касательной к уровенной поверхности в любой точке равна нулю.

Определение положения уровенных поверхностей потенциала силы тяжести имеет важное значение в научных исследованиях и при решении практических задач. Например, горизонтали на топографических картах в первом приближении представляют собой линии пересечения таких поверхностей с физической поверхностью Земли. Важнейшую роль играет п о в е р х н о с т ь г е о и д а, т. е. уровенная поверхность потенциала силы тяжести, проходящая через начало отсчета высот. Эта поверхность близка к невозмущенному среднему уровню океанов и сообщающихся с ним морей. По некоторым оценкам, отклонение среднего уровня моря от геоида в открытых частях Мирового океана может достигать 1 м. Эти отклонения объясняются различием температуры и солености воды в различных частях Мирового океана.

Из непрерывности потенциала силы тяжести следует, что уровенные поверхности, как проходящие вне масс, так и пересекающие земную поверхность или находящиеся внутри Земли, не имеют никаких разрывов. Наклон касательной плоскости при перемещении точки касания по уровенной поверхности также меняется непрерывно.

Однако кривизна уровенной поверхности, пересекающей слои различной плотности, будет меняться скачком там, где меняется скачком плотность. Это обусловлено тем, что кривизна уровенной поверхности определяется вторыми производными потенциала:

$$-\frac{g}{\rho} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\cos^2 A + \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\sin 2A + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\sin^2 A, \qquad \text{(II.1.14)}$$

где ρ — радиус кривизны нормального сечения уровенной поверхности, A — угол, образуемый плоскостью нормального сечения с осью x (т. е. азимут).

Следовательно, кривизна геоида в тех местах, где он пересекает материковые массы, изменяется скачком, и поэтому всякое продолжение аналитическими методами поверхности геоида внутрь притягивающих масс не будет соответствовать действительному положению геоида. Отсюда вытекает принципиальная невозможность определения положения геоида, проходящего под материками, без знания закона распределения плотностей в земной коре. Это заставило перейти к определению фигуры квазигеоида — поверхности, однозначно определяемой по наземным измерениям, совпадающей с геоидом на морях и океанах и очень близко подходящей к нему на суше (так в равнинных районах отступления геоида от квазигеоида по высоте составляют всего несколько сантиметров и только в горах в аномальных районах могут достигать 2—3 м).

Вторые производные $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, как это следует из формулы (II.1.14), характеризуют кривизну нормального сечения уровенной поверхности в произвольном азимуте. В частном случае, приняв в (II.1.14) $A = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{g}{\rho_x},$$

т. е. производная $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ характеризует кривизну меридианного сечения, а при $A = \pi/2$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{g}{\rho_y},$$

что характеризует кривизну сечения уровенной поверхности в плоскости первого вертикала.

II.1.4. Вертикальный градиент силы тяжести

Приведем формулу для вычисления вертикального градиента силы тяжести, которой можно пользоваться в тех случаях, когда кривизны нормальных сечений уровенной поверхности $1/\rho_x$ и $1/\rho_y$ известны.

Подставив в (II.1.11) значения производных $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, полученные выше, найдем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2 + g\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{1}{\rho_y}\right) - 4\pi f\delta. \qquad \text{(II.1.15)}$$

Полученная формула показывает зависимость вертикального градиента силы тяжести от плотности. Отсюда следует, что редуцирование силы тяжести внутри притягивающих масс невозможно выполнить точно без детального знания закона распределения плотностей. Напротив, во внешнем пространстве, где притягивающие массы отсутствуют ($\delta = 0$), редуцирование силы тяжести возможно.

II.1.5. Разность потенциалов. Ортометрическая высота

Для определения разности потенциалов силы тяжести относительно начала отсчета высот (в СССР таким началом является нульпункт Кронштадтского футштока) используются результаты геометрического нивелирования.

Поскольку при геометрическом нивелировании измеряются не наклонные отрезки ds земной поверхности, а отрезки нормали dn между уровенными поверхностями потенциала силы тяжести (рис. 30), получаемые как разности отсчетов dh по рейкам ($dn = dh$), то, используя соотношение

$$dn = -ds\cos(g, s),$$

приведем формулу (II.1.8) к виду

$$dW = -g\,dn = -g\,dh. \qquad \text{(II.1.16)}$$

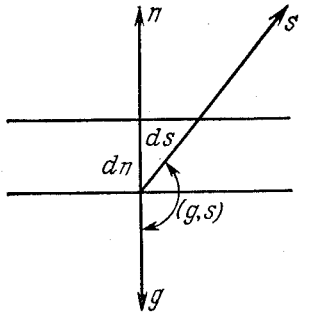


Рис. 30. Превышение между уровенными поверхностями

Интегрируя по ходу нивелирования от исходного пункта нивелирования — футштока O до репера M, получим формулу для вычисления разности потенциалов силы тяжести между этими точками:

$$W_M - W_O = -\int_O^M g\,dh. \qquad \text{(II.1.17)}$$

Эта разность получила название геопотенциальной величины. Она входит составным членом в определение высоты в любой системе, дающей однозначный результат.

Интеграл $\int_O^M g\,dh$ может быть точно вычислен. Для этого нужно, чтобы между футштоком O и пунктом M был проложен нивелирный ход, который даст возможность получить величины нивелирных превышений, и чтобы в точках этого хода были измерены значения силы тяжести g.

Из (II.1.16) следует, что

$$g = -\frac{dW}{dn}, \qquad \text{(II.1.18)}$$

т. е. сила тяжести есть производная от потенциала, взятая по направлению внешней нормали к уровенной поверхности силы тяжести. Расстояние между близкими уровенными поверхностями обратно пропорционально величине силы тяжести в данной точке.

Действительно, из (II.1.16)

$$dn = -\frac{dW}{g}. \qquad \text{(II.1.19)}$$

Так как сила тяжести на уровенной поверхности непостоянна, то и расстояние между двумя уровенными поверхностями в разных местах различно. Поскольку сила тяжести увеличивается от экватора к полюсам, то в направлении полюсов уровенные поверхности сближаются, а в направлении экватора расходятся. Именно вследствие непараллельности уровенных поверхностей силы тяжести сумма превышений между двумя точками земной поверхности не определяется однозначно, она зависит от направления, по которому проложен нивелирный ход.

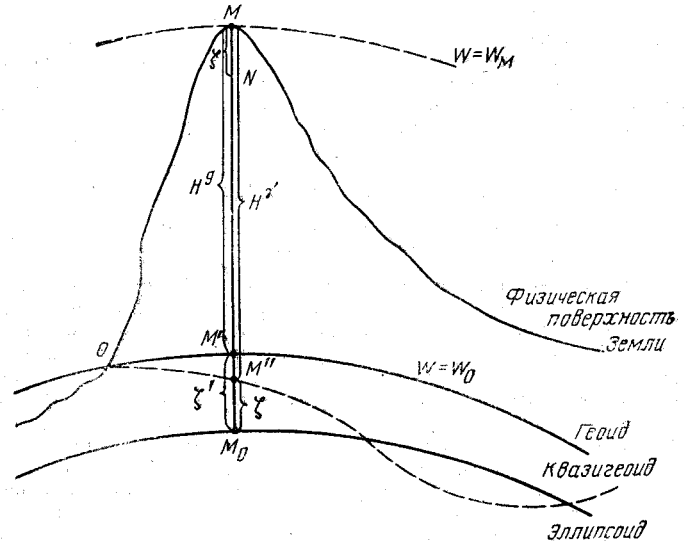


Рис. 31. Системы высот

Для однозначного, независимого от направления трассы нивелирования, определения высот пунктов используют ортометрическую систему высот.

Ортометрической высотой называется высота точки земной поверхности над поверхностью геоида, отсчитанная по силовой линии поля силы тяжести. Ортометрическая высота пункта M равна отрезку силовой линии MM' (рис. 31). Заметим, что отрезок силовой линии можно принять за отрезок нормали к уровенной поверхности $W = W_0$ (т. е. к геоиду), поскольку разница между этими отрезками даже при высотах порядка 10 км составляет менее 0,01 мм.

Для определения конечной величины отрезка силовой линии $MM' = H^g$, заключенного между двумя уровенными поверхностями силы тяжести $W = W_0$ и $W = W_M$, проинтегрируем выражение (II.1.16) вдоль силовой линии MM':

$$W_M - W_0 = -\int_{M'}^{M} g\,dh = -g_m \int_{M'}^{M} dh = -g_m H^g.$$

Отсюда

$$H^g = \frac{W_0 - W_M}{g_m}, \qquad \text{(II.1.20)}$$

где g_m — среднее значение силы тяжести на отрезке MM'. Индекс g над H означает, что для определения ортометрической высоты требуется знать среднее значение действительной силы тяжести на отрезке MM'.

Формулу (II.1.20) можно написать иначе:

$$H^g = \frac{1}{g_m} \int_0^M g\,dh.$$

Так как непосредственных измерений силы тяжести вдоль линии MM', проходящей внутри земной коры, как правило, не производится, то для определения величины g_m приходится использовать данные о строении верхних слоев Земли, которые в большинстве случаев точно неизвестны. Приходится прибегать к различного рода гипотезам о распределении плотностей в земной коре.

Б. НОРМАЛЬНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

II.1.6. Нормальный потенциал Земли, нормальная сила тяжести

Сложная структура гравитационного поля Земли, определяемая неправильностью ее формы и неравномерным распределением масс в ее недрах, обуславливает значительные трудности при определении потенциала силы тяжести W. Проблема определения потенциала W может быть значительно облегчена, если построить модель гравитационного поля Земли, близкую к ее действительному гравитационному полю. За такую модель можно принять гравитационное поле уровенного эллипсоида вращения, т. е. эллипсоида, внешняя поверхность которого является уровенной поверхностью силы тяжести и в каждой точке которого сила тяжести направлена по нормали. Модель гравитационного поля принято называть нормальным гравитационным полем, а потенциал этого поля — нормальным потенциалом U.

Нормальное поле значительно проще действительного поля Земли; его уровенные поверхности и силовые линии могут быть использованы как координатные при определении положения точек физической поверхности Земли. Нормальное поле представляется как поле идеального физического тела, заменяющего реальную Землю и называемого нормальной Землей.

Построение нормального поля позволяет выделить из действительного гравитационного поля Земли его основную часть и рассматривать не полные элементы поля, а малые разности соответствующих элементов действительного и нормального полей. В этом случае задача определения фигуры Земли заключается в изучении отклонений ее физической поверхности от поверхности «модели» (называемой иначе фигурой сравнения), а задача определения потенциала W сводится к определению небольших величин $T = W - U$. Величина T получила название возмущающего потенциала Земли. Очевидно, что между величинами T и отклонениями физической поверхности Земли от фигуры сравнения должна существовать определенная связь, используя которую можно определить эти отклонения.

Определение нормального потенциала возможно на основании теории, разработанной английским ученым Стоксом. В ее основе лежит теорема, которая формируется следующим образом: если известна общая масса планеты, угловая скорость ее вращения и форма внешней уровенной поверхности потенциала силы тяжести, целиком охватывающей все притягивающие массы, то потенциал силы тяжести и сама сила тяжести определяются однозначно как во всем внешнем пространстве, так и на самой уровенной поверхности. Теорема Стокса замечательна тем, что она освобождает от необходимости знать закон распределения плотностей внутри притягивающих масс при определении внешнего потенциала. Определение потенциала силы тяжести по данным теоремы Стокса составляет проблему Стокса.

Проблема Стокса для уровенного эллипсоида вращения может быть сформулирована следующим образом: известны его общая масса M_0,

угловая скорость вращения ω и большая a и малая b полуоси (обычно вместо малой полуоси задается параметр α — сжатие эллипсоида), определению подлежат потенциал U_0 этого эллипсоида и сила тяжести γ_0, называемая нормальной силой тяжести, как во всем внешнем пространстве, так и на поверхности эллипсоида.

Значение нормального потенциала U_0 (с точностью до малых величин второго порядка) на поверхности уровенного эллипсоида определяется формулой

$$U_0 = \frac{fM_0}{a}\left(1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^2\right) + \frac{1}{3}\omega^2 a^2. \qquad \text{(II.1.21)}$$

Сила тяжести на поверхности уровенного эллипсоида (нормальная сила тяжести — γ_0) определяется формулой Сомильяна

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \qquad \text{(II.1.22)}$$

где B — геодезическая широта; γ_e — нормальная сила тяжести на экваторе; γ_p — нормальная сила тяжести на полюсе; a и b — большая и малая полуоси эллипсоида.

Формула Сомильяна неудобна для вычислений. Путем некоторых преобразований, удерживая малые величины второго порядка, можно получить приближенную формулу

$$\gamma_0 = \gamma_e\,(1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \qquad \text{(II.1.23)}$$

где

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma}, \quad \beta_1 = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta. \qquad \text{(II.1.24)}$$

Формула (II.1.23) называется формулой Клеро с малыми величинами второго порядка, величина β получила название гравиметрического сжатия.

II.1.7. Классификация параметров нормальной Земли. Фундаментальные геодезические постоянные

Нормальное гравитационное поле вполне определяется четырьмя параметрами. Так, для определения нормального потенциала [формула (II.1.21)] в соответствии с теорией Стокса требуется знать: fM_0, a, α и ω. Величина fM носит название геоцентрической гравитационной постоянной. Кроме четырех указанных выше параметров, определяющих нормальное поле, можно указать еще следующие: U_0, γ_e, β и β_1.

При решении ряда задач геодезии, геофизики и небесной механики широкое распространение получило представление потенциала притяжения Земли (включая ее атмосферу) в виде разложения в ряд шаровых функций геоцентрических координат ρ, θ и λ. Соответственно можно представить и потенциал притяжения V_0 нормальной Земли подобным рядом:

$$V_0 = \frac{fM_0}{\rho}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2n} J_{2n}^0 P_{2n}(\sin\theta)\right]. \qquad \text{(II.1.25)}$$

Индексом «о» отмечены параметры нормальной Земли. В связи с тем что начало координат совмещено с центром масс Земли, в разложении

(II.1.25) отсутствуют гармоннческие коэффициенты первой степени. J_{2n} — зональные гармонические коэффициенты при полиномах Лежандра $P_{2n}(\sin\theta)$. Из-за симметричности нормальной Земли относительно ее оси вращения и плоскости экватора в разложении (II.1.25) отсутствуют все незональные члены и нечетные зональные члены. Таким образом, к параметрам, характеризующим нормальную Землю, следует отнести и гармонические коэффициенты нормального потенциала притяжения, т. е. величины J_2, J_4, J_6... Параметры нормальной Земли могут быть классифицированы следующим образом.

Параметры нулевого порядка: 1) геоцентрическая гравитационная постоянная fM; 2) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности нормальной Земли U_0; 3) экваториальный радиус Земли a; 4) экваториальная сила тяжести γ_e.

Параметры порядка сжатия: 1) геометрическое сжатие Земли $\alpha = (a - b)/a$; 2) гравиметрическое сжатие Земли $\beta = (\gamma_p - \gamma_e)/\gamma_e$; 3) зональный гармонический коэффициент геопотенциала второй степени J_2; 4) малые параметры, являющиеся функцией угловой скорости вращения Земли ω и параметров нулевого порядка, а именно $q = \omega^2 a/\gamma_e$ и $\bar{q} = \omega^2 a^3/fM_0$.

Параметры высших порядков: 1) коэффициент нормальной формулы (II.1.23) β_1, гармонические коэффициенты нормального потенциала притяжения J_4, J_6...

Фундаментальные геодезические постоянные

Из-за своей важности некоторые параметры нормальной Земли получили название фундаментальных геодезических постоянных. К ним в настоящее время относят величины: fM, a, J_2, ω. Остальные параметры нормальной Земли являются производными постоянными, получить которые можно, используя известные соотношения между различными параметрами.

К числу фундаментальных геодезических постоянных относят также скорость света в вакууме c, геоцентрическую гравитационную постоянную для атмосферы fM_A и универсальную гравитационную постоянную f.

Приведем значения фундаментальных геодезических постоянных, принятые в соответствии с рекомендациями XVII Генеральной ассамблеи Международного геодезического и геофизического союза (МГГС) и входящей в него Международной ассоциации геодезии (МАГ), состоявшейся в 1979 г.:

$$fM = (3\,986\,005 \pm 0{,}5)\cdot 10^8 \text{ м}^3\cdot\text{с}^{-2};$$

$$J_2 = (108\,263 \pm 0{,}5)\cdot 10^{-8};$$

$$a = 6\,378\,137 \pm 2 \text{ м};$$

$$\omega = 7\,292\,115\cdot 10^{-11} \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Приведенные значения постоянных являются исходными для вновь принятой геодезической референц-системы 1980 г.

II.1.8. Нормальная формула силы тяжести

В соответствии с принятыми параметрами нормальная формула силы тяжести имеет вид:

$$\gamma_0 = 9{,}7803266\,(1 + 0{,}00530248 \sin^2 B - 0{,}00000585 \sin^2 2B) \text{ м}\cdot\text{с}^{-2} \qquad \text{(II.1.26)}$$

Она соответствует принятой геодезической референц-системе 1980 г. В Советском Союзе для вычисления нормальной силы тяжести принята формула Гельмерта

$$\gamma_0 = 9{,}78030\,(1 + 0{,}005302\,\sin^2 B - 0{,}000007\,\sin^2 2B)\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}. \quad (\text{II.1.27})$$

Использование ее объясняется тем, что сжатие, соответствующее коэффициенту $\beta = 0{,}005302$, определенному Гельмертом ($\alpha = 1 : 298{,}2$), практически совпадает со сжатием эллипсоида Красовского.

Постоянные γ_e и β определены Гельмертом по результатам гравиметрической съемки того времени, коэффициент β_1 получен теоретически по данным о внутреннем строении Земли.

Широкое применение в настоящее время получили также еще две формулы нормальной силы тяжести. Одна из них — формула Кассиниса

$$\gamma_0 = 9{,}78049\,(1 + 0{,}0052884\,\sin^2 B - 0{,}0000059\,\sin^2 2B)\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2},$$

рассчитанная для эллипсоида Хейфорда ($a = 6\,378\,388$ м, $\alpha = 1 : 297{,}0$), что и определило величину β и β_1. Величина γ_e получена по данным мировой гравиметрической съемки. При выводе формулы Кассиниса не учитывалась гипотеза о внутреннем строении Земли.

Формула Кассиниса принята в 1930 г. международным соглашением и потому часто раньше ее называли международной. Она нашла широкое применение за рубежом.

Сила тяжести в формулах Гельмерта и Кассиниса дана в Потсдамской системе и потому в рассчитанные по этим формулам значения γ_0 вводят поправку $14\cdot10^{-5}$ м·с$^{-2}$. Для перехода от аномалий, вычисленных с использованием формулы Кассиниса, к аномалиям по формуле Гельмерта нужно ввести поправку

$$\gamma_0^{\Gamma} - \gamma_0^{K} = -\left(19{,}0 - 13{,}2\sin^2 B + 1{,}076\sin^2 2B\right)10^{-5}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

В 1967 г. XIV Генеральная ассамблея МГСС приняла значения параметров нормальной Земли (уровенного эллипсоида), образовавшие геодезическую референц-систему 1967 г. Она задана независимыми величинами, найденными по наблюдениям космических летательных аппаратов (КЛА): геоцентрической гравитационной постоянной $fM = 398\,603$ км^3·с$^{-2}$, большой полуосью эллипсоида $a = 6\,378\,160$ м, зональным гармоническим коэффициентом второго порядка потенциала тяготения $J_2 = 10\,827\cdot10^{-7}$, а также величиной угловой скорости вращения Земли $\omega = 7{,}2921151467\cdot10^{-5}$ рад·с$^{-1}$, необходимой для перехода от потенциала тяготения к потенциалу силы тяжести.

В 1971 г. на XV Генеральной ассамблее МГГС в Москве была рекомендована нормальная формула геодезической референц-системы 1967 г.

$$\gamma_0 = 9{,}780318\,(1 + 0{,}0053024\,\sin^2 B - 0{,}0000059\,\sin^2 2B)\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Таким образом, выбор нормального поля впервые оказался независящим от состояния мировой гравиметрической съемки.

Поправка за переход от аномалий, вычисленных по формуле Гельмерта, к аномалиям относительно международной формулы 1967 г. определяется по формуле

$$\gamma_0^{1967} - \gamma_0^{\Gamma} = \left(1{,}8 + 0{,}40\sin^2 B + 1{,}08\sin^2 2B\right)\cdot10^{-5}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Эта же поправка с учетом поправки Потсдамской системы составляет

$$\gamma_0^{1967} - \gamma_0^{\Gamma} = \left(15{,}8 + 0{,}40\sin^2 B + 1{,}08\sin^2 2B\right)10^{-5}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Поправка за переход от формулы Кассиниса к международной формуле 1967 г. составляет

$$\gamma_0^{1967} - \gamma_0^{K} = \left(-17{,}2 + 13{,}6\sin^2 B\right)\cdot10^{-5}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2},$$

а с учетом поправки Потсдамской системы

$$\gamma_0^{1967} - \gamma_0^{K} = \left(-3{,}2 + 13{,}6\sin^2 B\right)\cdot10^{-5}\ \text{м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

Следует иметь в виду, что переход на новую формулу нормальной силы тяжести сопряжен с перевычислением всех имеющихся гравиметрических данных и потому требует больших затрат труда.

II.1.9. Соотношения между параметрами уровенного эллипсоида

Между формой уровенного эллипсоида, угловой скоростью его вращения и значениями силы тяжести на полюсе и на экваторе существует строгая математическая зависимость, определяемая формулой Пицетти. Приведем эту формулу с точностью до малых второго порядка:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q - \frac{17}{14}\alpha q, \quad (\text{II.1.28})$$

где

$$q = \omega^2 a/\gamma_e. \quad (\text{II.1.29})$$

Из формулы (II.1.28) следует

$$\alpha = \frac{\frac{5}{2}q - \beta}{1 + \frac{17}{14}q}. \quad (\text{II.1.30})$$

Полученная формула (II.1.30) имеет важное значение для геодезии. Она позволяет найти сжатие Земли по гравиметрическим данным, поскольку коэффициенты нормальной формулы γ_e и β, входящие в (II.1.30), могут быть определены из наблюдений силы тяжести. Наблюдения силы тяжести производятся как на континентах, так и на поверхности морей и океанов, поэтому естественно, что сжатие α, определенное по формуле (II.1.30), лучше характеризует фигуру Земли в целом, чем сжатие, выводимое по результатам градусных измерений, покрывающих лишь материковую часть Земли, т. е. примерно $^1/_3$ всей ее поверхности. На основании формулы (II.1.30) можно сделать вывод, что коэффициенты α и β связаны между собой и не могут задаваться независимо один от другого.

Связь между величинами U_0 и fM_0 дается формулой (II.1.21). Масса эллипсоида M_0 и экваториальная постоянная γ_e связаны соотношением

$$fM_0 = a^2\gamma_e(1 - \alpha) + \frac{3}{2}\omega^2 a^3\left(1 - \frac{5}{7}\alpha - \frac{1}{441}\alpha^2\right). \quad (\text{II.1.31})$$

Гармонический коэффициент J_2 и геометрическое сжатие α находятся в соотношении

$$J_2 = \frac{2}{3}\alpha - \frac{\bar{q}}{3} - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{3}{7}\alpha\bar{q}; \quad (\text{II.1.32})$$

$$\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}\bar{q} + \frac{9}{8}J_2^2 - \frac{11}{56}\bar{q}^2 - \frac{3}{14}J_2\bar{q}. \quad (\text{II.1.33})$$

II.1.10. Вертикальный градиент нормальной силы тяжести. Кривизна силовой линии нормального поля

При редуцировании нормальной силы тяжести с одной уровенной поверхности на другую приходится пользоваться ее вертикальным градиентом, вычисляемым по формуле

$$\frac{\partial\gamma}{\partial n} = -0{,}30855\,(1 + 0{,}00071\cos 2B)\cdot 10^{-5}\ \text{с}^{-2},$$

где n — направление внешней к уровенному эллипсоиду нормали. Вертикальный градиент нормальной силы тяжести в очень слабой степени зависит от широты пункта. Поэтому при малых значениях высот второй член можно не учитывать и нормальную силу тяжести на высоте H над эллипсоидом (высоты H отсчитываются по направлению нормали к эллипсоиду) вычислять по формуле

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{\partial\gamma}{\partial n} H = \gamma_0 - 0{,}0003086H,$$

если H выражать в метрах, нормальную силу тяжести — в 0,01 м·с$^{-2}$. Знак минус указывает, что при положительных высотах над эллипсоидом поправка в нормальное значение силы тяжести за высоту будет отрицательной. Коэффициенты в формуле вертикального градиента зависят от параметров уровенного эллипсоида.

Кривизна силовой линии нормального поля определяется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{R}\sin 2B,$$

где ρ — радиус кривизны силовой линии; R — средний радиус Земли. Силовая линия нормального поля, в отличие от силовой линии действительного поля Земли, — плоская кривая, всегда лежащая в плоскости меридиана и обращенная вогнутостью к полюсу.

Радиус кривизны ρ силовой линии нормального поля значительно больше, чем радиус Земли. В самом деле, например, при $B = 45°$ $\rho = R/\beta$. Приняв $R = 6370$ км, $\beta = 0{,}0053$, получим, что радиус кривизны силовой линии нормального поля примерно в 200 раз превышает средний радиус Земли и составляет около 1 200 000 км. По этой причине отрезки силовой линии нормального поля практически не отличаются от отрезков нормали к уровенному эллипсоиду. Приведем также значение угла ΔB между касательной к силовой линии нормального поля и нормалью к уровенному эллипсоиду:

$$\Delta B = 0{,}171'' H \sin 2B, \qquad \text{(II.1.34)}$$

где высота H дается в километрах. Формула справедлива для малых высот.

II.1.11. Условия выбора уровенного эллипсоида в качестве нормальной Земли

При выборе уровенного эллипсоида в качестве нормальной Земли следует соблюдать следующие условия:

1) центр уровенного эллипсоида вращения должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось инерции, являющаяся осью его вращения, — с осью вращения Земли;

2) угловые скорости ω вращения уровенного эллипсоида и реальной Земли должны быть одинаковыми;

3) масса уровенного эллипсоида M_0 должна быть равна массе реальной Земли M ($fM_0 = fM$);

4) зональные гармонические коэффициенты геопотенциала второй степени для уровенного эллипсоида J_2^0 и реальной Земли J_2 должны совпадать ($J_2^0 = J_2$);

5) нормальный потенциал U_0 силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести W_0 на геоиде.

Таким образом, постоянные ω, J_2^0, fM_0 и U_0 можно принять в качестве основных постоянных, определяющих нормальную Землю, значения всех остальных параметров нормального поля a, γ_e, α, β, β_1 получаются при помощи формул (II.1.21), (II.1.31), (II.1.33), (II.1.30), (II.1.24). Однако, предпочтительнее вместо U_0 включать в число фундаментальных геодезических постоянных большую полуось a уровенного эллипсоида. В этом случае пятое условие формулируется иначе: большая полуось a уровенного эллипсоида должна быть подобрана таким образом, чтобы его объем равнялся объему геоида.

В. ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ОТЛИЧИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ОТ НОРМАЛЬНОГО

II.1.12. Возмущающий потенциал

При помощи возмущающего потенциала определяются отклонения физической поверхности Земли от уровенного эллипсоида. Если по аналогии с формулой (II.1.7) для действительного потенциала Земли представить нормальный потенциал как

$$U_0 = V^0 + Q^0,$$

где V^0 — потенциал притяжения уровенного эллипсоида, а Q^0 — потенциал его центробежной силы, и взять разность между W и U, то получим следующее выражение для возмущающего потенциала:

$$T = (V - V^0) + (Q - Q^0).$$

Как видно, величина возмущающего потенциала существенно зависит от выбора нормального потенциала, от того, какой эллипсоид взят в качестве уровенного. Дело в том, что в качестве уровенного эллипсоида может быть взят общий земной эллипсоид, а может быть и референц-эллипсоид.

Под общим земным эллипсоидом понимается эллипсоид, у которого центр масс совмещен с центром масс Земли и ось вращения которого совпадает с осью вращения реальной Земли. Параметры этого эллипсоида подбирают под условием наилучшего соответствия фигуре геоида (или, более строго, квазигеоида, см. II.1.11). Под референц-эллипсоидом подразумевается поверхность относимости, принятая для обработки геодезических измерений и установления системы геодезических координат.

Так как референц-эллипсоид ориентируется в теле Земли по исходному пункту данной страны, в котором задаются его геодезические координаты, то центры масс Земли и референц-эллипсоида не совпадают. Ось вращения эллипсоида параллельна оси вращения Земли. Если в качестве уровенного эллипсоида взят общий земной эллипсоид, то $Q = Q^0$, если же взят референц-эллипсоид, то $Q \neq Q^0$. Однако, учитывая, что расстояние между осями вращения Земли и эллипсоида мало́ (порядка 100 м), в первом приближении этим различием можно пренебречь.

Таким образом, приходим к выводу, что во всех случаях возмущающий потенциал можно определять как разность потенциалов притяжения Земли и уровенного эллипсоида: $T = V - V^0$.

Возмущающий потенциал обладает всеми свойствами потенциала притяжения. В частности, во внешнем пространстве возмущающий потенциал является гармонической функцией, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta T = 0$. Возмущающий потенциал не может быть непосредственно измерен, однако он может быть выражен через величины, находимые из измерений.

Условие, которому должен удовлетворять возмущающий потенциал в точках физической поверхности Земли, называется граничным или краевым. Определение возмущающего потенциала сводится к решению уравнения Лапласа. Найденное значение T в точках физической поверхности Земли должно удовлетворять граничному (краевому) условию. Подобные задачи называются краевыми задачами теории потенциала.

II.1.13. Уклонения отвеса

Вследствие отличия действительного гравитационного поля Земли от нормального, обусловленного неоднородным строением ее недр и сложностью фигуры, направление действительной силы тяжести g (отвесной линии) в данной точке M поверхности Земли не будет совпадать ни с направлением нормальной силы тяжести γ в той же точке, ни с направлением нормали к уровенному эллипсоиду.

Угол между направлением отвесной линии и направлением нормальной силы тяжести в той же точке называется гравиметрическим уклонением отвесной линии (поскольку он определяется по данным гравиметрических наблюдений), а угол между направлением отвесной линии и направлением нормали к эллипсоиду — астрономо-геодезическим уклонением отвеса (оно определяется по астрономическим и геодезическим данным).

Понятие уклонения отвеса является одним из важнейших понятий геодезии и теории фигуры Земли. Явление уклонения отвеса наблюдается повсеместно. В равнинных областях величины уклонения отвеса составляют, как правило, несколько секунд, а в горах — несколько десятков секунд. Обычно уклонения отвеса определяются его проекциями на плоскость меридиана и первого вертикала.

Составляющие астрономо-геодезических уклонений отвеса $\xi_{АГ}$ и $\eta_{АГ}$ определяются по формулам:

$$\xi_{АГ} = \varphi - B; \quad \eta_{АГ} = (\lambda - L)\cos B, \tag{II.1.35}$$

где φ, λ — астрономические широта и долгота, B, L — геодезические широта и долгота. Они вычисляются в пунктах Лапласа или в промежуточных астрономических пунктах государственной сети триангуляции 1 класса, в которых определяются астрономические координаты φ и λ. В среднем расстояния между этими пунктами составляют 70—100 км. Во всех остальных пунктах составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса получить по указанным формулам нельзя. В этих пунктах, используя гравиметрическую съемку, определяют составляющие гравиметрического уклонения отвеса.

Связь между составляющими гравиметрического уклонения отвеса и астрономо-геодезического достаточно проста:

$$\xi_{АГ} = \xi_{гр} + \Delta B; \quad \eta_{АГ} = \eta_{гр}, \tag{II.1.36}$$

где ΔB — угол между касательной к силовой линии нормального поля и нормалью к уровенному эллипсоиду, определяемый по формуле (II.1.34). Как видно из (II.1.36), составляющие уклонения отвеса в первом вертикале $\eta_{АГ}$ и $\eta_{гр}$ совпадают, поскольку силовые линии нормального поля силы тяжести — плоские кривые, лежащие в меридиональных плоскостях.

Уклонения отвеса называют относительными, если используемые при их вычислении геодезические широты и долготы соответствуют референц-эллипсоиду, и абсолютными, если эти величины даются относительно общего земного эллипсоида. Принято следующее правило знаков для составляющих отвеса: если астрономический зенит отклоняется от геодезического на северо-восток, то составляющие отвеса считаются положительными, если же на юго-запад, то отрицательными.

Зависимость составляющих гравиметрического уклонения отвеса от возмущающего потенциала T выражается формулами:

$$\xi_{гр} = -\frac{1}{\gamma R}\frac{\partial T}{\partial B}; \quad \eta_{гр} = -\frac{1}{\gamma R \cos B}\frac{\partial T}{\partial L}, \tag{II.1.37}$$

где R — средний радиус Земли.

II.1.14. Геодезическая и нормальная высоты. Аномалия высоты. Динамическая высота

Геодезической высотой $M_0M = H_M$ точки M земной поверхности называется высота точки над уровенным эллипсоидом, отсчитанная по нормали к эллипсоиду. Знание геодезических высот необходимо для определения отклонений физической поверхности Земли от поверхности уровенного эллипсоида. Если бы разность нормальных потенциалов $U_0 - U_M$ между точками M_0 и M нормали к поверхности уровенного эллипсоида (см. рис. 31) была известна, то геодезическая высота могла быть определена из соотношения

$$H_M = (U_0 - U_M)/\gamma_m,$$

где γ_m — среднее значение нормальной силы тяжести на отрезке MM_0. Однако в результате измерений может быть определена разность $W_0 - W_M$ (см. II.1.16), где W_0 — значение потенциала силы тяжести g в точке O, а W_M — значение того же потенциала в точке M. Вследствие отличия реального гравитационного поля от нормального через разность $W_0 - W_M$ определяется не геодезическая высота, а лишь ее составляющая $M_0N = H^\gamma$, получившая название нормальной высоты (см. рис. 31).

Таким образом,

$$H^\gamma_M = \frac{W_0 - W_M}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m}\int_0^M g\, dh, \tag{II.1.38}$$

где

$$\gamma_m = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 B_M - \beta_1 \sin^2 2B_M) + \frac{\partial \gamma}{\partial n}\cdot\frac{H^\gamma_M}{2}.$$

В СССР в настоящее время принята нормальная система высот.

Разность между геодезической высотой H_M точки M и ее нормальной высотой H^γ_M, т. е. величина $\zeta_M = H_M - H^\gamma_M$, называется аномалией высоты. Аномалия высоты ζ_M равна отрезку NM нормали, проведенной к эллипсоиду из точки M.

Аномалия высоты определяется через возмущающий потенциал следующим образом:

$$\zeta_M = T_M/\gamma_N, \qquad (II.1.39)$$

где γ_N — значение нормальной силы тяжести в точке N.

Следовательно, геодезическая высота H_M получается как сумма двух составляющих:

$$H_M = H_M^{\gamma} + \zeta_M. \qquad (II.1.40)$$

Поскольку значение потенциала вполне характеризует положение точки по высоте, можно условиться находить высоту как разность потенциалов, деленную на некоторое постоянное значение силы тяжести. Такие высоты при перемещении точки по уровенной поверхности не изменяются и называются динамическими высотами H^d. При этом за постоянное значение силы тяжести обычно принимают значение нормальной силы тяжести на широте $\varphi = 45°$. В этом случае

$$H^d = \frac{1}{\gamma_0^{45}} \int_0^M g\, dh.$$

II.1.15. Квазигеоид

Величина ζ, связанная с возмущающим потенциалом Земли, характеризует степень аномальности гравитационного поля. Чтобы проиллюстрировать это положение, будем откладывать от поверхности уровенного эллипсоида по нормали к нему аномалии высот ζ, определенные в точках M физической поверхности Земли. В результате получим совокупность точек M'', образующих некоторую поверхность (см. рис. 31), которая получила название квазигеоида. Аномалия высоты ζ может быть названа высотой квазигеоида над поверхностью эллипсоида, а нормальная высота H^{γ} — высотой точки M физической поверхности Земли, отсчитанной по нормали к эллипсоиду, над поверхностью квазигеоида.

Квазигеоид не является уровенной поверхностью потенциала силы тяжести. Отклонения $\Delta\zeta$ по высоте квазигеоида от геоида могут быть вычислены по формуле

$$\Delta\zeta = M'M'' = H^{\gamma} - H^{g} = \frac{\gamma_m - g_m}{g_m} H^{\gamma},$$

где g_m и γ_m — средние значения действительной и нормальной силы тяжести для точки M. Как показывают подсчеты по приведенной выше формуле, отклонения $\Delta\zeta$ на равнинах составляют несколько сантиметров, а в горах могут достигать 2—3 м. Поскольку на поверхности океана разности потенциалов ΔW равны нулю, то и нормальные и ортометрические высоты также будут равны нулю, и, как следствие, $\Delta\zeta = 0$. Это означает, что на океанах геоид совпадает с квазигеоидом.

Таким образом, квазигеоид только на материках, да и то незначительно, отступает от уровенной поверхности потенциала силы тяжести, совпадающей с уровнем моря.

Но поскольку положение геоида под материками не может быть точно определено, то за уровень моря приходится принимать поверхность квазигеоида, относительно которого отсчитываются нормальные высоты, используемые для изображения рельефа на топографических картах.

Поверхность квазигеоида имеет сложную форму, отражающую сложный характер гравитационного поля Земли. Поскольку высоты квазигеоида ζ могут быть как положительными, так и отрицательными, поверхность квазигеоида может подниматься и опускаться относительно уровенного эллипсоида, т. е. эта поверхность образует волны различной протяженности и амплитуды.

Представим высоту квазигеоида в виде разложения в ряд сферических функций:

$$\zeta = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\theta),$$

где c_{nk} и s_{nk} — гармонические коэффициенты возмущающего потенциала; λ, θ — геоцентрические координаты; $P_{nk}(\theta)$ — присоединенный полином Лежандра n-й степени и k-го порядка; R — средний радиус Земли.

Таким образом, величина поднятия или опускания квазигеоида в произвольной точке представляется суммой бесконечного числа сферических гармоник. Но каждая гармоника имеет свою амплитуду колебаний и отражает изменение величины лишь в соответствии с заданной для нее функциональной зависимостью от координат θ и λ. Поэтому характер волн, представляемых различными гармониками, неодинаков. Естественно, что сумма различных гармоник дает очень сложный закон, которому подчиняются изменения ζ. Высоты квазигеоида являются наиболее наглядной характеристикой возмущающего потенциала Земли.

II.1.16. Аномалии силы тяжести

Отличие действительного гравитационного поля Земли от нормального проявляется также в аномалиях силы тяжести.

Аномалией силы тяжести называется разность между действительным значением силы тяжести, полученным из наблюдений, и ее нормальным (теоретическим) значением. Если значения действительной силы тяжести и нормальной отнесены к одной и той же точке, то аномалию называют чистой, если же эти значения относятся к разным точкам пространства, то аномалию называют смешанной. В зависимости от поправок (редукций), вводимых либо в измеренную, либо в нормальную силу тяжести, различают несколько видов аномалий.

При вычислении аномалий в свободном воздухе в измеренное значение силы тяжести g никаких поправок не вводят, вводят лишь поправку за высоту в значение нормальной силы тяжести:

$$(g - \gamma)_{\text{св. в}} = g - (\gamma_0 + \Delta\gamma),$$

где γ_0 — значение нормальной силы тяжести на эллипсоиде; $\Delta\gamma$ — $0{,}30855\,(1 + 0{,}00071 \cos 2B) + 0{,}0723$ $\text{Н}^2 \cdot 10^{-11}$ $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ — редукция в свободном воздухе с учетом квадратичного члена; H — геодезическая высота. В этом случае аномалия будет чистой. Если вместо геодезической высоты взять нормальную H^{γ}, то аномалия будет смешанной, так как наблюденная сила тяжести относится к точке M земной поверхности, а нормальная сила тяжести — к точке N (см. рис. 31). Поскольку в теории фигуры Земли обычно используются смешанные аномалии, в дальнейшем под аномалией в свободном воздухе будем понимать смешанную аномалию:

$$(g - \gamma)_{\text{св. в}} = g_M - \gamma_N.$$

Аномалии в свободном воздухе на земной поверхности изменяются по сложному закону и потому линейное интерполирование их приводит к неудовлетворительному результату. Вследствие этого как построение, так и использование карт аномалий в свободном воздухе, особенно в горных районах, встречает большие трудности.

Основной причиной, вызывающей сложный, неправильный характер изменений аномалий в свободном воздухе, является влияние т о п о г р а ф и ч е с к и х м а с с (т. е. материковых масс, расположенных между поверхностью, совпадающей с уровнем моря и физической поверхностью Земли) на значение измеренной силы тяжести g.

Обычно в горных районах сила тяжести измеряется в долинах, а на труднодоступных вершинах измерений не производят. Естественно, что формальное линейное интерполирование значений аномалий силы тяжести между пунктами, лежащими в долинах и расположенными по обе стороны горного хребта, заведомо неправильно.

В Советском Союзе разработан метод так называемого косвенного интерполирования аномалий в свободном воздухе с использованием т о п о г р а ф и ч е с к и х а н о м а л и й. Для получения топографических аномалий из наблюдаемого значения силы тяжести исключается влияние топографических масс. С необходимостью устранения этого возмущающего эффекта из результатов наблюдений силы тяжести приходится встречаться при разведке полезных ископаемых, а также при изучении внутреннего строения Земли.

Поправку $\Delta g_т$ за влияние топографических масс называют т о п о г р а ф и ч е с к о й поправкой (редукцией). Она равна составляющей притяжения топографических масс Земли в направлении силы тяжести в данной точке земной поверхности M. Если ось z совместить с направлением силы тяжести g в данной точке M, то по аналогии с (II.1.4)

$$\Delta g_т = F_z = -f \int_\tau \frac{\delta\, d\tau}{r^2} \cos(r, z),$$

где r — радиус-вектор точки M, в которой вычисляется топографическая поправка $\Delta g_т$ до элементарного объема $d\tau$ в текущей точке; (r, z) — угол между радиусом-вектором и направлением силы тяжести в точке M; τ — полный объем топографических масс.

Если при вычислении топографической поправки учитывается влияние всех топографических масс Земли, то полученная таким образом поправка носит название п о л н о й т о п о г р а ф и ч е с к о й р е д у к ц и и $\Delta g_{\text{птр}}$. После введения в значение силы тяжести в данной точке M полной топографической редукции получается значение силы тяжести $g - \Delta g_{\text{птр}}$, освобожденное от влияния всех топографических масс Земли. Величина $g_M - \Delta g_{\text{птр}} - \gamma_N$ называется а н о м а л и е й в п о л н о й т о п о г р а ф и ч е с к о й р е д у к ц и и $(g - \gamma)_{\text{птр}}$. Однако далеко не во всех случаях приходится учитывать влияние всех топографических масс Земли. Необходимо иметь в виду, что этот учет очень сложен, требует много труда и времени, а влияние далеких топографических масс незначительно и почти одинаково на все пункты небольшого района. Поэтому оказывается вполне достаточным вычислять влияние не всех топографических масс, а лишь в пределах некоторой области. В этом случае поправка называется н е п о л н о й т о п о г р а ф и ч е с к о й р е д у к ц и е й $\Delta g_{\text{нтр}}$, а величина $g_M - \Delta g_{\text{нтр}} - \gamma_N$ — а н о м а л и е й в н е п о л н о й т о п о г р а ф и ч е с к о й р е д у к ц и и $(g - \gamma)_{\text{нтр}}$.

Величину $\Delta g_{\text{нтр}}$ можно вычислять не по формуле (II.1.4), а значительно проще. Для этого выделяют главную часть величины и небольшие к ней поправки. За главную часть влияния топографических масс ограниченной области Σ принимают вертикальную составляющую притяжения плоского слоя бесконечного простирания и постоянной плотности (пластины Буге), толщина которого равна высоте данной точки над уровнем моря. Разность между точным значением притяжения топографических масс области Σ и притяжением плоского бесконечного слоя невелика. Чтобы от притяжения этого слоя перейти к действительному притяжению топографических масс, необходимо ввести поправки: Δ_1 — за притяжение той части пластины, которая лежит за пределами области Σ; Δ_2 — за кривизну Земли; $\Delta g_р$ — за рельеф. Таким образом, неполную топографическую редукцию можно вычислять по формуле

$$\Delta g_{\text{нтр}} = 2\pi f\, \delta H^\gamma + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta g_р,$$

где $2\pi f \delta H^\gamma$ — притяжение плоского слоя бесконечного простирания и высоты H^γ; δ — плотность топографических масс, принимаемая постоянной. Аномалия в неполной топографической редукции будет:

$$(g - \gamma)_{\text{нтр}} = g_M - 2\pi f\, \delta H^\gamma - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta g_р - \gamma_N.$$

В пределах небольшого района влияние топографических масс можно принять равным притяжению плоского слоя бесконечного простирания (исправленному поправкой за рельеф в горном районе). Аномалия

$$(g - \gamma)_Б = g_M - 2\pi f\, \delta H^\gamma - \gamma_0 + 0{,}3086 H^\gamma$$

получила название а н о м а л и и Б у г е.

Заметим, что поправка $\Delta g_Б = -2\pi f \delta H^\gamma$ называется п о п р а в к о й (р е д у к ц и е й) Б у г е.

Поправка за рельеф $\Delta g_р$ учитывает отклонения физической поверхности Земли от горизонтальной плоскости, проходящей через данную точку. После введения этой поправки в значение наблюденной силы тяжести мы получаем такое значение силы тяжести, которое было бы, если бы физическая поверхность Земли в пределах выбранной зоны была строго горизонтальной. При определении величины поправки за рельеф всю местность вокруг точки наблюдения разбивают на небольшие ячейки (трапеции) при помощи системы концентрических окружностей и радиально расходящихся лучей. При определении размеров радиусов кольцевых зон, а также числа лучей исходят из того, чтобы внутри каждой ячейки высоту h над уровнем точки наблюдения можно было считать величиной постоянной. Поправка за рельеф получается как сумма влияний отдельных ячеек:

$$\Delta g_р = \frac{\pi f \delta}{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} h^2 \left[\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right],$$

где k — число кольцевых зон; n — число секторов в одной зоне; δ — плотность горных пород; a_i и a_{i+1} — радиусы внутренней и внешней зон. Полагая $n = 8$, получим

$$\Delta g_р = 0{,}01044\delta \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{8} h^2 \left[\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right] \cdot 10^{-5},$$

где поправка получается в м·с$^{-2}$, если h и a выражены в метрах. Из этой формулы можно сделать вывод, что при малых значениях h по

сравнению с величинами a поправка за рельеф становится малой величиной. Напротив, в горной местности она может достигать 10^{-3} м·с$^{-2}$.

В СССР поправки за рельеф вводятся в случаях, когда их величины близки к ошибкам гравиметрической съемки, т. е. практически всегда в горных районах. При вычислении этих поправок широкое применение получили таблицы и номограммы.

В последние годы в СССР при геодезическом использовании аномалий силы тяжести широко применяют так называемые а н о м а л и и Ф а я. При вычислении аномалий Фая в измеренное значение силы тяжести вводится только поправка за рельеф. Аномалия Фая вычисляется по формуле

$$(g-\gamma)_{\Phi} = g + \Delta g_{\text{р}} + 0{,}3086H^{\gamma} - \gamma_0.$$

Сумма поправок за высоту и за рельеф называется р е д у к ц и е й Ф а я:

$$\Delta g_{\Phi} = 0{,}3086H^{\gamma} + \Delta g_{\text{р}}.$$

В равнинной местности, где поправки за рельеф становятся пренебрегаемо малыми, аномалии Фая совпадают с аномалиями в свободном воздухе. Там же, где влияние рельефа значительно, аномалии в свободном воздухе отличаются от аномалии Фая на величину поправки за рельеф:

$$(g-\gamma)_{\Phi} = (g-\gamma)_{\text{св. в}} + \Delta g_{\text{р}}.$$

Аномалии силы тяжести показывают на гравиметрических картах изоаномалами — линиями равных значений аномалий силы тяжести, а также на картах-схемах аномалий, осредненных на участках стандартных размеров — от 5×7,5′ до 10×10°. Обычно основой любой гравиметрической карты служит топографическая карта соответствующего масштаба. При вычислении высот квазигеоида и уклонений отвеса применяются гравиметрические карты масштабов 1 : 100 000, 1 : : 200 000, 1 : 500 000, 1 : 1 000 000 и более мелких.

Аномалии в свободном воздухе и аномалии Фая применяют в исследованиях, связанных с изучением фигуры Земли. При этом, как установлено работами советских ученых, использование аномалий Фая имеет определенное преимущество, ибо позволяет наиболее просто учесть влияние рельефа на величины, характеризующие фигуру Земли (составляющие уклонения отвеса и аномалии высот). Аномалии Буге и аномалии в неполной топографической редукции используются для косвенной интерполяции аномалий в свободном воздухе и аномалий Фая, а также при разведке полезных ископаемых.

II.1.17. Точность построения гравиметрических карт

Наибольшее распространение получили гравиметрические карты аномалий в свободном воздухе и аномалий Буге. Их точность зависит от точности измерений аномалий и плотности съемки. При гравиметрических съемках большой плотности, когда расстояние между пунктами меньше 30 км, возможно определение аномалий в промежуточных точках методом линейной интерполяции. В этом случае используются карты с изоаномалами. Поскольку аномалии силы тяжести между соседними пунктами меняются сложным образом, интерполированное значение отличается от действительного, причем это отличие будет тем больше, чем больше расстояние между пунктами и сложнее гравитационное поле. Точность гравиметрических карт в этом случае характеризуется ошибкой интерполяции. О ш и б к о й и н т е р п о л я ц и и называется среднее квадратическое отклонение действительных значений аномалий от снятых с карты изоаномал:

$$E = \sqrt{\frac{\sum (\Delta g_{\text{инт}} - \Delta g)^2}{n}},$$

где Δg — измеренное и $\Delta g_{\text{инт}}$ — интерполированное значение аномалий в данной точке; n — число точек. В разность интерполированного и измеренного значения аномалии входит также и ошибка измерения m, поэтому ошибки E называются полными ошибками интерполяции. Если из величины E исключить ошибку измерения, то получим чистую ошибку интерполяции:

$$E' = \sqrt{E^2 - m^2}.$$

Чистую ошибку интерполяции можно определить следующим образом. В районе, где выполнена гравиметрическая съемка, исключается половина всех пунктов, т. е. плотность сети разрежается вдвое, и по оставшимся пунктам строится карта изоаномал. Затем по этой карте интерполированием между изолиниями определяют аномалии в местах исключенных пунктов и сравнивают их с наблюденными аномалиями в этих пунктах. Аналогично определяется ошибка интерполяции для съемки, разреженной в 4, 8, 16 раз относительно первоначальной. Результаты вычислений наносят на график, по одной оси которого откладывают расстояния между гравиметрическими пунктами при различных плотностях съемки, а по другой — значения чистой ошибки интерполяции, соответствующие этим плотностям съемки. Полученные точки соединяют плановой кривой. С помощью графика находят значение чистой ошибки интерполяции для первоначальной карты.

Проще определить чистую ошибку интерполяции по эмпирической формуле

$$E' = kx,$$

где k — коэффициент, зависящий от характера гравитационного поля; x — расстояние между гравиметрическими пунктами в километрах. В равнинных районах коэффициент равен $0{,}11 \cdot 10^{-8}$ с$^{-2}$, в горных он может быть в 2—3 раза больше. Приведенной выше формулой удобно пользоваться для расчета требуемой плотности съемки.

Ошибка измерения силы тяжести должна быть в 2—3 раза меньше чистой ошибки интерполяции. Сечение изоаномал выбирают в 2—3 раза больше ошибки интерполяции (табл. 38).

При расстояниях между пунктами более 30 км предположение о линейном изменении аномалий приводит к большим ошибкам, поэтому при редкой съемке карт с изоаномалами не составляют. В этих случаях находят средние значения аномалий на площадках стандартных размеров — 5×7,5′, 10×15′, 20×30′, 1×1°, 5×5°. Точность средних значений аномалий оценивают о ш и б к о й п р е д с т а в и т е л ь с т в а, под которой понимают среднее квадратическое значение разности между измеренным значением аномалии силы тяжести в каждой точке внутри некоторого участка и средним значением аномалии на этом участке. Ошибку представительства вычисляют по формуле

$$\bar{E} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta g_{\text{ср}} - \Delta g_i)^2}{n-1}},$$

где Δg_i — измеренное и $\Delta g_{\text{ср}}$ — среднее значение аномалии; n — число точек, по которым вычислено среднее значение. Ошибка представительства $\bar{E}$ содержит ошибку наблюдения m и называется полной ошиб-

ТАБЛИЦА 38

Масштаб карты	Сечение изоаномал	Ошибка измерения	E
	10^{-5} м·с$^{-2}$		
1 : 500 000	5	0,5	2,0
1 : 200 000	2	0,4	1,0
1 : 100 000	1	0,3	0,5
1 : 50 000	0,5	0,15	0,35
1 : 50 000	0,25	0,07	0,20
1 : 25 000	0,20	0,06	0,15
1 : 10 000	0,1	0,03	0,07
1 : 5 000	0,05	0,015	0,03

кой представительства. Если исключить из $\overline{E}$ ошибку наблюдения m, то получим чистую ошибку представительства:

$$\overline{E}' = \sqrt{\overline{E}^2 - m^2}.$$

При расчетах, связанных с проектированием гравиметрических съемок, необходимо знать зависимость между величиной чистой ошибки представительства и площадью участка, которой она соответствует. Величину чистой ошибки представительства можно представить как функцию размеров участка. Вид этой функции определялся эмпирически. Для прямоугольника со сторонами x и y

$$\overline{E}' = c(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

где c — постоянный коэффициент. Для оценки ошибки представительства при расстояниях x между пунктами, меньших 30 км, используется формула

$$\overline{E}' = kx.$$

II.1.18. Косвенная интерполяция аномалий

Для ослабления влияния ошибок, связанных с линейной интерполяцией аномалий в свободном воздухе и аномалий Фая, применяется разработанный в СССР метод их косвенной интерполяции с использованием топографических аномалий. Косвенная интерполяция аномалий в свободном воздухе с применением аномалий Буге производится следующим образом. В пунктах, в которых известны значения силы тяжести, вычисляют аномалии Буге. Затем путем линейной интерполяции определяют аномалии Буге в промежуточных пунктах, где отсутствуют гравиметрические наблюдения. Обратный переход от аномалий Буге к аномалиям в свободном воздухе в этих пунктах совершается при помощи соотношения

$$(g - \gamma)_{\text{св. в}} = (g - \gamma)_{\text{Б}} + 2\pi f\, \delta H^{\gamma}.$$

В горных районах, где поле аномалий Буге становится сложным и их линейная интерполяция приводит к большим ошибкам, косвенная

интерполяция аномалий в свободном воздухе выполняется с помощью аномалий в неполной топографической редукции. Процесс вычисления аналогичен описанному выше.

Косвенная интерполяция аномалий Фая выполняется через аномалии в неполной топографической редукции с использованием соотношения

$$(g - \gamma)_{\Phi} = (g - \gamma)_{\text{нтр}} + 2\pi f\, \delta H^{\gamma}. \qquad \text{(II.1.41)}$$

Плотность притягивающих масс, расположенных между физической поверхностью Земли и уровнем моря, меняется в значительных пределах: от 2,28—2,35 г/см^3 до 2,65—2,78 г/см^3 в зависимости от геологического строения. Тем не менее при составлении мировых гравиметрических карт в аномалиях Буге или мелкомасштабных карт на большие территории принимается единое значение плотности. Чаще всего для плотности δ используют стандартные значения: 2,67 г/см^3, равное среднему значению плотности земной коры, и 2,3 г/см^3, более пригодное в том случае, когда значительная часть топографических масс сложена осадочными образованиями. В СССР при составлении карт в аномалиях Буге плотность δ принимается равной 2,3 г/см^3. При исследованиях гравитационного поля Земли и ее фигуры возникает задача определения средних аномалий в свободном воздухе или Фая для больших площадей по дискретным и зачастую неравномерно расположенным наблюдениям силы тяжести. Средняя аномалия силы тяжести $\overline{g - \gamma}$ для некоторой области S может быть получена по формуле

$$\overline{g - \gamma} = \frac{1}{S} \iint_S (g - \gamma)\, dS.$$

При определении $\overline{g - \gamma}$ область S разделяется на n элементарных равновеликих участков, в каждом из которых значение $g - \gamma$ считается постоянным. В этом случае

$$\overline{g - \gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (g - \gamma)_i.$$

При получении средних значений аномалий силы тяжести для больших площадей в качестве исходных используются средние значения для меньших площадей. Обычно минимальной областью, для которой средняя аномалия определяется непосредственно по значениям аномалий в гравиметрических пунктах или по гравиметрическим картам, является трапеция размером 1×1°. Причем в СССР средние аномалии Фая получают и для более мелких участков: 5×7,5′, 10×15′, 20×30′. Однако простое осреднение может дать неправильные результаты, поскольку при этом не учитывается зависимость аномалий силы тяжести от высоты пунктов наблюдений. Вычисление средних аномалий в свободном воздухе для материковых трапеций следует производить по формуле

$$\overline{g - \gamma} = (g - \gamma)_{\text{ср}} + k\left(\overline{H}^{\gamma} - H^{\gamma}_{\text{ср}}\right),$$

где $(g - \gamma)_{\text{ср}}$ и $H^{\gamma}_{\text{ср}}$ — среднее значение аномалии в свободном воздухе и средняя высота в трапециях, имеющих гравиметрические наблюдения; $\overline{H}^{\gamma}$ — средняя высота всей трапеции; k — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от высоты.

Средние аномалии для морских трапеций вычисляются по формуле

$$\overline{g-\gamma}=(g-\gamma)_{\text{ср}}+b\,(\bar{P}-P_{\text{ср}}),$$

где $\bar{P}$ и $P_{\text{ср}}$ — соответствующие глубины, а b — коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от глубины. Коэффициенты k и b вычисляются по методу наименьших квадратов в районах, достаточно хорошо изученных в гравиметрическом отношении, с большим диапазоном изменения высот или глубин.

В пределах трапеции размером $1^\circ\times1^\circ$ коэффициент зависимости аномалии в свободном воздухе от высоты или глубины близок к коэффициенту редукции Буге $2\pi f\delta$ (при $\delta=2{,}67$ г·см$^{-3}$ $2\pi f\delta=0{,}112\times10^{-5}$ с$^{-2}$, при $\delta=2{,}3$ г·см$^{-3}$ $2\pi f\delta=0{,}096\cdot10^{-5}$ с$^{-2}$). При увеличении площади участков, по которым проводится осреднение, значение этого коэффициента уменьшается.

Г. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ ГРАВИМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

II.1.19. Постановка задачи

Понятие фигуры Земли неоднозначно и зависит от решаемой задачи и требуемой точности приближения выбранной фигуры к реально существующей. В качестве фигуры Земли принимают: шар, эллипсоид вращения, фигуру уровенной поверхности действительного потенциала силы тяжести, фигуру, которую имела бы Земля, если бы она находилась в гидростатическом равновесии (сфероид) и др.

В настоящее время под фигурой Земли понимают фигуру, ограниченную ее физической поверхностью, которая в областях, занимаемых сушей, образована рельефом, а на морях и океанах — их невозмущенной поверхностью.

Задача определения фигуры Земли в современной трактовке состоит в определении точных геодезических координат точек (широты B, долготы L и высоты H) относительно принятой фигуры относимости. При изучении фигуры Земли в целом за такую фигуру относимости принимается общий земной эллипсоид, при региональном изучении — референц-эллипсоид. Закон изменения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида определяется формулой нормальной силы тяжести. Если бы найденные по этой формуле значения совпадали с наблюденной силой тяжести, то это служило бы доказательством, что поверхность Земли является поверхностью уровенного эллипсоида. И наоборот, отличия действительной силы тяжести от нормальной (аномалии силы тяжести) свидетельствуют об отступлениях истинной фигуры Земли от фигуры сравнения.

Геодезические координаты (B, L, H) точек земной поверхности могут быть найдены по формулам:

$$B=\varphi-\xi_{\text{гр}}-\Delta B,$$

$$L=\lambda-\eta_{\text{гр}}\sec B,$$

$$H=H^{\gamma}+\zeta,$$

где φ и λ — астрономические широта и долгота; H^{γ} — нормальная высота; $\xi_{\text{гр}}$ и $\eta_{\text{гр}}$ — составляющие гравиметрического уклонения отвеса; ζ — высота квазигеоида; ΔB — угол между касательной к силовой линии нормального поля и нормалью к уровенному эллипсоиду.

Величины ζ, $\xi_{\text{гр}}$ и $\eta_{\text{гр}}$ связаны с возмущающим потенциалом соотношениями (II.1.39) и (II.1.37) и, следовательно, задача их определения заключается в определении возмущающего потенциала Земли. Строгое решение этой задачи дано советским ученым М. С. Молоденским.

Несовершенством гравиметрического метода является то, что он не позволяет определить размеры общего земного эллипсоида. Они могут быть определены лишь с привлечением данных других методов изучения фигуры Земли.

Гравиметрический метод при определении координат пока уступает по точности астрономо-геодезическому. Случайные ошибки определения B и L в линейной мере даже в лучших условиях достигают 10 м. С точностью порядка 5 м определяются высоты H. Значение гравиметрического метода состоит прежде всего в том, что он позволяет привести различные референцные системы координат в единую систему, связанную с центром масс Земли. Гравиметрический метод может быть успешно использован для контроля и детализации карт высот квазигеоида, составленных астрономо-геодезическим методом, а также при изучении внешнего гравитационного поля Земли.

В настоящее время проблема определения фигуры Земли решается при совместном использовании различных методов: астрономо-геодезического, гравиметрического, спутникового, длиннобазисной радиоинтерферометрии.

II.1.20. Определение возмущающего потенциала Земли

Возмущающий потенциал находится из решения третьей краевой задачи теории потенциала. В точках физической поверхности Земли, по исследованиям М. С. Молоденского, возмущающий потенциал должен удовлетворять условию

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_M+\left(\frac{2T}{\rho}\right)_M=-g_M+\gamma_N,$$

где g_M — наблюденное значение силы тяжести в точке M (рис. 32); γ_N — нормальное значение силы тяжести в точке N; ρ_M — радиус-вектор точки M; $\rho_M=R+H_M^{\gamma}$ (R — средний радиус Земли). Однако при решении этой задачи возникает принципиальная трудность.

В обычных краевых задачах поверхность, на которой дается то или другое условие, должна быть известна. В данном случае граничной поверхностью является физическая поверхность Земли, а она сама подлежит определению. Задачу приходится решать методом приближений. Вместо неизвестной поверхности Земли М. С. Молоденский предложил использовать так называемую поверхность Земли в первом приближении, к которой и относят краевое условие, составленное для физической поверхности Земли.

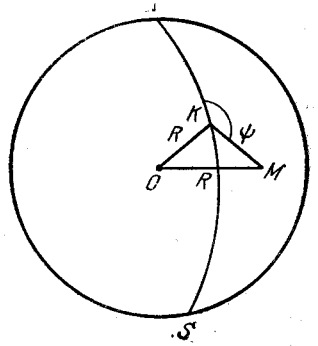


Рис. 32. Схема определения возмущающего потенциала Земли

Поверхность Земли в первом приближении строят путем откла-

дывания нормальных высот H^ν от поверхности уровенного эллипсоида. Решение в первом приближении, полученное М. С. Молоденским, имеет вид:

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g)\, S(\psi)\, d\omega, \qquad \text{(II.1.42)}$$

где интеграл берется по поверхности всей Земли, принимаемой за сферу; $(g - \gamma)$ — аномалия в свободном воздухе; ψ — дуга большого круга от текущей точки M до данной точки K, в которой определяется возмущающий потенциал T; $S(\psi)$ — функция Стокса:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right).$$

Поправка δg в аномалию в свободном воздухе, учитывающая влияние рельефа, вычисляется по формуле

$$\delta g = R^2 \iint_{\omega} \frac{h\chi^0}{r_0^3}\, d\omega, \qquad \text{(II.1.43)}$$

где $h = H^\nu - H_0^\gamma$ — разность нормальных высот текущей точки M и данной точки K; $r_0 = 2R\sin\frac{\psi}{2}$; χ^0 — вспомогательная функция:

$$\chi^0 = \frac{g - \gamma}{2\pi} + \frac{3}{16\pi^2} \iint_{\omega} (g - \gamma)\, S(\psi)\, d\omega. \qquad \text{(II.1.44)}$$

II.1.21. Формулы для вычисления высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса

Если в (II.1.39) подставить значение возмущающего потенциала (II.1.42), то получим формулу М. С. Молоденского (первого приближения) для высоты квазигеоида (аномалии высоты):

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g)\, S(\psi)\, d\omega. \qquad \text{(II.1.45)}$$

При помощи соотношений (II.1.37) получим формулы М. С. Молоденского (первого приближения) для составляющих гравиметрического уклонения отвеса:

$$\xi_{\text{гр}} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g)\frac{dS}{d\psi}\cos A\, d\omega - \left(g - \gamma + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right)\frac{dH}{RdB}; \qquad \text{(II.1.46)}$$

$$\eta_{\text{гр}} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} (g - \gamma + \delta g)\frac{dS}{d\psi}\sin A\, d\omega - \left(g - \gamma + \frac{2\gamma\zeta}{R}\right)\frac{dH}{R\cos BdL}, \qquad \text{(II.1.47)}$$

где A — азимут направления на текущую точку M (см. рис. 32).

На практике широкое применение получили формулы Стокса и Венинг-Мейнеса, которые можно рассматривать в качестве нулевого приближения в формулах М. С. Молоденского.

Формула Стокса для вычисления высоты квазигеоида (аномалии высоты) имеет вид:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\omega} (g - \gamma)\, S(\psi)\, d\omega. \qquad \text{(II.1.48)}$$

Формулы Венинг-Мейнеса для составляющих гравиметрического уклонения отвеса обычно представляют в виде:

$$\xi_{\text{гр}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (g - \gamma)\, Q(\psi)\cos A\, dA\, d\psi;$$

$$\eta_{\text{гр}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (g - \gamma)\, Q(\psi)\sin dA\, d\psi, \qquad \text{(II.1.49)}$$

где $Q(\psi)$ — функция Венинг-Мейнеса:

$$Q(\psi) = \frac{206\,265}{2\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12\sin\frac{\Psi}{2} - 32\sin^2\frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin\frac{\psi}{2}} - 12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right].$$

В условиях равнинного района, когда интегрирование распространяется не на всю Землю, а на сравнительно ограниченную область Σ, можно пользоваться преобразованными формулами Стокса и Венинг-Мейнеса для плоскости, которые получают из (II.1.48), (II.1.49), положив в них $R \to \infty$. Обозначив через r линейное расстояние между данной и текущей точками, получим:

$$\zeta(\Sigma) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{g - \gamma}{r}\, d\sigma; \qquad \text{(II.1.50)}$$

$$\xi(\Sigma) = -\frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{g - \gamma}{r^2}\cos A\, d\sigma;$$

$$\eta(\Sigma) = -\frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\Sigma} \frac{g - \gamma}{r^2}\sin A\, d\sigma, \qquad \text{(II.1.51)}$$

где $d\sigma$ — элемент плоскости.

Однако формулы нулевого приближения дают удовлетворительную точность только для пунктов, расположенных на равнине. Так, например, уклонения отвеса по формулам нулевого приближения в равнинных районах получаются со средней квадратической ошибкой 0,3—0,5″, тогда как в горах — с ошибкой 1,0—1,4″.

Чтобы получить достаточную точность, можно использовать следующий прием. Исключить из аномалий силы тяжести влияние топографических масс и все вычисления производить в поле остаточных аномалий. Затем необходимо восстановить влияние исключенных масс непосредственно на высоты квазигеоида и составляющие уклонения отвеса. Таким образом, высоты квазигеоида и составляющие уклонения отвеса будут находиться как сумма двух слагаемых: влияния топографических масс и влияния аномальных масс, которое вычисляется по более простым, чем формулы М. С. Молоденского, формулам Стокса и Венинг-Мейнеса. Наиболее удобны для вычислений и обеспечивают в большинстве случаев достаточную точность формулы, предложенные Л. П. Пеллиненом:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\omega}[(g-\gamma)_{\text{нтр}} + 2\pi f\,\delta H^{\gamma}]\,S(\psi)\,d\omega + \Delta\zeta_{\text{р}}; \quad \text{(II.1.52)}$$

$$\xi_{\text{гр}} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}[(g-\gamma)_{\text{нтр}} + 2\pi f\,\delta H^{\gamma}]\,Q(\psi)\cos A\,dA\,d\psi + \Delta\xi_{\text{р}}; \quad \text{(II.1.53)}$$

$$\eta_{\text{гр}} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}[(g-\gamma)_{\text{нтр}} + 2\pi f\,\delta H^{\gamma}]\,Q(\psi)\sin A\,dA\,d\psi + \Delta\eta_{\text{р}},$$

где $S(\psi)$ и $Q(\psi)$ — функции Стокса и Венинг-Мейнеса. Стоящие в квадратных скобках выражения представляют собой аномалии Фая, вычисленные методом косвенной интерполяции через аномалии в неполной топографической редукции (см. II.1.18). Высоты квазигеоида и составляющие уклонения отвеса, вычисленные при помощи аномалий Фая, соответствуют конденсации топографических масс на поверхность $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$, проходящую через данную точку. $\Delta\zeta_{\text{р}}$, $\Delta\xi_{\text{р}}$, $\Delta\eta_{\text{р}}$ — поправки в высоту квазигеоида и в составляющие уклонения отвеса, являющиеся разностью влияний топографических масс на ζ, $\xi_{\text{гр}}$ и $\eta_{\text{гр}}$ при их действительном расположении и конденсации на поверхность $H = H_0^{\gamma} = \text{const}$. Эти поправки вычисляются по формулам:

$$\Delta\zeta_{\text{р}} = \frac{f\delta R^2}{\gamma}\iint\limits_{\omega}\left(\ln\frac{r+h}{r_0} - \frac{h}{r_0}\right)d\omega;$$

$$\Delta\xi_{\text{р}} = \frac{\rho f\,\delta R^2}{\gamma}\iint\limits_{\omega}\frac{h}{r_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\cos A\,d\omega;$$

$$\Delta\eta_{\text{р}} = \frac{\rho f\,\delta R^2}{\gamma}\iint\limits_{\omega}\frac{h}{r_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\sin A\,d\omega,$$

где δ — плотность топографических масс; $h = H^{\gamma} - H_0^{\gamma}$ — разность высот текущей и данной точек; r — расстояние между данной точкой и текущей; $r_0 = 2R\sin\frac{\psi}{2}$. По оценкам Л. П. Пеллинена, член $\Delta\zeta_{\text{р}}$ не превышает 0,5 м, величины $\Delta\xi_{\text{р}}$ и $\Delta\eta_{\text{р}}$ в горах могут достигать нескольких секунд.

Д. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА В ГЕОДЕЗИИ

II.1.22. Определение геодезических координат относительно референц-эллипсоида

При изучении отдельных частей (регионов) Земли в пределах одного государства или групп государств в качестве координатной поверхности принимается поверхность референц-эллипсоида. Геодезические координаты относительно референц-эллипсоида любого пункта триангуляции вычисляются по формулам:

$$\overline{B} = \overline{B}_0 + \Delta B; \quad \overline{L} = \overline{L}_0 + \Delta L; \quad \overline{H} = \overline{H}_0 + \Delta H,$$

где $\overline{B}_0$, $\overline{L}_0$, $\overline{H}_0$ — геодезические координаты исходного пункта триангуляции, обусловленные способом ориентирования референц-эллипсоида в теле Земли; ΔB, ΔL — приращения широты и долготы, получаемые в результате решения прямой геодезической задачи на эллипсоиде; ΔH — приращение геодезической высоты относительно референц-эллипсоида. ΔH может быть представлено в виде

$$\Delta H = \Delta H^{\gamma} + \Delta\zeta, \quad \text{(II.1.54)}$$

где ΔH^{γ} — приращение нормальной высоты; $\Delta\zeta$ — приращение высоты квазигеоида относительно референц-эллипсоида.

Приращения нормальных высот находят по результатам геометрического нивелирования, сопровождаемого измерениями силы тяжести. Превышения квазигеоида определяются методом астрономо-гравиметрического нивелирования. Прежде чем решать прямую геодезическую задачу, необходимо все измеренные на физической поверхности элементы (углы и базисы) редуцировать на поверхность референц-эллипсоида. Для этого необходимо знать астрономо-геодезическое уклонение отвеса в каждом пункте триангуляции и геодезическую высоту $\overline{H}$ пункта над поверхностью референц-эллипсоида. Составляющие $\xi_{\text{АГ}}$ и $\eta_{\text{АГ}}$ астрономо-геодезического уклонения отвеса в плоскостях меридиана и первого вертикала вычисляют по формулам (II.1.35). Уклонение отвеса в плоскости, имеющей азимут A, определяется формулой

$$\vartheta_{\text{АГ}} = \xi_{\text{АГ}}\cos A + \eta_{\text{АГ}}\sin A. \quad \text{(II.1.55)}$$

Поскольку астрономо-геодезические уклонения отвеса по формулам (II.1.35) могут вычисляться только в тех пунктах триангуляции, в которых определяются астрономические координаты φ и λ, а такие пункты находятся друг от друга на расстояниях порядка 70—100 км, во всех остальных пунктах астрономо-геодезические уклонения отвеса вычисляют методом интерполяции с использованием гравиметрических уклонений отвеса.

Таким образом, чтобы вычислить приращения координат ΔB, ΔL, ΔH, необходимо наличие гравиметрической съемки. Однако эта съемка должна быть не мировой (как в случае определения общей фигуры Земли), а только местной (т. е. в пределах некоторой ограниченной области). Эта съемка используется для решения следующих задач: 1) для вычисления поправок в измеренные превышения с целью получения разностей нормальных высот; 2) для проведения астрономо-гравиметрического нивелирования; 3) для интерполирования уклонений отвеса; 4) для получения геодезических координат астрономических пунктов, не являющихся пунктами триангуляции.

II.1.23. Вычисление разностей нормальных высот

Рабочая формула для вычисления разности нормальных высот между двумя реперами A и B имеет вид:

$$\Delta H^{\gamma}_{AB} = \Delta h_{AB} + \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m}\Delta h_{AB} + \frac{\gamma_0^A - \gamma_0^B}{\gamma_m} H^{\gamma}_m, \quad \text{(II.1.56)}$$

где Δh_{AB} — измеренное превышение между реперами; $\Delta H^{\gamma}_{AB} = H^{\gamma}_B - H^{\gamma}_A$; $(g-\gamma)_m$ и H^{γ}_m — средняя аномалия силы тяжести и средняя высота между реперами; γ_m — приближенное значение нормальной силы тяжести, принимаемое постоянным для всей территории страны и равное 9,8 м·с$^{-2}$ *.

Когда нивелирный ход проходит вдоль полигона $ABC\ldots N$ и имеет значительную протяженность, то разность нормальных высот между конечной и начальной точками хода находят по формуле

$$H^{\gamma}_N - H^{\gamma}_A = \sum_A^N \Delta h_{\text{изм}} + \sum_A^N \left(\gamma_0^n - \gamma_0^{n+1}\right)\frac{H^{\gamma}_m}{\gamma_m} + \sum_A^N \frac{(g-\gamma)_m}{\gamma_m}\Delta h_{\text{изм}}. \quad \text{(II.1.57)}$$

II.1.24. Вычисление превышений квазигеоида

Формула, определяющая превышения квазигеоида между пунктами A и B, имеет вид:

$$-\left(\zeta^B_{\text{АГ}} - \zeta^A_{\text{АГ}}\right) = -\Delta\zeta_{\text{АГ}} = \int_A^B \vartheta_{\text{АГ}}\, dl + \int_A^B \frac{g-\gamma}{\gamma_m}\, dh. \quad \text{(II.1.58)}$$

Здесь интегрирование производится вдоль звена триангуляции между пунктами A и B; $(g-\gamma)$ — аномалия в свободном воздухе; $\vartheta_{\text{АГ}}$ — астрономо-геодезическое уклонение отвеса в направлении линии AB, вычисляемое по формуле (II.1.55).

Формула (II.1.58) принципиально решает вопрос об определении превышений квазигеоида. Первый член правой части является главным, второй — поправкой за непараллельность уровенных поверхностей нормального поля силы тяжести. Ввиду его малости им обычно пренебрегают. Для вычисления интеграла $\int_A^B \vartheta_{\text{АГ}}\, dl$ требуется знать в каждой точке линии AB астрономо-геодезические уклонения отвеса. При астрономическом нивелировании предполагается линейное изменение

* Инструкция по вычислению нивелировок. М., Недра, 1971.

составляющей уклонения отвеса $\vartheta_{\text{АГ}}$ между пунктами триангуляции, в которых произведены астрономические определения. В таком случае

$$\int_A^B \vartheta_{\text{АГ}}\, dl = \frac{l}{2}\left(\vartheta^A_{\text{АГ}} + \vartheta^B_{\text{АГ}}\right),$$

где l — расстояние между пунктами AB. Таким образом,

$$-\Delta\zeta_{\text{АГ}} = \frac{\vartheta^A_{\text{АГ}} + \vartheta^B_{\text{АГ}}}{2} l. \quad \text{(II.1.59)}$$

Точность астрономического нивелирования зависит главным образом от того, насколько действительные уклонения отвеса $\vartheta_{\text{АГ}}$ отличаются от интерполированных. Средняя квадратическая ошибка астрономического нивелирования по линии длиной L (км)

$$m_\zeta = \frac{m_\vartheta}{\rho} 10^3 \sqrt{l \cdot L}; \quad m_\vartheta = 0{,}17'' \sqrt{l}.$$

Для $l = 100$ км имеем $m_\vartheta = 1{,}7''$, $m_\zeta = 5$ м при $L = 4000$ км. Как видно, ошибки нивелирования оказываются слишком большими. Существенный положительный эффект дает сгущение астропунктов. Так, если $l = 36$ км, то $m_\vartheta = 1{,}0''$, $m_\zeta = 1{,}9$ м при $L = 4000$ км.

Для получения рабочей формулы астрономического нивелирования подставим (II.1.55) в (II.1.59) и используем равенства:

$$l\cos A = R\,\Delta B; \quad l\sin A = R\cos B_m\,\Delta L,$$

где R — средний радиус Земли; B_m — средняя широта линии AB; ΔB и ΔL — разности широт и долгот астропунктов соответственно. Рабочая формула имеет вид:

$$-\Delta\zeta_{\text{АГ}} = 0{,}00449\left[\left(\xi^A_{\text{АГ}} + \xi^B_{\text{АГ}}\right)\Delta B + \left(\eta^A_{\text{АГ}} + \eta^B_{\text{АГ}}\right)\cos B_m\,\Delta L\right],$$

где ΔB и ΔL — в минутах; $\xi_{\text{АГ}}$, $\eta_{\text{АГ}}$ — в секундах; $\Delta\zeta_{\text{АГ}}$ — в метрах.

В Советском Союзе применяется метод астрономо-гравиметрического нивелирования, разработанный М. С. Молоденским в 1937 г. В качестве исходных данных для определения превышения квазигеоида между пунктами триангуляции A и B необходимо иметь значения $\xi^A_{\text{АГ}}$, $\eta^A_{\text{АГ}}$, $\xi^B_{\text{АГ}}$, $\eta^B_{\text{АГ}}$ и гравиметрическую съемку некоторой области Σ, внутри которой находится звено триангуляции AB. Радиус этой области должен быть в 3—4 раза больше радиуса области, в пределах которой производится интерполирование.

Формула для определения превышений квазигеоида методом астрономо-гравиметрического нивелирования имеет вид:

$$\zeta^B - \zeta^A = -\frac{\vartheta^A_{\text{АГ}} + \vartheta^B_{\text{АГ}}}{2} l + \left[\zeta^B(\Sigma) - \zeta^A(\Sigma) + \frac{\vartheta(A,\Sigma) + \vartheta(B,\Sigma)}{2} l\right]. \quad \text{(II.1.60)}$$

Здесь $\vartheta^A_{\text{АГ}}$ и $\vartheta^B_{\text{АГ}}$ — астрономо-геодезические уклонения отвеса в пунктах триангуляции A и B в направлении линии AB; l — расстояние между пунктами; $\vartheta(A,\Sigma)$ и $\vartheta(B,\Sigma)$ — гравиметрические уклонения отвеса в том же направлении AB в пунктах A и B, обусловленные

влиянием аномалий силы тяжести в области Σ; $\zeta^B(\Sigma)$ и $\zeta^A(\Sigma)$ — высоты квазигеоида в пунктах A и B, обусловленные влиянием области Σ. Каждый из членов, входящих в (II.1.60), можно вычислить отдельно, пользуясь формулами Стокса (II.1.50) и Венинг-Мейнеса (II.1.51).

Первый член формулы (II.1.60) представляет собой результат астрономического нивелирования, второй член — гравиметрическую поправку, обусловленную нелинейностью изменения уклонений отвеса между астрономическими пунктами.

Если высоты квазигеоида, входящие в формулу (II.1.60), вычислять по формуле Стокса, а гравиметрические уклонения отвеса — по формулам Венинг-Мейнеса, то зону интегрирования необходимо принять общей для обоих пунктов. Это условие соблюдается при применении эллиптической палетки для вычисления гравиметрической поправки.

Можно вычислять гравиметрическую поправку, учитывая аномалии силы тяжести в круговых областях радиуса $R_0 = R\psi_0$ вокруг каждого из астропунктов *. В этом случае вместо $\zeta(\Sigma)$ следует вычислять $\Delta\zeta(\Sigma)$ по видоизмененной формуле Стокса:

$$\Delta\zeta(\Sigma) = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{2\pi}\int_0^{\psi_0}(g-\gamma)\,[S(\psi)-S(\psi_0)]\sin\psi\,dA\,d\psi, \quad (II.1.61)$$

где $S(\psi)$ — функция Стокса; $S(\psi_0)$ — значение этой функции на границе круговой области ψ_0.

Формулу (II.1.60) удобнее представить в виде:

$$\zeta^B-\zeta^A = -\left\{\left[\vartheta^A_{A\Gamma}-\vartheta(A,\,\Sigma)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\vartheta^B_{A\Gamma}-\vartheta(B,\,\Sigma)\right]\right\}\frac{l}{2}+\Delta\zeta^B(\Sigma)-\Delta\zeta^A(\Sigma),$$

где $\vartheta(A,\,\Sigma)$ и $\vartheta(B,\,\Sigma)$ — гравиметрические уклонения отвеса, вычисленные с учетом аномалии в пределах зоны радиуса $R\psi_0$ вокруг каждого астропункта; величины $\Delta\zeta^B(\Sigma)$ и $\Delta\zeta^A(\Sigma)$ вычисляются с учетом аномалий той же зоны. Радиус зоны интегрирования $R\psi_0$ при астрономо-гравиметрическом нивелировании в СССР принят равным 305,4 км.

Рабочая формула для вычисления превышений квазигеоида (в м) имеет вид:

$$\zeta^B-\zeta^A = \Delta\zeta^B(\Sigma)-\Delta\zeta^A(\Sigma)-$$

$$-0{,}00449\,[(\Delta\xi_A+\Delta\xi_B)\,\Delta B+(\Delta\eta_A+\Delta\eta_B)\cos B_m\,\Delta L],$$

где

$$\Delta B = B_B-B_A,\quad \Delta L = L_B-L_A,\quad B_m=(B_A+B_B)/2 \text{ (угл. мин)};$$

$$\Delta\xi = \xi_{A\Gamma}-\xi_{\Gamma p}-0{,}171H^{\gamma}\sin 2B,\quad \Delta\eta=\eta_{A\Gamma}-\eta_{\Gamma p}\text{ (угл. с)}.$$

Поправку за кривизну нормальной силовой линии в равнинных районах можно не учитывать.

По разностям уклонений отвеса между соседними астрономическими пунктами вычисляют $m_{\Delta\vartheta}$ — среднюю квадратическую ошибку вывода

* *Остач О. М.* К методике астрономо-гравиметрического нивелирования. — Реферативный сборник ЦНИИГАиК, М., 1970, вып. 6.

разности астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса. Затем находят так называемую километровую ошибку астрономо-гравиметрического нивелирования

$$\mu_\zeta = m_{\Delta\vartheta}\sqrt{l}.$$

Если выразить величину μ_ζ в см, то будем иметь

$$\mu_\zeta = \frac{10^5}{\rho}\,m_\Delta\sqrt{l}.$$

Ошибка астрономо-гравиметрического нивелирования хода длиной L

$$m_\zeta = \mu_\zeta\sqrt{L}.$$

В астрономо-геодезической сети СССР в среднем $m_{\Delta\vartheta} = 0{,}6''$, $l = 100$ км. При такой точности требование $m_\zeta = 3$ м может быть удовлетворено даже при $L = 10\,000$ км.

II.1.25. Методика вычислений гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида

Вычисление гравиметрических уклонений отвеса и аномалий высот по формулам Венинг-Мейнеса и Стокса в пределах зоны Σ радиуса $R\psi_0 = 305{,}4$ км выполняется методом численного интегрирования *. Область в радиусе 48,5 км от астрономического пункта учитывают по гравиметрической карте, применяя палетку В. Ф. Еремеева, влияние же аномалий в области, ограниченной радиусами 48,5 и 305,4 км, вычисляют на ЭВМ с использованием средних аномалий Фая в трапециях $5'\times 7{,}5'$. При этом аномалии Фая представляют в виде (II.1.41), т. е. применяют косвенную интерполяцию аномалий Фая между гравиметрическими пунктами через неполные топографические аномалии. При вычислении влияния зоны радиуса 48,5 км отдельно учитывают влияние аномалий $(g-\gamma)_{нтр}$ по гравиметрическим картам, а влияние рельефа — по топографическим и гипсометрическим. В последнем случае в соответствующих формулах должен стоять коэффициент редукции Буге $2\pi f\delta$, равный 0,1119 при плотности δ, принятой равной 2,67 г/см^3.

Палетки изготовляют на прозрачной основе, на которую наносят шесть кольцевых зон, разбитых на 16 равных секторов (рис. 33). Численное интегрирование при помощи палетки производится следующим образом.

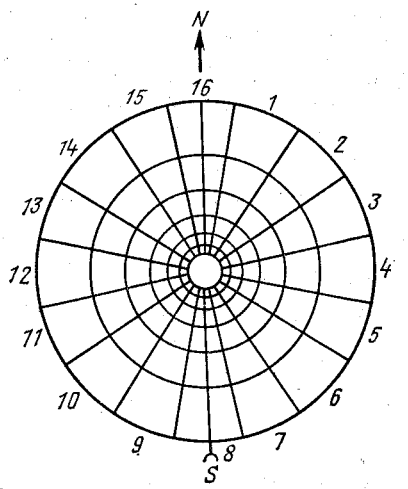


Рис. 33. Круговая палетка Еремеева

* Методика вычислений дается в соответствии с Наставлением по вычислению гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида. — 2-е изд., М., ОНТИ ЦНИИГАиК, 1974.

Совместив центр палетки с определяемым пунктом, линию NS — с меридианом, определяют среднее по площади значение аномалии в неполной топографической редукции или среднюю высоту в зависимости от того, влияние какого члена формулы (II.1.41) вычисляется, и умножают на коэффициент, соответствующий влиянию каждой трапеции на величины ζ, ξ и η. Внутри круга с наименьшим радиусом иногда выделяют дополнительные кольцевые зоны с таким же числом трапеций в зоне ($n = 16$), как и в зонах, указанных на рис. 33.

Рабочие формулы для вычисления влияния аномалий (формулы для вычисления влияния высот аналогичны, только перед знаками Σ следует поставить коэффициент $2\pi f\delta = 0{,}1119$):

$$\xi(\Sigma) = \xi_0 + \sum_{i=1}^{VI}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{ik}\,a_{ik};$$

$$\eta(\Sigma) = \eta_0 + \sum_{i=1}^{VI}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{ik}\,a'_{ik};$$

$$\Delta\zeta(\Sigma) = \zeta_0 + \sum_{i=1}^{VI}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{ik}\,b_{ik},$$

где Σ — область учитываемых аномалий радиусом 48,5 км; i — номер зоны; k — номер сектора; $(g-\gamma)_{ik}$ — среднее значение аномалии в трапеции ik; a_{ik}, a'_{ik}, b_{ik} — соответствующие коэффициенты. Радиусы концентрических зон следующие:

Номер зоны	*Радиус, км*
I	5,0
II	7,3
III	10,7
IV	15,7
V	22,8
VI	33,3
	48,5

Влияние аномалий этих зон на величины $\Delta\zeta(\Sigma)$, $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ подсчитывается по формулам:

$$\Delta\zeta_{I-VI} = 14\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{I,\,k} + 21\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{II,\,k} +$$

$$+ 30\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{III,\,k} + 44\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{IV,\,k} +$$

$$+ 66\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{V,\,k} + 85\cdot10^{-10}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{VI,\,k}, \quad \text{(II.1.62)}$$

если аномалии даны в м·с$^{-2}$, то $\Delta\zeta(\Sigma)$ получается в метрах;

$$\xi_{I-VI} = -0{,}005''\sum_{i=I}^{VI}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{ik}\cos A_k;$$

$$\eta_{I-VI} = -0{,}005''\sum_{i=I}^{VI}\sum_{k=1}^{16}(g-\gamma)_{ik}\sin A_k, \quad \text{(II.1.63)}$$

где $A_k = \pi k/8$, $k = 1, \ldots, 16$; $i = I, \ldots, VI$.

Наибольшие трудности вызывает учет влияния центральной зоны радиусом 5 км. В зависимости от сложности поля аномалий и высот внутри пятикилометровой зоны выделяют кольцевые зоны такого же влияния на уклонения отвеса, как зоны I—VI. Они обозначаются латинскими буквами. Для случая наиболее сложного поля аномалий и высот выделяют шесть зон $A, \ldots, F$.

Вычисления влияния этих зон на величины $\Delta\zeta(\Sigma)$, $\xi(\Sigma)$ и $\eta(\Sigma)$ производят по формулам (II.1.62) и (II.1.63) с заменой цифр I, ..., VI буквами $A, B, \ldots, F$ соответственно. Коэффициенты при вычислении ξ_{A-F} и η_{A-F} остаются теми же, что и в формулах (II.1.63) (т. е. равны 0,005), а коэффициенты при вычислении $\Delta\zeta_{A-F}$ будут другими, чем в формуле (II.1.62). Их значения (b), как и значения радиусов зон, приводятся ниже:

Зона	*Радиус, км*	$b\cdot10^{-10}$ с$^{-2}$
A	5,000	10
B	3,419	7
C	2,338	5
D	1,599	3
E	1,094	2
F	0,748	2
	0,511	

Влияние нулевой зоны (радиусом r_0) на уклонения отвеса подсчитывают по аномалиям и высотам в восьми точках, расположенных на окружности произвольно выбранного радиуса ρ_0 и в восьми точках на окружности радиуса $r_{ср} = (\rho_0 + r_0)/2$. При выводе формулы для вычисления влияния нулевой зоны радиусом r_0 на уклонения отвеса в интервале от 0 до ρ_0 применяют метод градиентов, в интервале от ρ_0 до r_0 — формулу Гаусса с одной ординатой:

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} = -\frac{\rho}{8\gamma}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(\rho_0)\begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix} -$$

$$-\frac{\rho}{8\gamma}\frac{(r_0-\rho_0)}{r_{ср}}\sum_{k=1}^{8}\Delta g_k(r_{ср})\begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix},$$

где $\Delta g_k(\rho_0)$ — аномалия силы тяжести в точке k на окружности радиусом ρ_0; $\Delta g_k(r_{ср})$ — аномалия в аналогичной точке на окружности радиусом $r_{ср}$; $A_k = \pi k/4$, $k = 1, \ldots, 8$.

В рассматриваемом случае, когда в центральной зоне (радиусом 5 км) палетки выделено 6 кольцевых зон ($A, \ldots, F$), $r_0 = 0{,}511$ км,

$\rho_0 = 0{,}140$ км, $r_{ср} = 0{,}326$ км. Влияние нулевой зоны подсчитывают по формуле

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix}_{0-r_0} = -0{,}02632'' \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho_0) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix} - 0{,}02998'' \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср}) \begin{Bmatrix}\cos A_k\\ \sin A_k\end{Bmatrix}.$$

Влияние на $\Delta\zeta(\Sigma)$ нулевой зоны радиусом r_0, где численное интегрирование проводится по точкам, вычисляется по формуле

$$\Delta\zeta_{0-r_0} = \frac{\rho_0}{8\gamma} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho_0) + \frac{r_0 - \rho_0}{8\gamma} \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср}),$$

где $\Delta g_k(\rho_0)$ — аномалия силы тяжести в точке k, расположенной на окружности радиусом ρ_0, $\Delta g_k(r_{ср})$ — то же на окружности радиусом $r_{ср} = (\rho_0 + r_0)/2$.

Для палетки с зонами A, ..., F имеем: $r_0 = 0{,}511$ км, $\rho_0 = 0{,}140$ км, $r_{ср} = 0{,}326$ км, $\Delta\zeta_{0-r_0} = 0{,}00002 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(\rho)_0 + 0{,}00004 \sum_{k=1}^{8} \Delta g_k(r_{ср})$.

II.1.26. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса

В 1927 г. М. С. Молоденский разработал метод, который позволяет на основании сравнительно редкой сети астрономических пунктов и местной гравиметрической съемки (в пределах области Σ) определить астрономо-геодезические уклонения отвеса в любом промежуточном пункте. Разности составляющих отвеса $\xi_{АГ} - \xi(\Sigma)$, $\eta_{АГ} - \eta(\Sigma)$ различаются из-за несовпадения направлений нормали к референц-эллипсоиду и нормальной силы тяжести и ограничения области интегрирования при вычислении гравиметрического уклонения отвеса. Угол между нормалью к референц-эллипсоиду и направлением нормальной силы тяжести обусловлен кривизной силовой линии нормального поля, которая составляет $0{,}171''H^{\nu}\sin 2B$, и несовпадением геодезического референц-эллипсоида с общим земным эллипсоидом (нормальной Землей). Изменения этого угла при перемещении по поверхности Земли на расстояния порядка 100 км невелики и происходят по линейному закону. Влияние аномалий силы тяжести за пределами области Σ также изменяется линейно при достаточном радиусе $R\psi_0$. Исследования

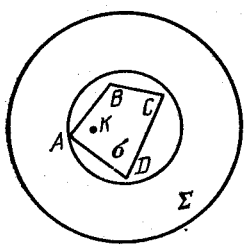


Рис. 34. Область интерполирования аномалий силы тяжести

М. С. Молоденского показали, что радиус области интегрирования Σ должен быть в 2—3 раза больше расстояния между астропунктами. Так, например, внутри некоторой небольшой области σ (рис. 34), ограниченной астропунктами A, B, C, D, можно принять:

$$\xi_{АГ} - \xi(\Sigma) = a\Delta x + b\Delta y + c;$$

$$\eta_{АГ} - \eta(\Sigma) = a_1\Delta x + b_1\Delta y + c_1,$$

где $\Delta x = x - x_{ср}$; $\Delta y = y - y_{ср}$; x, y — плоские прямоугольные координаты пунктов; $x_{ср}$, $y_{ср}$ — средние значения из координат всех астропунктов в области σ.

Коэффициенты для данной области σ находят по методу наименьших квадратов при наличии не менее трех пунктов, не лежащих на одной прямой, для которых известны и астрономо-геодезические и гравиметрические уклонения отвеса, поскольку каждый такой пункт, например A, позволяет составить уравнения вида:

$$a\Delta x^A + b\Delta y^A + c = \xi^A_{АГ} - \xi^A(\Sigma);$$

$$a_1\Delta x^A + b_1\Delta y^A + c_1 = \eta^A_{АГ} - \eta^A(\Sigma).$$

Если для данной области σ известны коэффициенты a, b, c, a_1, b_1, c_1, то для любого пункта этой области (например, K), вычислив гравиметрические уклонения отвеса $\xi^K(\Sigma)$ и $\eta^K(\Sigma)$, можно получить интерполированные уклонения отвеса по формулам:

$$\xi^K_{инт} = \xi^K(\Sigma) + a\Delta x^K + b\Delta y^K + c;$$

$$\eta^K_{инт} = \eta^K(\Sigma) + a_1\Delta x^K + b_1\Delta y^K + c_1. \qquad (II.1.64)$$

Априорная средняя квадратическая ошибка определения составляющих гравиметрических уклонений отвеса по данным равномерной гравиметрической съемки может быть подсчитана по формуле М. С. Молоденского

$$m_\xi = 0{,}15 m_g,$$

где m_g — средняя квадратическая ошибка используемых аномалий Фая [см. формулы (II.1.41)], включая ошибки измерений силы тяжести, а также редукций при получении $(g - \gamma)_\Phi$ в гравиметрических пунктах и ошибки и интерполяции $(g - \gamma)_{интр}$ между гравиметрическими пунктами.

Если полагать, что влияние топографических масс на гравиметрические уклонения отвеса всегда можно учесть с любой необходимой точностью, то величина m_g будет равна полной ошибке интерполяции неполных топографических аномалий $(g - \gamma)_{интр}$, входящих в формулу (II.1.41). Для большей части территории СССР $m_g < 3\cdot10^{-5}$ м·с$^{-2}$, поэтому $m_\xi < 0{,}45''$. Во многих районах СССР $m_g < 2\cdot10^{-5}$ м·с$^{-2}$, а, значит, $m_\xi < 0{,}3''$. В то же время в горах трудно достигнуть точности определения составляющих гравиметрических уклонений отвеса выше $1''$.

Поскольку астрономо-геодезические уклонения отвеса в астропунктах определяются с более низкой точностью, можно контролировать путем сопоставления с гравиметрическими уклонениями отвеса астрономо-геодезические уклонения отвеса, выявлять и исключать грубые ошибки в астрономических определениях. Интерполированные

по формулам (II.1.64) составляющие астрономо-геодезических уклонений отвеса обычно определяют со средними квадратическими ошибками не более 0,5—0,7″, что вполне достаточно в большинстве случаев.

Е. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

II.1.27. Классификация методов

Для определения силы тяжести могут быть использованы различные физические явления, которые зависят от силы тяжести: падение тел, качание маятника, деформация тел под действием постоянной массы, колебания струны, натянутой грузом, поднятие жидкости в капиллярном сосуде и др. Однако при современном состоянии измерительной техники необходимую точность измерения силы тяжести можно получить лишь из ограниченного числа явлений.

Известные методы измерений силы тяжести можно разделить на две группы: динамические и статические. При д и н а м и ч е с к и х методах наблюдается движение тела, а непосредственно измеряемыми величинами являются промежуток времени, в течение которого тело перемещается из одной фиксированной точки в другую, и расстояние между этими точками. При с т а т и ч е с к и х методах наблюдается положение равновесия тела, при этом непосредственно измеряемой величиной является линейное или угловое смещение тела при переходе из одного положения в другое под влиянием изменения силы тяжести.

Определения силы тяжести могут быть абсолютными и относительными.

При а б с о л ю т н ы х определениях измеряют полное значение силы тяжести g в каком-либо пункте. При относительных определениях измеряется разность $\Delta g = g_2 - g_1$ значений силы тяжести между двумя пунктами.

Динамические методы

М а я т н и к о в ы й м е т о д основан на зависимости между периодом T колебаний свободного маятника и величиной силы тяжести g. Эта зависимость для м а т е м а т и ч е с к о г о м а я т н и к а при бесконечно малых колебаниях определяется формулой Гюйгенса:

$$T = \pi \sqrt{l/g}, \qquad (II.1.65)$$

где l — длина математического маятника. Для определения силы тяжести g в соответствии с формулой Гюйгенса необходимо измерить период его колебания и длину. Тогда

$$g = \pi^2 l / T^2. \qquad (II.1.66)$$

Б а л л и с т и ч е с к и й м е т о д, или метод наблюдения свободно падающего тела, имеет в основе известный закон прямолинейного равномерно ускоренного движения свободно падающего тела:

$$h = h_0 + v_0 t + gt^2/2, \qquad (II.1.67)$$

где h_0, v_0 — путь и скорость тела в начале счета времени; h — путь, пройденный телом за время t.

Регистрируя значения отрезков пути h_i, соответствующие моментам времени t_i, можно составить систему уравнений вида (II.1.67), решение которой по методу наименьших квадратов даст искомое неизвестное g.

М е т о д н а б л ю д е н и й с о б с т в е н н ы х п о п е р е ч н ы х к о л е б а н и й струны (металлической проволоки или ленты), натянутой грузом. Частота f колебаний идеально гибкой струны связана с ускорением силы тяжести выражением

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}}, \qquad (II.1.68)$$

где M — масса груза; L — длина струны; ρ — линейная плотность струны ($г \cdot см^{-1}$). Прибор, в котором использован этот принцип, называется с т р у н н ы м г р а в и м е т р о м.

Статический метод

Он основан на точном взвешивании тела постоянной массы M, т. е. на компенсации силы тяжести Mg эталонной силой F, при которой достигается статическое равновесие массы:

$$Mg + F = 0.$$

В качестве эталонной используют упругую силу деформации нитей и пружин, а также силу, действующую на проводник с током в магнитном поле. Прибор для измерений статическим методом называется с т а т и ч е с к и м г р а в и м е т р о м или просто гравиметром.

В настоящее время к точности измерений силы тяжести предъявляют следующие требования:

для общей характеристики поля и исследования строения земной коры на неизученных территориях суши и моря . . .	$(5 \div 10) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$;
для решения большинства задач геодезии	$(0{,}5 \div 1) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$;
для целей разведки полезных ископаемых	$(0{,}02 \div 0{,}5) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$;
для создания опорных гравиметрических сетей и для изучения изменений силы тяжести во времени	$(0{,}01 \div 0{,}10) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$.

Дальнейшее повышение точности требуется для изучения приливных вариаций силы тяжести. Таким образом, точность измерений силы тяжести лежит в весьма широком диапазоне $(10^{-9} \div 10^{-5})\, g$.

II.1.28. Абсолютные определения силы тяжести

При абсолютных определениях силы тяжести наибольшего внимания заслуживают маятниковые и баллистические методы.

Маятник, применяемый при гравиметрических наблюдениях, представляет собой твердое тело, совершающее периодические колебания около горизонтальной оси. Такой маятник называется ф и з и ч е с к и м. Период колебания физического маятника связан с ускорением силы тяжести формулой

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right), \qquad (II.1.69)$$

где L — приведенная длина физического маятника, равная расстоянию между точкой подвеса и центром качания; эти две точки называются взаимными; α — амплитуда колебаний.

При измерениях силы тяжести амплитуда колебаний маятника не превышает 1°, а в большинстве случаев составляет 30—40′. В этом случае в формуле (II.1.69) можно сохранить только первый поправочный член, заменив в нем $\sin(\alpha/2)$ на $\alpha/2$:

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right). \qquad \text{(II.1.70)}$$

При абсолютных определениях применяют о б о р о т н ы е м а я т н и к и. Оборотный маятник имеет две параллельные оси качаний, проходящие через взаимные точки. Эти оси являются ребрами призм, на которых поочередно качается оборотный маятник. Если при качании маятника на каждой из призм периоды окажутся одинаковыми, то приведенная длина маятника получается путем непосредственного измерения расстояния между ребрами призм. Но в реальном оборотном маятнике из-за неизбежных погрешностей его изготовления и влияния внешних условий расстояние между осями подвеса не будет точно равно приведенной длине. Поэтому периоды колебаний T_1 и T_2, измеренные при двух положениях маятника, будут несколько различны. В этом случае вычисляют период колебаний T маятника, приведенная длина L которого точно равна расстоянию между призмами:

$$T^2 = \frac{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}{a_1 - a_2}, \qquad \text{(II. 1.71)}$$

где a_1 и a_2 — расстояния от центра тяжести маятника до осей подвеса. При достаточном различии величин a_1 и a_2 их с достаточной точностью можно найти из измерений. Непосредственно измеренные периоды T_1 и T_2 введением поправки за амплитуду приводят к значениям, соответствующим случаю бесконечно малых колебаний, т. е. формулу (II.1.69) приводят к виду (II.1.65). Результаты редуцируют к идеальным условиям наблюдений в вакууме при неизменной температуре. Затем, определив L путем измерения расстояния между осями и период T [по формуле (II.1.71)], получают абсолютное значение силы тяжести $g = \pi^2 L/T^2$.

Если задана точность результата 10^{-6} м·с$^{-2}$, то при наблюдениях с полусекундным ($T = 0{,}5$ с, $L \approx 25$ см) маятником приведенную длину требуется определять с точностью 10 нм, а период колебаний — с точностью 10^{-8} с. Измерения небольших отрезков с точностью 10 нм вполне осуществимы интерференционным методом. Длительность одного колебания маятника удается измерить лишь с точностью 10^{-5}—10^{-6} с. Поэтому для определения T измеряют с помощью стандарта частоты длительность большого числа (порядка тысячи) непрерывных колебаний с точностью 10^{-5} с и обеспечивают необходимую точность.

Измерения силы тяжести производят также с н и т я н ы м м а я т н и к о м, представляющим собой подвешенный на проволоке груз правильной формы (шар, чечевица) и являющимся некоторым приближением к математическому маятнику. Без существенного увеличения веса можно изготовить нитяной маятник большой длины, что позволяет измерять длину с меньшей относительной погрешностью. Опыт показывает, что при абсолютных маятниковых определениях очень трудно учесть погрешность приведенной длины, вносимую сложной формой лезвия маятника, взаимодействием лезвия с опорой, которое приводит к деформации как лезвия, так и площадки под действием веса маятника, их износом и силами трения. По этой причине результаты измерений не дают полной уверенности в отсутствии систематических погрешностей.

В настоящее время мировая опорная гравиметрическая сеть образована и уравнена на основании многочисленных гравиметрических наблюдений и рекомендована к применению XV Генеральной ассамблеей МГГС, которая состоялась в Москве в 1971 г. Сеть получила название Международной гравиметрической стандартной сети 1971 г. — МГСС-71.

Ускорения силы тяжести в любом пункте сети МГСС-71 оценивается погрешностью менее $2 \cdot 10^{-6}$ м·с$^{-2}$.

Баллистический метод основан на законе прямолинейного ускоренного движения свободно падающего тела. В простейшем случае, при $h_0 = 0$, $v_0 = 0$ формула (II.1.67) принимает вид: $h = gt^2/2$.

При абсолютных определениях регистрируют отрезки пути, пройденного телом в течение заданного времени, или время прохождения заданных отрезков. Точки прямолинейной траектории, в которых фиксируется положение тела, называют с т а н ц и я м и. В общем случае, $h_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, для определения g необходимо зафиксировать как минимум три положения тела и решать систему уравнений (II.1.67).

Существует несколько вариантов баллистического метода. В зависимости от траектории движения тела их делят на симметричные и несимметричные. При с и м м е т р и ч н ы х способах (практически применяется способ двух станций) наблюдают свободное движение подброшенного вверх тела на восходящей и нисходящей ветвях прямолинейной траектории, а при н е с и м м е т р и ч н ы х способах (трех или четырех станций) — только вниз.

При симметричном способе двух станций фиксируют прохождение пробной массы через неподвижные горизонтальные плоскости двух станций сначала при движении вверх, а затем при движении вниз. Расстояние H между станциями задано эталоном длины или измеряется в процессе наблюдений.

Пусть пробная масса пересекает дважды нижнюю и верхнюю плоскости через промежутки времени соответственно T_1 и T_2. Путь H_1 от нижней станции до вершины траектории за время $T_1/2$ равен

$$H_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{T_1}{2}\right)^2 = g\frac{T_1^2}{8},$$

а путь H_2 за время $\frac{T_2}{2}$ от верхней станции до вершины

$$H_2 = \frac{g}{2}\left(\frac{T_2}{2}\right)^2 = g\frac{T_2^2}{8}.$$

Поэтому

$$H = H_1 - H_2 = g\frac{T_1^2 - T_2^2}{8} \text{ и } g = \frac{8H}{T_1^2 - T_2^2}. \qquad \text{(II.1.72)}$$

Таким образом, если H известно, то для определения g достаточно измерить отрезки времени T_1 и T_2.

Формула (II.1.72) получена в предположении, что ускорение силы тяжести во всех точках траектории постоянно. В действительности величина g с высотой изменяется и это обстоятельство необходимо учитывать.

Точные абсолютные определения требуют регистрации промежутков времени продолжительностью порядка десятых долей секунды с точностью в несколько наносекунд и измерения отрезков (порядка 1 м) с ошибкой менее сотой доли микрометра, т. е. около сотой доли

длины волны света. Достаточную точность измерения времени обеспечивают кварцевые или рубидиевые стандарты частоты, измерения расстояний производятся интерференционным методом.

В настоящее время баллистический метод позволяет определить абсолютное значение силы тяжести g с погрешностью 10^{-7} м·с$^{-2}$. Это позволяет, во-первых, применять баллистический метод для выявления вариаций силы тяжести во времени с целью изучения движений земной коры, движения полюсов и многих других геодинамических явлений. Во-вторых, абсолютные определения с транспортабельным прибором дают возможность осуществить независимый контроль опорных гравиметрических сетей, которые в настоящее время создаются относительными измерениями, а в будущем — базировать сети на абсолютных определениях, избегая их многоступенчатое строение и соответствующее накопление ошибок.

II.1.29. Относительные определения силы тяжести

Относительные определения силы тяжести могут производиться как при помощи маятников, так и с использованием гравиметров. Принцип относительных маятниковых определений основывается на предположении, что приведенная длина L маятника при наблюдениях в различных пунктах остается неизменной.

Пусть период T_1 колебаний маятника измерен на гравиметрическом пункте, в котором ускорение силы тяжести g_1 известно. Требуется определить значение силы тяжести g_2 во втором пункте, где период T_2 колебаний маятника измеряется. Считая приведенную длину маятника L постоянной, будем иметь:

$$T_1 = \pi\sqrt{L/g_1}; \qquad T_2 = \pi\sqrt{L/g_2}.$$

Возведя эти соотношения в квадрат и разделив почленно, получим

$$g_2/g_1 = T_1^2/T_2^2,$$

откуда

$$g_2 = g_1 T_1^2/T_2^2. \qquad \text{(II.1.73)}$$

Полученное соотношение показывает преимущество маятниковых относительных определений перед абсолютными. Во-первых, исключается определение приведенной длины маятника, что связано с неподдающимися контролю ошибками; во-вторых, можно не учитывать те источники систематических ошибок, влияние которых почти одинаково в обоих пунктах.

На практике чаще всего вычисляют приращение силы тяжести $\Delta g = g_2 - g_1$. Обозначив разность периодов $T_2 - T_1 = \Delta T$, представим (II.1.73) в виде:

$$\Delta g = g_2 - g_1 = -2g_1\frac{\Delta T}{T_1} + 3g_1\left(\frac{\Delta T}{T_1}\right)^2. \qquad \text{(II.1.74)}$$

Для определения необходимой точности измерений вычислим величину коэффициента при ΔT в первом члене формулы (II.1.74). Полагая $g_1 = 9{,}8$ м·с$^{-2}$, $T_1 \approx 0{,}5$ с, найдем $2g_1\frac{\Delta T}{T_1} = 39{,}2\Delta T$ м·с$^{-2}$, т. е. изменение периода колебаний на $1\cdot10^{-8}$ с соответствует изменению силы тяжести на $4\cdot10^{-7}$ м·с$^{-2}$.

Условия постоянства приведенной длины маятника строго не соблюдается, например, из-за сотрясений при перевозке, стачивания лезвия. Чтобы учесть эти изменения, периодически возвращаются

на исходный пункт для повторных наблюдений, а сами наблюдения выполняют не с одним маятниковым прибором, а с комплектом из трехпяти приборов. Гравиметрическую связь повторяют несколько раз.

При определении g по формулам (II.1.73) и (II.1.74) используют формулу Гюйгенса (II.1.65) для идеального маятника с бесконечно малой амплитудой. Поэтому в наблюденный период вводят поправки за амплитуду, температуру, плотность окружающей среды, частоту кварцевого генератора и др. Точность современных относительных маятниковых определений составляет $(2\div4)\cdot10^{-7}$ м·с$^{-2}$.

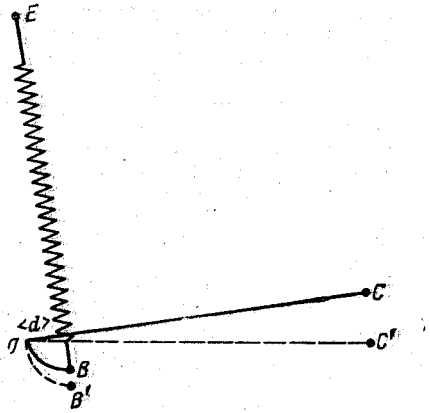


Рис. 35. Схема вертикального сейсмографа Голицына

В статическом методе наблюдают положение равновесия тела, на которое воздействуют сила тяжести и компенсирующая сила. По типу компенсирующей силы гравиметры делят на три группы: газовые гравиметры, в которых сила тяжести компенсируется силой упругости сжатого газа; механические, в которых компенсирующей силой является сила упругой деформации твердых тел (пружин и закрученных нитей); гравиметры, основанные на применении электромагнитных сил. Подавляющее большинство современных гравиметров являются механическими.

Чувствительный элемент механического гравиметра называют упругой системой. Упругие системы изготавливают из плавленного кварца или сплавов металлов; соответственно механические гравиметры делятся на кварцевые и металлические.

По характеру действия упругой системы различают гравиметры с поступательным и с вращательным перемещением массы. Гравиметры с вращательным перемещением массы бывают астазированные и неастазированные. Астазированной называется упругая система, находящаяся в положении равновесия, близком к неустойчивому. При астазировании повышается чувствительность упругой системы, благодаря чему малые изменения силы тяжести вызывают сравнительно большие отклонения рычага от положения равновесия.

Кварцевые астазированные гравиметры (ГАК) устроены по принципу вертикального сейсмографа Голицына (рис. 35). Кварцевый рычаг (маятник) OC имеет отросток OB. Осью вращения рычага является тонкая кварцевая нить, перпендикулярная к плоскости чертежа и проходящая через точку O. Эта нить закручена на некоторый угол так, что рычаг OC занимает горизонтальное положение. К отростку OB в точке B прикреплена вертикальная винтовая пружина BE, которая создает дополнительный упругий момент.

При увеличении силы тяжести рычаг OC сместится и займет положение ниже горизонта OC', а отросток OB займет положение OB'. Это вызовет уменьшение плеча d упругой силы пружины BE (d — расстояние от оси до линии, соединяющей концы пружины) и рычаг

получит дополнительное перемещение вниз. При уменьшении силы тяжести картина будет обратная, плечо увеличится и рычаг OC дополнительно под действием увеличившегося момента упругой силы пружины BE поднимется.

Для регистрации перемещений подвижного элемента применяют специальные устройства, которые называются индикаторами малых перемещений. В большинстве гравиметров для этой цели используют оптические микроскопы с увеличением в сотни раз. В гравиметрах с автоматической регистрацией и в гравиметрах с дистанционным управлением применяют электроемкостные и фотоэлектрические индикаторы малых перемещений.

Большинство современных гравиметров относятся к группе астазированных с большой и нелинейно изменяющейся чувствительностью упругих систем. Для регистрации показаний этих приборов применяется так называемый нулевой метод, при котором непосредственно измеряемой величиной является вспомогательное усилие или механическое перемещение, прилагаемое к упругой системе, компенсирующее изменение веса постоянной массы гравиметра. При нулевом методе регистрации упругая система при помощи специального компенсационного устройства во всех пунктах приводится в постоянное «нулевое» (или исходное) положение. Компенсационное устройство состоит обычно из вертикально подвешенной винтовой пружины с очень малой упругой постоянной. Натяжение этой пружины определяется положением измерительного винта, снабженного крутильной головкой с делениями: деления соответствуют определенным изменениям силы тяжести. Как правило, упругая система содержит два компенсационных устройства: первое — диапазонное — служит для настройки прибора и позволяет компенсировать значительные изменения силы тяжести; с помощью второго — измерительного — измеряют малые приращения силы тяжести в процессе съемки.

В зависимости от диапазона измерительного устройства различают широкодиапазонные, узкодиапазонные и комбинированные гравиметры. Широкодиапазонные гравиметры называют также геодезическими. Узкодиапазонные гравиметры используют преимущественно для изучения тонкой структуры гравитационного поля, в частности для гравиметрической разведки, поэтому их называют разведочными.

На положение статического равновесия упругой системы влияют изменения температуры и плотности окружающей среды, поэтому в системы гравиметров включают устройства для компенсации влияний температуры и атмосферного давления.

В соответствии с областью применения различают гравиметры наземные (для измерений на суше), донные (для измерений на дне водоемов), морские (для измерений с надводных и подводных судов), аэрогравиметры (для измерений с самолетов и других летательных аппаратов), для регистрации приливных изменений силы тяжести и гравиметры специального назначения (например, для исследования планет).

Наряду с несомненными достоинствами — высокой чувствительностью, портативностью, производительностью, простотой в обращении — гравиметры обладают некоторыми принципиальными недостатками, из которых главным является изменение с течением времени свойств материала упругой системы. Вследствие этого показания гравиметра, находящегося в одном и том же пункте, непрерывно меняются вне связи с изменениями силы тяжести. Явление это носит название смещения нуль-пункта. Работать с таким прибором можно только при условии, что изменения нуль-пункта невелики и пропорциональны во времени. Кроме того, почти у всех гравиметров разность силы тяжести измеряется в единицах шкалы измерительного устройства, в связи с чем возникает необходимость калибровки шкалы — эталонирования гравиметров. Указанные недостатки приводят к необходимости тщательных исследований каждого гравиметра и определяют методику гравиметрических съемок.

Точность определения разности Δg значений силы тяжести при помощи гравиметров в зависимости от типа прибора изменяется в пределах от 10^{-5} до 10^{-8} м·с$^{-2}$.

Относительные определения силы тяжести в настоящее время выполняются также на море и в воздухе. Измерение силы тяжести на море и, особенно, в воздухе представляет собой более сложную задачу, чем измерение на земле. Приходится учитывать особенности условий, в которых производятся измерения силы тяжести, заключающиеся в том, что при морских (воздушных) наблюдениях гравиметрические приборы находятся на подвижном основании вследствие волнений моря (воздушной среды) и движений самого судна (самолета). К ускорению силы тяжести g в этом случае добавляются возмущающие ускорения, достигающие 10—20 % от величины g и в 10^4—10^5 раз превышающие изменения силы тяжести по маршруту.

Возмущающие ускорения раскладываются на вертикальную и горизонтальную составляющие. Если обозначить горизонтальные составляющие возмущающего ускорения через $\ddot{X}$ и $\ddot{Y}$, а вертикальную составляющую через $\ddot{Z}$, то для результирующего ускорения G (мгновенной силы тяжести) получим:

$$G = \sqrt{(g+\ddot{Z})^2 + \ddot{X}^2 + \ddot{Y}^2}.$$

Направление мгновенной силы тяжести не совпадает с отвесной линией и называется мгновенной вертикалью. На чувствительный элемент прибора будет воздействовать проекция величины G на ось чувствительности. При наблюдениях на море для ослабления влияния наклонов и ускорений прибор устанавливают в карданов подвес или на гиростабилизированной платформе. При измерениях динамическим методом влияние возмущающих ускорений и наклонов следует учитывать поправками:

при установке в карданов подвесе:

$$\frac{\overline{\ddot{Z}}^2}{4g} - \frac{\overline{\ddot{X}}^2 + \overline{\ddot{Y}}^2}{2g} + g\frac{\Delta\beta^2}{2}$$ — для маятникового прибора;

$$\frac{\overline{\ddot{Z}}^2}{4g} - \frac{\overline{\ddot{X}}^2 + \overline{\ddot{Y}}^2}{2g} + g\frac{\overline{\Delta\alpha}^2 + \overline{\Delta\beta}^2}{2}$$ — для струнного гравиметра;

при установке на гиростабилизированной платформе:

$$\frac{\overline{\ddot{Z}}^2}{4g} - \frac{\overline{\ddot{X}}^2}{2g} - \overline{\ddot{Y}}^2\beta + g\frac{\overline{\beta}^2}{2}$$ — для маятникового прибора;

$$\frac{\overline{\ddot{Z}}^2}{4g} - \overline{\ddot{X}}\alpha - \overline{\ddot{Y}}\beta + g\frac{\overline{\alpha}^2 + \overline{\beta}^2}{2}$$ — для струнного гравиметра.

В приведенных выше формулах α и β — углы в плоскостях XOZ и YOZ, которые образуют ось чувствительности с истинной вертикалью; $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ — углы в тех же плоскостях между осью чувствительности и мгновенной вертикалью, поскольку из-за трения в осях подвеса и его инерционности ось чувствительности не достигает мгновенной вертикали; $\overline{\ddot{X}}$, $\overline{\ddot{Y}}$, $\overline{\ddot{Z}}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\Delta\alpha}$, $\overline{\Delta\beta}$, $\overline{\ddot{X}\alpha}$, $\overline{\ddot{Y}\beta}$ — средние значения (за

время T одного или любого целого числа колебаний) ускорений, наклонов и произведений ускорений и наклонов соответственно.

Для регистрации ускорений и наклонов применяют акселерометры, горизонтальные маятники с большим периодом собственных колебаний, заполненные вязкой жидкостью уровни. Поправки за возмущающие ускорения и наклоны вводят в среднее значение отсчета $\bar{G}$ за время T и получают $\bar{g}$ — среднее значение силы тяжести на отрезке маршрута, пройденного за это время. В морских гравиметрах фильтрация возмущающих ускорений осуществляется демпфированием упругой системы. Ее рычаг при движении преодолевает сопротивление, которое создает вязкая жидкость, постоянный магнит или воздушный демпфер. Благодаря демпфированию увеличивается инерционность рычага. Поэтому на короткопериодические ускорения качки он реагирует слабо, а медленные изменения g по маршруту судна определяются почти без искажений. Показания гравиметра получаются сглаженными до такой степени, что их можно уверенно осреднять.

При определении силы тяжести на движущемся объекте в результаты наблюдений необходимо вводить еще одну поправку — п о п р а в к у Э т в е ш а. Необходимость введения этой поправки вызывается тем обстоятельством, что при движении объекта, на котором установлен гравиметрический прибор, скорость движения объекта складывается с траекторной скоростью Земли, что ведет к изменению центробежной силы и, следовательно, к изменению измеряемой силы тяжести.

Для сферической Земли поправка Этвеша вычисляется по формуле

$$\Delta g_{Э} = 2\omega v \cos\varphi \sin A + v^2/R,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли; v — линейная скорость движения объекта; A — азимут движения; φ — широта; R — средний радиус Земли. Поскольку $\omega = 7{,}2921 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $R = 6371$ км, выражая скорость в километрах в час, получим (в м·с$^{-2}$):

$$\Delta g_{Э} = (4{,}05v \cos\varphi \sin A + 0{,}0012v^2) \cdot 10^{-5}.$$

Ошибка определения аномалий силы тяжести в открытом океане составляет в лучшем случае $(2 \div 3) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$, а зачастую $(5 \div 7) \times 10^{-5}$ м·с$^{-2}$, что обусловлено главным образом ошибками навигационных данных.

Для измерения силы тяжести в воздухе в 1969 г. в СССР был создан комплект аппаратуры на базе струнных датчиков. Точность измерений им составляет $(5 \div 6) \cdot 10^{-5}$ м·с$^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия. М., Недра, 1978.
2. *Шимбирев Б. П.* Теория фигуры Земли. М., Недра, 1975.
3. *Юзефович А. П., Огородова Л. В.* Гравиметрия. М., Недра, 1980.

II.2. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Г. В. Багратуни

II.2.1. Определения

С ф е р о и д и ч е с к а я г е о д е з и я изучает геометрию земного эллипсоида и отображение значительных частей его поверхности на шаре и на плоскости для целей обработки результатов геодезических измерений.

Эллипсоид, определенным образом ориентированный в теле Земли, на поверхность которого проектируют результаты геодезических измерений и на котором вычисляют координаты пунктов геодезических сетей, называется р е ф е р е н ц-э л л и п с о и д о м. Поэтому часто поверхность референц-эллипсоида называют п о в е р х н о с т ь ю о т н о с и м о с т и.

Эллипсоид Красовского, принятый в СССР в 1942 г. в качестве референц-эллипсоида, получен из обработки геодезических, гравиметрических и астрономических материалов СССР, США, Западной Европы и Индии. Сжатие эллипсоида Красовского (1 : 298,3) наилучшим образом удовлетворяет результатам наблюдений искусственных спутников Земли.

Поверхность, ортогональная к направлениям силы тяжести, называется у р о в е н н о й п о в е р х н о с т ь ю. Уровенная поверхность, совпадающая с поверхностью мирового океана в состоянии полного покоя водных масс и продолженная под материками, называется о с н о в н о й у р о в е н н о й п о в е р х н о с т ь ю Земли. Геометрическая фигура, ограниченная этой поверхностью, называется г е о и д о м. Поверхность геоида и основная уровенная поверхность как геометрические поверхности совпадают. Поверхность геоида не имеет складок и ребер, она всюду замкнута, только кривизна ее меняется не математически. Поэтому вычисления на этой поверхности строго-математически невыполнимы.

II.2.2. Земной эллипсоид

Параметры эллипсоида (рис. 36)

a — большая, или экваториальная, полуось:
b — малая, или полярная, полуось;

$$\alpha = (a - b)/a \text{ — полярное сжатие;}$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/a^2 \text{ — квадрат первого эксцентриситета;}$$

$$e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2 \text{ — квадрат второго эксцентриситета;}$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \text{ или приближенно } e^2 = 2\alpha;$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}; \qquad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \qquad b = a\sqrt{1 + e'^2};$$

$$n = (a - b)/(a + b);$$

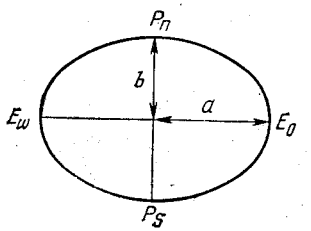
приближенно:

$$\alpha = 2n = e^2/2; \quad e^2 = e'^2 = 2\alpha = 4n; \quad n = \alpha/2 = e^2/4.$$

Параметры эллипсоида Красовского

$a = 6\,378\,245{,}000$ м	$\lg a = 6.804\,701\,197$
$b = 6\,356\,863{,}019$ м	$\lg b = 6.803\,242\,853$
$\alpha = 0{,}003\,352\,3299$	$\lg \alpha = 7.525\,346\,747_{-10}$
$e^2 = 0{,}006\,693\,4216$	$\lg e^2 = 7.825\,648\,182_{-10}$
$e'^2 = 0{,}006738\,5254$	$\lg e'^2 = 7.828\,564\,871_{-10}$

Параметрические линии и системы координат эллипсоида. Параметрическими линиями эллипсоида называются меридианы и параллели. М е р и д и а н — геометрическое место точек равных долгот; п а р а л л е л ь — геометрическое место точек равных широт.



Р и с. 36. Главные оси земного эллипсоида

Геодезическая широта B — острый угол между нормалью и плоскостью экватора (рис. 37). Геодезическая долгота L — двугранный угол между плоскостями начального меридиана (меридиан Гринвича) и меридиана данной точки.

Геоцентрическая широта Φ — угол между радиусом-вектором точки и плоскостью экватора; приведенная широта u — угол между плоскостью экватора и линией, соединяющей с центром эллипсоида точку пересечения ординаты y с окружностью радиусом a (рис. 38).

$$\operatorname{tg}\Phi = (1-e^2)\operatorname{tg}B; \qquad \operatorname{tg}u = \sqrt{1-e^2}\cdot\operatorname{tg}B;$$

$$x = a\cos B/\sqrt{1-e^2\sin^2 B} = a\cos B/W;$$

$$y = a(1-e^2)\sin B/\sqrt{1-e^2\sin^2 B} = a(1-e^2)\sin B/W;$$

$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B}$ — первая функция геодезической широты.

Пространственная система прямоугольных координат с началом в центре эллипсоида (рис. 39).

$$X = x\cos L \text{ или } X = a\cos u\cos L = a\cos B\cos L/W;$$

$$Y = x\sin L \text{ или } Y = a\cos u\sin L = a\cos B\sin L/W;$$

$$Z = y \text{ или } Z = b\sin u = b\sqrt{1-e^2}\sin B/W.$$

Радиусы кривизны (рис. 40).

$M = a(1-e^2)/W^3$ — радиус кривизны меридиана;

$N = a/W$ — радиус кривизны первого вертикала.

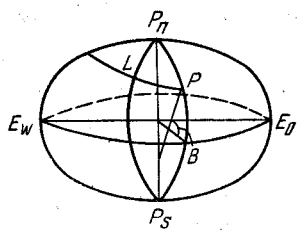
M и N называются главными радиусами кривизны в данной точке поверхности. В точке полюса $N = M$, а во всех других точках $N \geqslant M$;

$R = \sqrt{MN} = a\sqrt{1-e^2}/W^2$ — средний радиус кривизны;

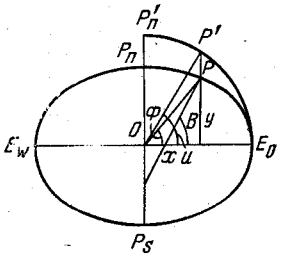
$R_\alpha = MN/(N\cos^2 A + M\sin^2 A)$ — радиус кривизны нормального сечения;

$r = N\cos B = x$ — радиус кривизны параллели;

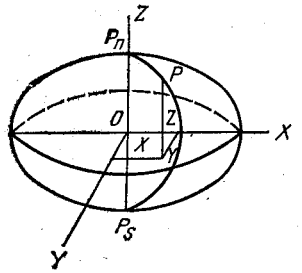
$c = a/\sqrt{1-e^2} = a\sqrt{1+e'^2}$ — полярный радиус кривизны.



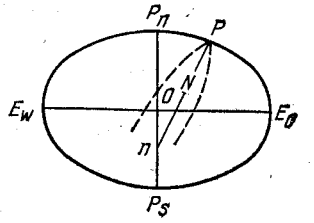
Р и с. 37. Геодезические координаты



Р и с. 38. Геоцентрические координаты



Р и с. 39. Система пространственных координат



Р и с. 40. Радиус кривизны нормального сечения

Обозначено:

$V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$ — вторая функция геодезической широты;

$$V = W\sqrt{1+e'^2} = W/\sqrt{1-e^2}; \qquad M = c/V^3;$$

$$W = bV/a; \quad N = c/V; \quad R = c/V^2; \quad r = c\cos B/V; \quad NM^{-1} = V^2.$$

Величины $\rho/M = (1)$ и $\rho/N = (2)$ называются соответственно первой и второй геодезической величиной.

$$\lg V = 0{,}000\,729\,784 + 0{,}000\,729\,171\,39\cos 2B -$$
$$- 0{,}000\,000\,61213\cos 4B + 0{,}000\,000\,000\,69\cos 6B.$$

Дуга меридиана

$$s = \int_0^B M\,dB = a(1-e^2)\,[AB/\rho - (B\sin 2B)/2 +$$
$$+ (C\sin 4B)/4 - (D\sin 6B)/6 + \ldots].$$

Для эллипсоида Красовского:

$$A = 1{,}005\,051\,77; \quad B = 0{,}005\,062\,38;$$
$$C = 0{,}000\,010\,62; \quad D = 0{,}000\,000\,02;$$
$$s = 6\,367\,558{,}495\,87\ B/\rho - 16\,036{,}480\,27\sin 2B +$$
$$+ 16{,}828\,067\sin 4B - 0{,}021\,975\sin 6B.$$

Длина дуги s с точностью до миллиметров дается в «Таблицах для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°». В таблицах Д. А. Ларина меридианные дуги, отсчитанные от экватора, обозначены через X. Дуга между двумя пунктами

$$s = X_2 - X_1.$$

Для $s \leqslant 50$ — 60 км действует формула

$$s = M_m(B_2 - B_1)/\rho = (1)_m(B_2 - B_1),$$

где B_1 и B_2 — широты пунктов.

Дуга параллели

$$s' = rl/\rho = N\cos Bl/\rho,$$

где l — разность долгот пунктов.

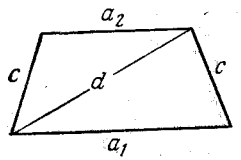


Рис. 41. Рамки трапеции карты

В таблицах Д. А. Ларина через каждую минуту широты даются величины

$$b_1 = N \cos B/\rho,$$

а дуга параллели вычисляется по формуле

$$s' = b_1 l.$$

Площадь и рамки трапеций. Площадь полной поверхности земного эллипсоида

$$\Pi = 4\pi b^2 \left\{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \ldots\right\},$$

$\Pi = 510\,083\,035{,}4$ км^2 (для эллипсоида Красовского).

Площадь пояса от широты B_1 до B_2

$$P = 4\pi b^2 \left\{A' \sin\frac{1}{2}(B_2 - B_1)\cos B_m - B' \sin\frac{3}{2}(B_2 - B_1)\cos 3B_m + \right.$$
$$\left. + C' \sin\frac{5}{2}(B_2 - B_1)\cos 5B_m - \ldots\right\}.$$

Площадь трапеции миллионного листа карты

$$P_{1\,000\,000} = \frac{1}{15}\pi b^2 (A' \sin 2^\circ \cos B_m - B' \sin 6^\circ \cos 3B_m + $$
$$+ C' \sin 10^\circ \cos 5B_m - \ldots).$$

Площадь трапеции карты масштаба 1 : 100 000

$$P_{100\,000} = \frac{1}{180}\pi b^2 (A' \sin 10' \cos B_m) - B' \sin 30' \cos 3B_m + $$
$$+ C' \sin 50' \cos 5B_m - \ldots).$$

Для эллипсоида Красовского

$$\pi b^2 = 124\,061\,094{,}3 \text{ км}^2,\ A' = 1{,}003\,363\,61,$$
$$B' = 0{,}001\,124\,03,\ C' = 0{,}000\,001\,70.$$

Размеры трапеции (рис. 41):

$$a_1 = N_1 \cos B_1\, l/\rho;\ a_2 = N_2 \cos B_2\, l/\rho;$$
$$c = M_m (B_2 - B_1)/\rho;\quad d = \sqrt{a_2 a_1 + c^2}.$$

Величины a_1, a_2, c, d и P для различных масштабов карт можно найти в «Таблицах координат Гаусса—Крюгера», составленных под руководством проф. А. М. Бировца.

Стрелка провеса рамки трапеции рассчитывается по формуле

$$h = N_m l^2 \sin 2B_m/16\rho^2,$$

где B_m — средняя широта; N_m — радиус первого вертикала для B_m.

II.2.3. Кривые на поверхности земного эллипсоида

Нормальные сечения, расхождения взаимных нормальных сечений. Нормали к поверхности эллипсоида в точках, имеющих различные широты, пересекаются с осью вращения в разных ее точках (рис. 42). Вследствие этого нормальная плоскость, проходящая через нормаль n_1P_1

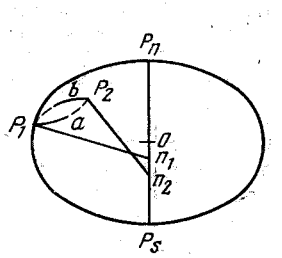


Рис. 42. Нормальные сечения

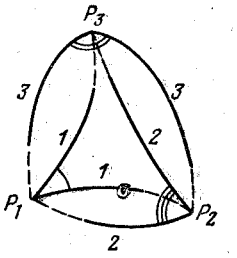


Рис. 43. Треугольник на поверхности эллипсоида

и точку P_2, не совпадает с нормальной плоскостью, проходящей через нормаль n_2P_2 и точку P_1. В пересечении этих плоскостей с поверхностью получаются две кривые a и b, которые называются взаимными нормальными сечениями.

Нормальные сечения — плоские кривые. Если допустить, что отвесная линия и нормаль к эллипсоиду в данной точке совпадают, то можно считать, что горизонтальные углы измеряются между нормальными сечениями. Так как между двумя точками на эллипсоиде проходят два нормальных сечения, то при наблюдении треугольников получаются шестиугольные незамкнутые фигуры (рис. 43).

Угол между взаимными нормальными сечениями

$$\Delta = e^2 s^2 \rho \cos^2 B_m \sin 2\alpha.$$

При $B = 60^\circ$ и $\alpha = 50^\circ$:

s, км	30	100	150
Δ, угл. с	0,003	0,032	0,057

Неучет угла между взаимными нормальными сечениями может привести в звене триангуляции при передаче азимута α к ошибке порядка 0,1″.

Несовпадение взаимных нормальных сечений называется двойственностью нормальных сечений. Чтобы получить замкнутые однозначные фигуры, триангуляционные пункты соединяют геодезическими линиями, которые являются кратчайшими расстояниями между двумя пунктами. Геодезические линии проходят между взаимными нормальными сечениями, располагаясь ближе к прямому сечению (рис. 44).

Угол δ между геодезической линией и нормальным сечением равен одной трети угла между взаимными нормальными сечениями, т. е. $\delta = \Delta/3$.

В каждое измеренное в триангуляции направление вводят поправку

$$\delta = e^2 s^2 \rho \cos^2 B_m \sin 2\alpha/12N_m^2.$$

Геодезические линии на поверхности играют роль прямых на плоскости. Основное уравнение геодезической линии

$$r \sin A = \text{const},$$

Рис. 44. Геодезическая линия

где r — радиус параллели; A — азимут геодезической линии в данной точке. Геодезическую линию определяют еще как кривую, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Разность длин дуг геодезической линии и нормального сечения между двумя точками — малая величина:

$$s - s_0 = e^4 s^5 \cos^4 B_m \sin^2 2\alpha/360N^4.$$

При любых точных расчетах и теоретических выкладках она не учитывается. При $s = 600$ км $s - s_0 < 0{,}001$ мм.

II.2.4. Решение малых сфероидических треугольников

Треугольники, измеряемые в триангуляции, имеют сравнительно небольшие размеры, без заметных искажений развертываются на сфере соответственно выбранному радиусу. Следовательно, решение сфероидических треугольников малого изгиба сводится к решению им соответствующих сферических треугольников. Базисы в триангуляции измеряются в единицах длины и поэтому из решения треугольников надо также получить стороны в тех же единицах длины. Существует несколько способов решения малых сферических треугольников, когда стороны получаются в единицах длины. Главнейшие из них — способ Лежандра и способ аддитаментов.

Способ Лежандра. Малый сферический треугольник можно решить как плоский, если каждый его угол уменьшить на треть его избытка (рис. 45):

$$A_1 = A - \varepsilon/3;\ B_1 = B - \varepsilon/3;\ C_1 = C - \varepsilon/3,$$

где ε — сферический избыток треугольника ABC, A_1, B_1 и C_1 — приведенные плоские углы;

$$\varepsilon = ab \sin C_1 \rho/2R^2 = ac \sin B_1 \rho/2R^2 = bc \sin A_1 \rho/2R^2.$$

Способ аддитаментов. При решении по способу аддитаментов стороны треугольника выражаются в частях радиуса (рис. 46):

$$\lg b = \lg a \frac{\sin B}{\sin A} + A_b - A_a,$$

где

$$A_a = \lg \frac{a}{R} \Big/ \sin \frac{a}{R};\quad A_b = \lg \frac{b}{R} \Big/ \sin \frac{b}{R}.$$

Величины A_a и A_b называются аддитаментами.

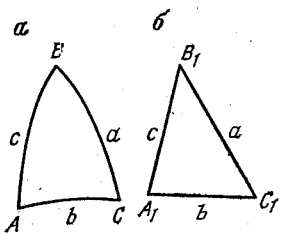


Рис. 45. Принцип решения сферического треугольника по способу Лежандра

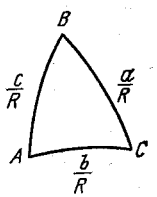


Рис. 46. Принцип решения сферического треугольника по способу аддитаментов

Теорема Лежандра и способ аддитаментов пригодны для треугольников, стороны которых не превышают 150—200 км. Треугольники с большими длинами сторон решаются по более сложным формулам. В них учитываются сфероидичность треугольника и поправочные члены способа Лежандра:

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{60} K (m^2 - a^2) - \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{K_A - K}{K} \right);$$

$$B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{60} K (m^2 - b^2) - \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{K_B - K}{K} \right);$$

$$C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{60} K (m^2 - c^2) - \frac{\varepsilon}{12} \left(\frac{K_C - K}{K} \right),$$

где K_A, K_B, K_C — Гауссовы кривизны в вершинах треугольника ABC;

$$K = (K_A + K_B + K_C)/3;\quad m^2 = (a^2 + b^2 + c^2)/3;\quad \varepsilon = \Delta K \rho;$$

Δ — площадь треугольника ABC. Приведенные формулы пригодны для треугольников со сторонами до 500—600 км.

Если вершины треугольника ABC соединяются хордами, длины которых обозначены соответственно через a, b, и c, то решение хордового треугольника ведется по формулам:

$$\bar{b} = \bar{a} \sin (B - \varepsilon/4)/\sin (A - \varepsilon/4);$$

$$\bar{c} = \bar{a} \sin (C - \varepsilon/4)/\sin (A - \varepsilon/4),$$

где ε — сферический избыток треугольника ABC; $\bar{a} = a - a^3/24R^2$; R — средний радиус кривизны в соответствующей вершине треугольника.

II.2.5. Вычисление геодезических координат пунктов государственной опорной сети

В современной практике геодезических работ в СССР геодезические координаты вычисляются для пунктов триангуляции 1 класса; триангуляция остальных классов и полигонометрические сети обрабатываются на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера с вычислением плоских прямоугольных координат пунктов.

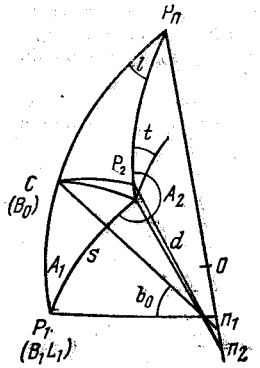
Вычисление геодезических координат является практической и научной задачей. Широты и долготы пунктов вычисляются с точностью до $0{,}0001''$, а азимуты — до $0{,}001''$. Чтобы обеспечить указанную точность, необходимо вычисления вести с удержанием восьмого десятичного знака.

Вычисление геодезических координат часто называют главной геодезической задачей. При этом различают: прямую геодезическую задачу, когда по координатам заданного пункта, длине и азимуту геодезической линии вычисляют координаты текущего пункта и обратный азимут; обратную геодезическую задачу, когда по координатам двух пунктов вычисляют расстояние между ними по геодезической линии и азимуты ее в конечных пунктах.

Для решения прямой геодезической задачи при расстояниях между пунктами до 130 км в СССР применяют главным образом формулы Шрейбера—Изотова, которые имеют вид:

$$B_2 = B_1 + b_0 - d;\ L_2 = L_1 + l;$$

$$A_2 = A_1 \pm 180^\circ + t - \varepsilon;$$



Р и с. 47. Схема решения прямой геодезической задачи

$$u = s\cos A_1;\ v = s\sin A_1;\ \beta = (1)_1 u;\ \gamma = (2)_0 v;$$

$$\lg b_0 = \lg\beta - (4)_1 u + (5)_1 v^2 + (6)_1 u^2;$$

$$\lg c = \lg\gamma - (5)_1 u^2/2;$$

$$\lambda = c\sec B_0;\ \tau = c\operatorname{tg} B_0;$$

$$\delta = (3)_0 \tau c;\ \varepsilon = b_0 c/2\rho;\ \nu = 10^8\mu/6\rho^2;$$

$$\lg l = \lg\lambda - 2\nu\tau^2 + (9)_0\lambda^4;$$

$$\lg t = \lg\tau - \nu\tau^2 - \nu\lambda^2 + (7)_0\lambda^2;$$

$$\lg d = \lg\delta - \nu\tau^2 - \nu\tau^2/2 + (8)_0\lambda^2.$$

В этих формулах b_0 — разность широт вспомогательной C (B_0) и данной P_1 (B_1) точек; d — разность широт вспомогательной и искомой; l — разность долгот P_1 и P_2; t — геодезическое сближение меридианов; ε — сферический избыток прямоугольного сферического треугольника P_1CP_2 (рис. 47).

Логарифмы величин

$$(1)_1 = \rho/M_1;\quad (4)_1 = 3\cdot 10^8\mu e'^2\sin 2B_1/4N_1,$$

$$(5)_1 = 10^8\mu/3M_1N_1$$

выбирают из «Таблиц для вычисления геодезических координат» по аргументу широты данного пункта P_1, а логарифмы величин

$$(2)_0 = \rho/N_0,\ (3)_0 = N_0/2\rho M_0 -$$

по аргументу B_0 широты вспомогательной точки C. Величины $(6)_1u^2$, $(7)_0\lambda^2$, $(8)_0\lambda^2$, $(9)_0\lambda^4$ выбирают из тех же таблиц по логарифму u и λ.

Для расстояний порядка 25—30 км формулы Шрейбера—Изотова могут быть упрощены, а именно их можно применить в виде:

$$\lg b_0 = \lg\beta - (4)_1 u + (5)_1 v^2;\ \lg l = \lg\lambda - 2\nu\tau^2;$$

$$\lg t = \lg\tau - \nu\tau^2 - \nu\lambda^2;\ \lg d = \lg\delta - \nu\tau^2 - \nu\lambda^2/2.$$

Прямая геодезическая задача может решаться по формулам со средними аргументами или по формулам Гаусса:

$$B_2 = B_1 + b;\ L_2 = L_1 + l;\ A_2 = A_1 \pm 180° + a;$$

$$\lg b = \lg\beta_m + \frac{1}{4}\nu l^2\sin^2 B_m + \frac{1}{2}\nu l^2;$$

$$\lg l = \lg\lambda_m + \frac{1}{4}\nu l^2\sin^2 B_m - \frac{1}{4}\nu b^2;$$

$$\lg a = \lg\tau_m + \frac{1}{4}\nu l^2\sin^2 B_m + \frac{1}{2}\nu l^2\cos^2 B_m + \frac{1}{2}\nu b^2;$$

$$\beta_m = (1)_m s\cos A_m;\ \lambda_m = (2)_m s\sin A_m\sec B_m;$$

$$\tau_m = (2)_m s\sin A_m\operatorname{tg} B_m;$$

$$B_m = \frac{1}{2}(B_1 + B_2);\quad A_m = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 \pm 180°).$$

В общем случае B_m и A_m неизвестны, поэтому задача решается методом последовательных приближений. Логарифмы величин $(1)_m$ и $(2)_m$ выбирают из геодезических таблиц по аргументу B_m, поправочные члены вида νl^2, νb^2 — по $\lg l$ и $\lg b$.

Для решения о б р а т н о й геодезической задачи, т. е. нахождения s, A_1, A_2 по B_1, B_2, L_1, L_2, наиболее целесообразны обращенные формулы Гаусса в виде:

$$\lg s = \lg P - \lg\sin A_m = \lg Q - \lg\cos A_m;$$

$$A_1 = A_m - \frac{1}{2}a;\quad A_2 = A_m + \frac{1}{2}a \pm 180°;$$

$$\lg\operatorname{tg} A_m = \lg P - \lg Q;$$

$$\lg P = \lg(s\sin A_m) = \lg(l\cos B_m/(2)_m) + \Delta\lg(s\sin A_m);$$

$$\lg Q = \lg(s\cos A_m) = \lg(b/(1)_m) + \Delta\lg(s\cos A_m);$$

$$\lg a = \lg(l\sin B_m) + \Delta\lg a;$$

$$\Delta\lg(s\cos A_m) = -\frac{1}{2}\nu l^2 - \frac{1}{4}\nu l^2\sin^2 B_m;$$

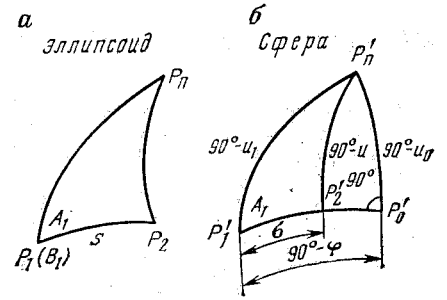
$$\Delta\lg(s\sin A_m) = \frac{1}{4}\nu b^2 - \frac{1}{4}\nu b^2\sin^2 B_m;$$

$$\Delta\lg a = \frac{3}{4}\nu b^2 + \frac{1}{2}\nu l^2\cos^2 B_m.$$

Из решения обратной задачи s получаются с точностью до 1 см, азимуты — до $0{,}01$—$0{,}04''$.

II.2.6. Решение геодезических задач на большие расстояния

Прямая задача. Даны B_1, L_1, s и A_1, определяются B_2, L_2 и A_2 (рис. 48, *а*). Решение выполняют по м е т о д у Б е с с е л я. Сначала переходят на вспомогательную сферу, где геодезические широты соответствуют приведенным (рис. 48, *б*), задачу решают на сфере и затем от сферических элементов переходят к эллипсоидальным.



Р и с. 48. Схема решения прямой задачи по методу Бесселя: *а* — данные на эллипсоиде; *б* — переход на вспомогательную сферу

Порядок решения задачи.

1. Вычисление приведенной широты u_1 по формуле

$$\operatorname{tg} u_1 = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg} B_1.$$

2. Вычисление вспомогательных сферических элементов:

$$\cos u_0 = \cos u_1 \sin A_1;\ \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} u_1 \sec A_1.$$

3. Вычисление табличного аргумента

$$k = e' \sin u_0.$$

4. Выбор из таблиц Н. А. Урмаева по $\lg k$ величин $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$, $\lg\alpha'$ и $\lg\beta'$.

5. Вычисление приближениями сферического расстояния

$$\sigma = \alpha s/b + \beta \sin\sigma\cos(2\varphi+\sigma) + \gamma\sin 2\sigma\cos(4\varphi+2\sigma) + \ldots,$$

где b — малая полуось эллипсоида.

6. Решение вспомогательного сферического треугольника $P_1'P'P_2'$ по его элементам u_1, A_1 и σ для нахождения u_2, A_2 и ω.

7. Вычисление разности геодезических долгот

$$l = \omega - \cos u_0\,[\alpha'\sigma + \beta'\sin\sigma\cos(2\varphi+\sigma) + \ldots].$$

8. Вычисление широты второго пункта

$$\operatorname{tg} B_2 = \operatorname{tg} u_2/\sqrt{1-e^2}.$$

Обратная задача. Даны B_1, B_2, L_1 и L_2, определяют s, A_1 и A_2.

Порядок решения задачи.

1. Переход от геодезических широт к приведенным.

2. Вычисление приближениями разности долгот на сфере

$$\omega = l + \cos u_0\,[\alpha'\sigma + \beta'\sin\sigma\cos(2\varphi+\sigma) + \ldots].$$

В большинстве случаев можно вычислить ω по приближенной формуле:

$$\omega = l + 667 k_0 \sin l \cos B_1 \cos B_2,$$

где k_0 определяется в зависимости от расстояний:

Расстояние, км	k_0
До 6 000	1,0
От 6 000 до 8 000	1,5
От 8 000 до 10 000	2,0
От 10 000 до 12 000	2,5
От 12 000 до 13 000	3,0

3. Решение вспомогательного сферического треугольника по его элементам u_1, u_2 и ω для определения σ, A_1, A_2.

4. Вычисление вспомогательных величин u_0, φ и k.

5. Извлечение из таблиц $\lg\alpha$, $\lg\beta$.

6. Вычисление расстояния по дуге геодезической линии между пунктами P_1 и P_2:

$$s = b/\alpha\,[\sigma - \beta\sin\sigma\cos(2\varphi+\sigma) - \gamma\sin 2\sigma\cos(4\varphi+2\sigma) + \ldots].$$

Метод Бесселя решения прямой и обратной геодезических задач пригоден при любых расстояниях между пунктами.

II.2.7. Решение геодезических задач в пространстве

Пространственная система координат. В тех случаях, когда геодезические объекты находятся в пространстве на значительной высоте над поверхностью земли, целесообразно геодезические задачи решать в системе пространственных прямоугольных координат с началом в центре референц-эллипсоида. Ось z направляют по оси вращения эллипсоида на север, ось x располагают в плоскости начального меридиана, а ось y — в плоскости меридиана с долготой $L = 90°$.

Уравнение эллипсоида вращения в канонической форме в пространственной системе координат с полуосями a и b имеет вид:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1. \qquad \text{(II.2.1)}$$

Это же уравнение в векторной форме в геодезических координатах записывается в виде

$$r = [N\cos B\cos L,\ N\cos B\sin L,\ b^2 N\sin B/a^2]. \qquad \text{(II.2.2)}$$

Векторное уравнение справедливо для точек, лежащих на поверхности эллипсоида, где $H = 0$. Допустим, что точка имеет высоту H над эллипсоидом по нормали N, тогда в уравнении (II.2.2) вместо N следует подразумевать $N + H$. Следовательно,

$$r = [(N+H)\cos B\cos L,\ (N+H)\cos B\sin L,$$
$$b^2(N+H)\sin B/a^2]. \qquad \text{(II.2.3)}$$

Из уравнения (II.2.1) и (II.2.3) получаем следующие зависимости между x, y, z и B, L, H:

$$\begin{aligned} x &= (N+H)\cos B\cos L;\\ y &= (N+H)\cos B\sin L;\\ z &= (b^2N/a^2 + H)\sin B. \end{aligned} \qquad \text{(II.2.4)}$$

Определение геодезических координат по пространственным. Из двух первых уравнений системы (II.2.4) следует:

$$\operatorname{tg} L = y/x. \qquad \text{(II.2.5)}$$

Преобразовывая третье равенство (II.2.4), имеем

$$\operatorname{tg} B = z/d + e^2 N\sin B/d, \qquad \text{(II.2.6)}$$

где

$$d = \sqrt{x^2+y^2} = (N+H)\cos B.$$

Формула (II.2.6) применима для вычисления B приближениями. Чтобы сократить число приближений, целесообразно первое приближение выполнить по формуле

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{z}{d}\left(1 + \frac{e^2N}{\sqrt{d^2+z^2}}\right).$$

Имея d, z, B, можно найти H:

$$H = d\cos B + z\sin B - N(1 - e^2\sin^2 B). \qquad \text{(II.2.7)}$$

По формулам (II.2.5), (II.2.6) и (II.2.7) решают задачу обратного перехода: по данным прямоугольным координатам x, y, z находят B, L, H. Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$H = \frac{x}{\cos B\cos L} - N = \frac{y}{\cos B\sin L} - N = \frac{z}{\sin B} - \frac{b^2}{a^2}N.$$

Определение расстояния и азимута направления (обратная геодезическая задача). Если даны две точки в пространстве с прямоугольными координатами $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$, то квадрат расстояния между ними будет:

$$s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \qquad (II.2.8)$$

или, подставляя вместо прямоугольных координат геодезические по (II.2.4), получим:

$$s^2 = 4N_1N_2 \sin^2 \psi/2\,(1 + H_1/N_1)\,(1 + H_2/N_2) + \\ + (\Delta N + \Delta H)^2 - k\varepsilon^2 - 2\varepsilon\,(H_2 \sin B_2 - H_1 \sin B_1), \qquad (II.2.9)$$

где

$$\cos \psi = \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1);$$
$$\varepsilon = e^2\,(N_2 \sin B_2 - N_1 \sin B_1);$$
$$\Delta N = N_2 - N_1,\ \Delta H = H_2 - H_1,\ k = \nu/e^4,\ \nu = (a^4 - b^4)/a^4.$$

Для получения азимута направления, совпадающего с азимутом нормального сечения, в плоскости которого лежит данное направление, целесообразно преобразовать координатную систему. Начало координат новой системы совмещают с первой точкой, ось x' направляют по касательной к меридиану начальной точки, ось y' — по касательной к первому вертикалу точки, а ось z' — по нормали.

Связь между новой и старой системами координат выражается уравнениями:

$$x' = (z_2 - z_1) \cos B_1 - (x_2 - x_1) \sin B_1;$$
$$y' = y; \qquad (II.2.10)$$
$$z' = (x_2 - x_1) \cos B_1 + (z_2 - z_1) \sin B_1.$$

В системе координат x', y', z'

$$\operatorname{tg} \alpha = y'/x' \qquad (II.2.11)$$

или

$$\operatorname{ctg} \alpha = x'/y', \qquad (II.2.11')$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{(z_2 - z_1) \cos B_1 - (x_2 - x_1) \sin B_1}{y_2}. \qquad (II.2.12)$$

В системе координат B, L, H

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{\sin (B_2 - B_1)}{\cos B_2 \sin (L_2 - L_1)} - \sin B_1 \operatorname{tg} \frac{(L_2 - L_1)}{2} - \\ - \frac{\varepsilon \cos B_1}{(N_2 + H_2) \cos B_2 \sin (L_2 - L_1)}.$$

Выражение для $\operatorname{ctg} \alpha_2$ получится из предыдущего путем перемены индексов:

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{\sin (B_2 - B_1)}{\cos B_1 \sin (L_2 - L_1)} - \sin B_2 \operatorname{tg} \frac{(L_2 - L_1)}{2} - \\ - \frac{\varepsilon \cos B_2}{(N_1 + H_1) \cos B_1 \sin (L_2 - L_1)}.$$

Прямая геодезическая задача. По данным геодезическим координатам B_1, L_1, H_1 первой точки и полярным координатам r, A_{12}, z_{12} второй точки вычисляют геодезические координаты B_2, L_2 и H_2 этой точки.

Для решения поставленной задачи целесообразно несколько преобразовать вспомогательную систему координат, принятую для решения обратной геодезической задачи, а именно: ось x' располагают в плоскости меридиана первой точки в направлении оси вращения эллипсоида; ось y' — под прямым углом к оси x', а ось z' — по направлению нормали. В принятой системе координат координаты второй точки через полярные выражаются формулами:

$$x_2' = r \sin z_{12} \cos A_{12};$$
$$y_2' = r \sin z_{12} \sin A_{12}; \qquad (II.2.13)$$
$$z_2' = r \cos z_{12}.$$

Новую прямоугольную систему координат подвергнем следующим изменениям: координату z' увеличим на $N_1 + H_1$, систему повернем вокруг оси oy' так, чтобы ось oz' совпала с осью вращения эллипсоида, а начало координат — с центром эллипсоида.

С учетом этих преобразований связь между координатами x_2', y_2', z_2' и x_2, y_2, z_2 выражается соотношениями:

$$x_2 = (z_2' + N_1 + H_1) \cos B_1 - x_2' \sin B_1;$$
$$y_2 = y_2'; \qquad (II.\ 2.14)$$
$$z_2 = (z_2' + N_1 + H_1) \sin B_1 + x_2' \cos B_1 - e^2 N_1 \sin B_1.$$

Подставляя значения x_2', y_2', z_2' из (II.2.13) в (II.2.14), получим x_2, y_2, z_2, выраженные через полярные координаты r, z_{12} и A_{12} и геодезические координаты первой точки, т. е.

$$x_2 = (r \cos z_{12} + N_1 + H_1) \cos B_1 - r \sin z_{12} \cos A_{12} \sin B_1;$$
$$y_2 = r \sin z_{12} \sin A_{12}; \qquad (II.2.15)$$
$$z_2 = (r \cos z_{12} + N_1 + H_1) \sin B_1 + \\ + r \sin z_{12} \cos A_{12} \cos B_1 - e^2 N_1 \sin B_1.$$

Полученные по (II.2.15) координаты x_2 y_2 z_2 отличаются от пространственных координат (II.2.4) тем, что в системе (II.2.15) ось x лежит в плоскости меридиана первой точки, тогда как в системе (II.2.4) она расположена в плоскости начального меридиана. Поэтому в системе (II.2.4) при переходе от прямоугольных координат к геодезическим следует под L подразумевать $(L_2 - L_1)$.

Имеем:

$$\operatorname{tg} (L_2 - L_1) = y_2/x_2;\ \operatorname{tg} B_2 = z_2/d + e^2 N_2 \sin B_2/d; \qquad (II.2.16)$$
$$H_2 = d \cos B_2 + z_2 \sin B_2 - N_2 (1 - e^2 \sin^2 B_2); \qquad (II.2.17)$$

здесь

$$d = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Вычисление B_2 ведется приближениями, причем для первого приближения рекомендуется выражение

$$\operatorname{tg} (B_2) = \frac{z_2}{d}\left(1 + \frac{e^2 N_1}{\sqrt{d^2 + z_2^2}}\right). \qquad (II.2.18)$$

Формулы (II.2.16), (II.2.17) и (II.2.18) решают прямую геодезическую задачу в пространстве, если даны полярные геодезические координаты и геодезические координаты первой точки.

II.2.8. Плоские прямоугольные координаты в равноугольной проекции Гаусса—Крюгера

Проекция референц-эллипсоида на плоскость, принятая для обработки результатов геодезических измерений, называется геодезической проекцией. Основные требования, которые предъявляются к выбору геодезических проекций, следующие:

1) проекция должна быть равноугольной, т. е. сохранять подобие оригиналу в самых малых частях. Отсюда следует, что в таких проекциях можно изображать только небольшие части земной поверхности;

2) искажения должны быть возможно малыми и легко учитываемыми;

3) формулы перехода должны быть простыми и удобными для табулирования и вычисления.

Поскольку искажения во всякой проекции неизбежны, то первое и последнее требования являются определяющими при выборе проекции, особенно для стран, имеющих большую территорию.

Проекция Гаусса—Крюгера вполне удовлетворяет основным требованиям, указанным выше. Хотя в этой проекции искажения не малы, но они легко учитываются, а переход от эллипсоида на плоскость и наоборот совершается по весьма удобным формулам при помощи таблиц.

Свойства проекции Гаусса—Крюгера:

1) проекция равноугольна, т. е. масштаб изображения постоянен в данной точке и зависит только от координат пункта;

2) осевой, или центральный, меридиан зоны изображается на плоскости прямой линией и принимается за ось абсцисс, причем за начало координат в каждой зоне выбирают точку пересечения осевого меридиана с изображением земного экватора на плоскости. Ось ординат совпадает с изображением экватора;

3) масштаб изображения на осевом меридиане равен единице, т. е. для точек осевого меридиана абсциссы равны дугам меридиана, отсчитанным от экватора.

Для практического применения проекции территорию страны разбивают меридианами на координатные зоны. В СССР приняты две системы координатных зон: шестиградусные и трехградусные (рис. 49). Осевые меридианы шестиградусных зон совпадают с центральными меридианами листов карты масштаба 1 : 1 000 000, порядковый номер зоны определяется по формуле $n = N - 30$,
где N — номер колонны листа карты.

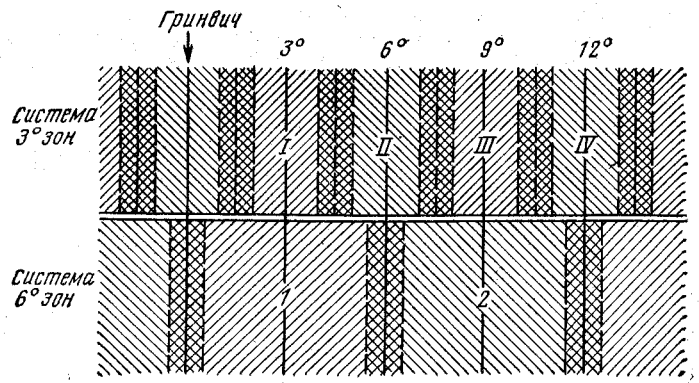


Рис. 49. Координатные зоны

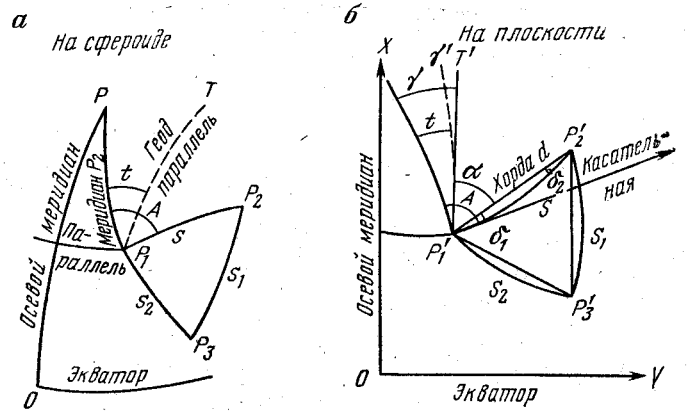


Рис. 50. Элементы треугольников и линий:
а — на сфероиде; *б* — на плоскости

Долготы осевых меридианов шестиградусных зон определяются по формуле $L_0 = 6n - 3$,
трехградусных — по формуле $L = 3k$,
где k — номер соответствующей трехградусной зоны.

На территории СССР абсциссы координат Гаусса—Крюгера положительные. Чтобы избежать отрицательных ординат, точкам осевого меридиана условно придают значение ординаты 500 000 м и обязательно указывают впереди номер соответствующей зоны.

Порядок переноса геодезической сети с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера складывается из следующих действий (рис. 50).

1. От геодезических координат данного пункта B и L переходят к прямоугольным координатам x, y на плоскости, одновременно вычисляют сближение меридианов на плоскости.

2. От длины геодезической линии и азимута в данном пункте переходят к длине и дирекционному углу хорды изображения геодезической линии на плоскости.

3. От углов между геодезическими линиями переходят к углам между хордами.

После выполнения этих действий считается, что геодезическая сеть спроектирована с эллипсоида на плоскость. Получив сеть на плоскости, ее уравнивают по методу наименьших квадратов и вычисляют плоские координаты всех ее вершин.

Угол между хордой и линией, параллельной осевому меридиану, называется дирекционным углом и обозначается α; он отсчитывается по ходу часовой стрелки от параллельной осевому меридиану линии до хорды. Угол между изображением меридиана на плоскости и линией, параллельной осевому меридиану, называется сближением меридианов на плоскости или Гауссовым сближением меридианов и обозначается γ.

Угол между хордой и изображением геодезической линии на плоскости называется поправкой за кривизну изобра-

жения геодезической линии на плоскости и обозначается δ.

Связь между азимутом и дирекционным углом (см. рис. 50, *б*) выражается формулой

$$\alpha = A - \gamma - \delta.$$

Вычисление α выполняется с точностью до 0,001″.

Прямая задача проекции Гаусса—Крюгера. Под прямой задачей проекции Гаусса—Крюгера подразумевается вычисление прямоугольных плоских координат, сближения меридианов на плоскости и масштаба изображения по геодезическим координатам данного пункта, т. е. по B и L определяются x, y, γ и m.

Для нелогарифмического вычисления по таблицам Д. А. Ларина применяются формулы:

$$x = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + \ldots;$$
$$y = b_1 l + b_3 l^3 + b_5 l^5 + \ldots;$$
$$\gamma = c_1 l + c_3 l^3 + c_5 l^5 + \ldots;$$
$$m = 1 + d_2 l^2 + d_4 l^4 + \ldots,$$

где x — длина дуги меридиана от экватора до параллели данной точки — дается в таблицах через каждую минуту широты с точностью до миллиметра; a_2, a_4, a_6; b_1, b_3, b_5; c_1, c_3, d_2 и d_4 — функции широты, которые также даются в таблицах Д. А. Ларина через каждую минуту широты. Эти коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_2 = \frac{1}{2} N \cos B \sin B;$$

$$a_4 = \frac{1}{24} N \cos^3 B \sin B (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$a_6 = \frac{1}{720} N \cos^5 B \sin B (61 - 58t^2 + t^4);$$

$$b_1 = N \cos B;$$

$$b_3 = \frac{1}{6} N \cos^3 B (1 - t^2 + \eta^2);$$

$$b_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2);$$

$$c_1 = \sin B;$$

$$c_3 = \frac{1}{3} \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4);$$

$$c_5 = \frac{1}{15} \sin B \cos^4 B (2 - t^2);$$

$$d_2 = \frac{1}{2} \cos^2 B (1 + \eta^2);$$

$$d_4 = \frac{1}{24} \cos^4 B (5 - 4t^2).$$

Здесь $t = \operatorname{tg} B$, $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$, l — разность долгот данного пункта и осевого меридиана, выраженная в радианах.

При решении прямой задачи x и y вычисляются до миллиметров, γ — до 0,001″ и m — до восьмого десятичного знака.

Приведенные формулы и таблицы Д. А. Ларина являются наиболее рациональными для решения указанной задачи.

Обратная задача проекции Гаусса—Крюгера. Под обратной задачей проекции Гаусса—Крюгера подразумевается вычисление геодезических координат, сближения меридианов на плоскости и масштаба изображения по прямоугольным координатам данной точки.

Эта задача может быть решена по следующим формулам:

$$B = B_0 + \bar{a}_2 y^2 + \bar{a}_4 y^4 + \bar{a}_6 y^6 + \ldots;$$
$$l = b'_1 y + b'_3 y^3 + b'_5 y^5 + \ldots;$$
$$\gamma = c'_1 y + c'_3 y^3 + c'_5 y^5 + \ldots;$$
$$m = 1 + d'_2 y^2 + d'_4 y^4 + \ldots,$$

где

$$\bar{a}_2 = t_0 V_0^2 \rho / 2N_0^2;$$

$$\bar{a}_4 = \frac{1}{24 N_0} t_0 \rho (5 + 3t_0^2 + 6\eta_0^2 - 6\eta_0^2 t_0^2);$$

$$\bar{a}_6 = \frac{1}{720 N_0^2} t_0 \rho (61 + 90t_0^2 + 45t_0^4);$$

$$b'_1 = \sec B_0 / N_0;$$

$$b'_3 = -\frac{1}{6N_0^3} \sec B_0 (1 + 2t_0^2 + \eta_0^2);$$

$$b'_5 = \frac{1}{120 N_0^5} \sec B_0 (5 + 28t_0^2 + 24t_0^4 + 6\eta_0^2 + 8\eta_0^2 t_0^2);$$

$$c'_1 = t_0 / N_0;$$

$$c'_3 = \frac{1}{3N_0^3} t_0 (1 + t_0^2 - \eta_0^2 - 4\eta_0^4);$$

$$c'_5 = \frac{1}{15 N_0^5} t_0 (2 + 5t_0^2 + 3t_0^4 + 2\eta_0^2 + \eta_0^2 t_0^2);$$

$$d_2 = \frac{1}{2R_0^2};$$

$$d_4 = \frac{1}{24 R_0^4}.$$

В этих выражениях B_0 — широта основания ординаты данного пункта; $t_0 = \operatorname{tg} B_0$; $\eta_0^2 = e'^2 \cos B_0$; $V_0^2 = 1 + \eta_0^2$; N_0 — радиус кривизны первого вертикала; R_0 — средний радиус кривизны. Индекс «0» означает, что данная величина является функцией широты основания ординаты.

Редукционная задача проекции Гаусса—Крюгера. Под ней подразумевается нахождение поправок к длинам и направлениям геодезических сетей при переносе их с эллипсоида на плоскость и наоборот. Эта задача делится на две части: на редукцию длин и на редукцию направлений, т. е. перенос линейных и угловых элементов.

Редукция длины.

$$S = s\left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{\Delta y^4}{24R_m^4}\right);$$

здесь S — длина на плоскости; s — длина на эллипсоиде; y_m — средняя ордината; R_m — средний радиус кривизны для средней широты и $\Delta y = y_2 - y_1$. В логарифмическом виде формула для триангуляции 1 класса записывается так:

$$\lg S = \lg s + \frac{1}{6}(\lg m_1 + 4 \lg m_m + \lg m_2),$$

где

$$\lg m_1 = \mu y_1^2/2R_m^2; \quad \lg m_m = \mu y_m^2/2R_m^2;$$
$$\lg m_2 = \mu y_2^2/2R_m^2.$$

Для триангуляции 2 класса и сплошных сетей применяется формула в виде

$$\lg S = \lg s + \frac{\mu}{2}\left(\frac{y_m}{R_m}\right)^2.$$

Для введения поправок в стороны полигонометрических ходов пользуются формулой

$$\Delta S = S y_m^2/2R_m^2,$$

где ΔS — поправка; S — длина хода. Величины $y_m^2/2R_m^2$ даются в таблицах по аргументу y_m.

Редукция направлений (рис. 51). Для вычисления редукции направлений служат формулы:

$$\delta_1 = \frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho\left(y_m - \frac{\Delta y}{6}\right) - \rho\frac{\Delta x y_m^3}{6R_m^4} + \frac{t_m \eta_m^2 y_m^2 \Delta y}{R_m^3}\rho;$$

$$\delta_2 = -\frac{\Delta x}{2R_m^2}\rho\left(y_m + \frac{\Delta y}{6}\right) + \rho\frac{\Delta x y_m^3}{6R_m^4} - \frac{t_m \eta_m^2 y_m^2 \Delta y}{R_m^3}\rho.$$

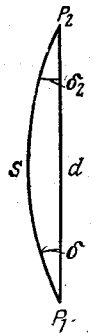


Рис. 51. Редукция направлений

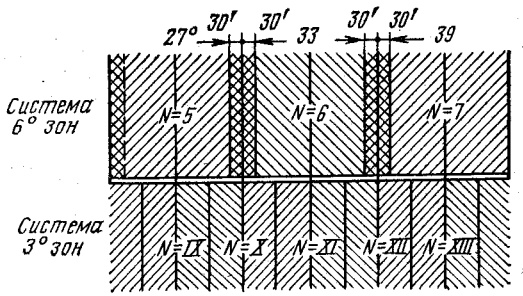


Рис. 52. Перекрытия координатных зон

Дирекционные углы прямого и обратного направлений после получения γ и δ вычисляют по формулам:

$$\alpha_1 = A_1 - \gamma_1 - \delta_1; \quad \alpha_2 = A_2 - \gamma_2 - \delta_2.$$

Для триангуляции 2 класса формулы редукций направлений применяются в виде:

$$\delta_1 = \frac{1}{2R_m^2}\Delta x\rho\,(y_m - \Delta y/6);$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2R_m^2}\Delta x\rho\,(y_m + \Delta y/6).$$

Для триангуляции 3 класса и сплошных сетей редукции направления вычисляют по формуле

$$\delta = \frac{1}{2R_m^2}\Delta x y_m \rho.$$

Контролем вычислений редукции служит геометрическое условие: сумма поправок углов в любой замкнутой фигуре должна быть равна сфероидическому избытку этой фигуры, взятому с обратным знаком.

Перевычисление координат из одной зоны в другую. На практике при применении проекции Гаусса—Крюгера возникает задача перевычислить координаты, данные в системе одной зоны, в другую зону, соседнюю. При наличии шестиградусной и трехградусной зон приходится перевычислять координаты из шестиградусной зоны в шестиградусную, из шестиградусной в трехградусную и из трехградусной в трехградусную. Чтобы уменьшить случаи перевычисления координат, установлена система перекрытия зон: западная и восточная зоны взаимно перекрываются на 30′ по долготе. В стыке зон, в полосе перекрытия, координаты пунктов даются как в западной, так и в восточной системе (рис. 52).

Перевычисления координат выполняют по таблицам. Наиболее универсальными являются «Таблицы для преобразования прямоугольных координат» А. М. Вировца и Б. Н. Рабиновича. В них формулы для вычисления имеют вид:

$$x_2 = X_0 + a\,\Delta y + b\,\Delta y^2 + c;$$
$$y_2 = \Delta y + a_1\,\Delta y + b_1\,\Delta y^2 + c_1.$$

В таблицах по аргументу x_1 даны: y_0, X_0, a, a_1, b, b_1, по аргументам x_1 и Δy — c и c_1.

При помощи этих таблиц можно перевычислить координаты из одной шестиградусной зоны в другую, из шестиградусной в трехградусную и наоборот.

Для практического применения проекции Гаусса—Крюгера в СССР существуют различные таблицы, главнейшие из которых следующие: Ф. Н. Красовский и А. А. Изотов. «Таблицы для вычисления координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°» (1946 г.), «Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30 до 80°» (1958 г.), составленные под руководством Д. А. Ларина.

II.2.9. Понятие о других проекциях

Во многих странах применяются другие равноугольные проекции эллипсоида на плоскость, которые имеют свои ценные свойства. Наиболее распространенными из этих проекций являются равноугольная коническая проекция Ламберта и стереографическая проекция Руссиля.

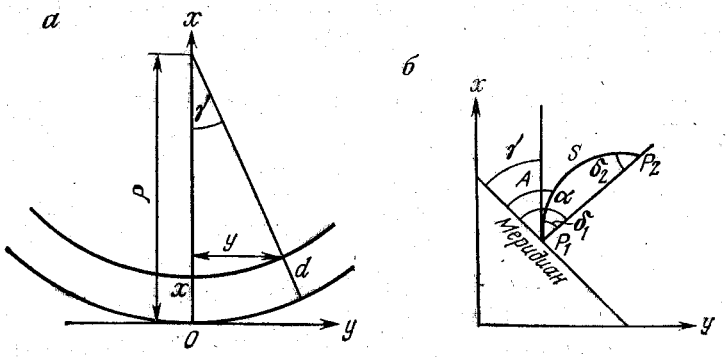


Рис. 53. Проекция Ламберта:
а — направление координатных осей; *б* — редукция направлений

Проекция Ламберта удобна для стран, вытянутых по параллели небольшой широтной полосой. Начало координат выбирают в точке O, ось абсцисс направляют на север по осевому меридиану, ось ординат — по касательной к изображению параллели касания (рис. 53, *а*). Масштаб по этой параллели принимают равным либо единице, либо 0,999.

Плоские координаты и сближение меридианов на плоскости вычисляют по формулам:

$$y = (\rho_0 - d)\sin\gamma; \quad x = d + y\,\mathrm{tg}\,(\gamma/2);$$

$$\gamma = (L - L_0)\sin B_0,$$

где B_0 — широта параллели касания; L_0 — долгота осевого меридиана, а $\rho_0 = N_0\,\mathrm{ctg}\,B_0$. Дирекционный угол вычисляют по формуле

$$\alpha = A - \gamma - \delta.$$

где A — геодезический азимут; δ — редукция направления (рис. 53, *б*).

Конические проекции сфероида характеризуются сложностью редукционной задачи. В проекции Ламберта редукции в длину и направление вычисляют по весьма сложным формулам. Поэтому эту проекцию целесообразно применять в тех случаях, когда не требуется строгого учета редукций.

Проекция Руссиля удобна для стран, имеющих территорию круглого очертания. За начало координат в этой проекции принимают центральную точку изображаемой территории, за ось абсцисс — осевой меридиан. Абсциссы точек осевого меридиана вычисляют по формуле

$$x_0 = 2R_0\,\mathrm{tg}\,(s/2R_0),$$

где R_0 — средний радиус кривизны в точке начала координат; s — дуга меридиана между параллелью начала координат и параллелью данной точки.

Прямоугольные координаты x и y по геодезическим координатам B и L вычисляют по формулам:

$$x_R = a_1\,\Delta B + a_2\,\Delta B^2 + a_3 l^2 + a_4\,\Delta B^2 + \cdots;$$

$$y_R = b_1 l + b_2\,\Delta B l + b_3\,\Delta B^2 l + b_4 l^3 + \cdots.$$

Коэффициенты a_i и b_i при заданном начале координат — постоянные числа, а ΔB и l — разности широт и долгот начала координат и осевого меридиана. Эти формулы называются формулами с постоянными коэффициентами.

Если совместить начало координат проекции Гаусса—Крюгера с началом координат проекции Руссиля, то зависимость координат выразится формулами:

$$x_R = x_G + \frac{x_G^3}{12R_0^2} - \frac{x_G y_G^2}{4R_0^2} + \ldots;$$

$$y_R = y_G + \frac{y_G x_G^2}{4R_0^2} - \frac{y_G^3}{12R_0^2} + \ldots,$$

где x_G, y_G — координаты Гаусса—Крюгера; R_0 — средний радиус кривизны в начале координат.

Величины редукций в длины и направления в проекции Руссиля меньше, чем в проекции Гаусса—Крюгера:

	Проекция Гаусса—Крюгера	*Проекция Руссиля*
Редукция длин	$sy_m^2/2R_0^2$	$s\left(y_m^2 + x_m^2\right)/4R_0^2$
Редукция направления . .	$\Delta x y_m \rho/2R_0^2$	$(x_2 y_1 - x_1 y_2)\rho/4R_0^2$

Таким образом, искажение длин в целом в проекции Руссиля несколько меньше, чем в проекции Гаусса—Крюгера; редукция в направлении в проекции Руссиля примерно в два раза меньше редукции в проекции Гаусса—Крюгера. Однако проекция Руссиля пригодна для ограниченных территорий округлых очертаний, тогда как проекция Гаусса—Крюгера может применяться для всего земного шара.

II.2.10. Дифференциальные формулы

Формулы, по которым вычисляются поправки к геодезическим координатам за изменения исходных данных, как, например, начальных координат, азимутов, длины геодезической линии и параметров принятого референц-эллипсоида, называются дифференциальными формулами. Различают дифференциальные формулы первого и второго рода, причем первые учитывают изменения геодезических координат, азимутов и геодезических линий, вторые — параметров эллипсоида.

Дифференциальные формулы первого рода. Если изменились B_1 на dB_1, L_1 на dL_1, A_1 на dA_1, s на ds, то изменения координат второго пункта вычисляют по формулам:

$$dB_2 = dB_1 + b\,ds/s - b\,\mathrm{tg}\,B_m\,dA_1/2\rho;$$

$$dL_2 = dL_1 + l\,ds/s + l\,\mathrm{tg}\,B_m\,dB_1/2\rho + l\,\mathrm{ctg}\,A_m\,dA_1/2\rho,$$

$$dA_2 = t\,ds/s + t\,dB_1/\sin 2B_m\rho + t\,\mathrm{ctg}\,A_m\,dA_1/2\rho,$$

где b, l и t — разности широт, долгот и азимутов. Эти формулы пригодны для расстояний порядка 25—30 км, т. е. для триангуляции 1 класса. Вычисления по этим формулам следует вести с удержанием четырех-пяти десятичных знаков.

Дифференциальные формулы второго рода. Если изменились параметры принятого референц-эллипсоида, например a на da и α на $d\alpha$, поправки к геодезическим координатам вычисляют по формулам:

$$dB_2 = -b\ [da/a - (2 - 3\sin^2 B_m)\, d\alpha];$$

$$dL_2 = -l\,(da/a + \sin^2 B_m\, d\alpha);$$

$$dA_2 = -t\,(da/a + \sin^2 B_m\, d\alpha).$$

Эти формулы точны до величин e^2b, e^2l, e^2, где e^2t — квадрат эксцентриситета эллипсоида, и пригодны для триангуляции 1 класса, если ее стороны не превышают 25—30 км. Вычисление ведется по этим формулам с удержанием четырех-пяти десятичных знаков.

Если геодезические координаты конечного пункта изменились на величины dB_2 и dL_2, то изменения геодезической линии и ее азимутов в конечных пунктах вычисляют по формулам:

$$ds = -M_2 \cos A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2\, dL_2;$$

$$s\, dA_1 = M_2 \sin A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \cos A_2\, dL_2;$$

$$s\, dA_2 = M_2 \sin A_2\, dB_2 + N_2 \cos B_2 \cos A_2\, dL_2.$$

Аналогичные формулы получаются в случае, если изменились геодезические координаты первого пункта; в этом случае меняются индексы «2» на «1».

Если допустить, что одновременно изменились B_1 на dB_1, B_2 на dB_2, L_1 на dL_1 и L_2 на dL_2, то изменения геодезической линии и ее азимутов в этих пунктах выразятся формулами:

$$ds = -M_1 \cos A_1\, dB_1 - M_2 \cos A_2\, dB_2 - N_2 \cos B_2 \sin A_2 \times \\ \times (dL_2 - dL_1);$$

$$s\, dA_1 = M_1 \sin A_1\, dB_1 + M_2 \sin A_2\, dB_2 - \\ - N_2 \cos B_2 \sin A_2\, (dL_2 - dL_1);$$

$$s\, dA_2 = M_1 \sin A_1\, dB_1 + M_2 \sin A_2\, dB_2 + \\ + N_2 \cos B_2 \cos A_2\, (dL_2 - dL_1),$$

где M — меридианный радиус кривизны; N — радиус кривизны первого вертикала. При вычислениях dB и dL должны быть выражены в радианах.

Эти формулы приближенные, в них вместо приведенной длины геодезической линии всюду принята сама длина геодезической линии. Разность этих длин — малая величина третьего порядка. Следовательно, эти формулы применимы для триангуляции 1 класса, если ее стороны не превышают 25—30 м.

II.2.11. Уклонение отвесной линии

Угол между отвесной линией и нормалью к поверхности референц-эллипсоида называется астрономо-геодезическим уклонением отвесной линии. Проекции этого угла на плоскости меридиана и первого вертикала называются компонентами уклонения отвесной линии в меридиане и первом вертикале.

Чтобы определить уклонение отвесной линии в данной точке нужно знать астрономические и геодезические координаты этого пункта (рис. 54).

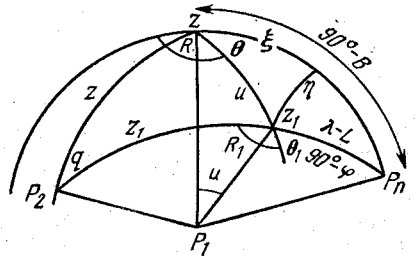


Рис. 54. Схема определения азимута Лапласа

Уклонение отвесной линии в меридиане вычисляют по формуле

$$\xi = \varphi - B - 0{,}17H \sin 2B,$$

где φ — астрономическая широта.

Уклонения в первом вертикале вычисляют по формуле

$$\eta = (\lambda - L)\cos\varphi,$$

где λ — астрономическая долгота.

Уклонение отвесной линии

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{(\varphi - B)^2 + [(\lambda - L)\cos\varphi]^2}.$$

Влияние уклонения отвесной линии на астрономический азимут определяется формулой

$$\alpha - A = (\lambda - L)\sin\varphi + (\xi \sin A - \eta \cos A)/\operatorname{tg} z,$$

где A — геодезический азимут; z — зенитное расстояние геодезического пункта; α — астрономический азимут. Из этого уравнения можно получить формулу для вычисления геодезического азимута:

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A)/\operatorname{tg} z.$$

Полученный из этого уравнения геодезический азимут называется азимутом Лапласа, а само уравнение — уравнением Лапласа. Второй член уравнения Лапласа мал в равнинной местности, и, как правило, его при вычислении не учитывают, применяя формулу в виде

$$A = \alpha - (\lambda - L)\sin\varphi.$$

Это уравнение имеет очень важное значение для геодезических работ, оно дает возможность перейти от астрономических азимутов к геодезическим. Лапласовы азимуты получаются независимо друг от друга и предназначены для контроля угловых измерений в триангуляции; они используются при уравнивании астрономо-геодезических сетей.

Геодезическое зенитное расстояние определяется формулой

$$Z = z + \xi \cos A + \eta \sin A,$$

где Z — геодезическое зенитное расстояние; z — астрономическое зенитное расстояние.

Список литературы

1. *Красовский Ф. Н.* Руководство по высшей геодезии. Ч. II. М., Геодезиздат, 1942.
2. *Морозов В. П.* Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1979.

II.3. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

С. С. Уралов

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

II.3.1. Задачи геодезической астрономии

Геодезической астрономией называется раздел астрономии, в котором изучают способы определения географических координат точек земной поверхности и азимутов направлений из наблюдений светил.

Астрономические определения широт, долгот и азимутов совместно с результатами геодезических и гравиметрических измерений обеспечивают установление исходных геодезических дат и ориентировку государственной геодезической сети, определение параметров земного эллипсоида, ориентирование осей референцной системы геодезических координат и определение высот квазигеоида относительно референц-эллипсоида.

Геодезические азимуты сторон триангуляции, полученные из астрономических наблюдений, называемые азимутами Лапласа, служат для ориентирования триангуляции и отдельных ее звеньев в единой системе геодезических координат, для контроля угловых измерений в астрономо-геодезической сети. Азимуты Лапласа ограничивают и локализуют действие систематических и случайных ошибок в угловых измерениях.

Методы геодезической астрономии успешно применяются в космических исследованиях, при построении базисов космической триангуляции, при определениях астрономических координат пунктов космической триангуляции. Принципиально эти методы можно применить для определения координат ИСЗ и других космических объектов. Астрономические определения координат и азимута находят широкое применение в прикладной геодезии, при геодезическом обеспечении различных инженерных работ.

II.3.2. Принципы определения географических координат и азимута направления

Из геометрии небесной сферы следует, что географическая широта φ, направление меридиана NS и местное звездное время в некоторый момент T в каком-либо пункте земной поверхности могут быть определены, если для этого момента определено положение зенита Z на небесной сфере. Действительно, склонение зенита численно равно широте места $\delta_Z = \varphi$, его прямое восхождение — местному звездному времени $\alpha_Z = s$, а большой круг, проходящий через полюс и зенит, определяет небесный меридиан и полуденную линию NS.

Вследствие суточного вращения Земли положение зенита точки наблюдения непрерывно меняется относительно звезд. В каждый данный момент положение зенита на небесной сфере относительно звезд может быть определено или зенитными расстояниями минимум двух светил с известными экваториальными координатами $\sigma_1\,(\alpha_1,\ \delta_1)$ и $\sigma_2\,(\alpha_2,\ \delta_2)$, или как пересечение по крайней мере двух вертикалов, проходящих через эти светила, т. е. азимутами светил A_1 и A_2.

Для наиболее точного определения положения зенита по измеренным зенитным расстояниям или азимутам двух светил необходимо, чтобы разность их азимутов была близка к 90°, т. е. светила наблюдались в двух взаимно перпендикулярных вертикалах.

Все способы астрономических определений широты, времени и направления меридиана делят на зенитальные, при которых измеряют зенитные расстояния, и азимутальные, при которых измеряют азимуты светил.

Географическая долгота пункта относительно начального меридиана численно равна разности одноименных местных времен, определенных одновременно (или приведенных к одному и тому же моменту) как в пункте наблюдения, так и в пункте, расположенном на начальном меридиане, т. е. $\lambda = s - S$ — в системе звездного времени или $\lambda = m - \mathrm{UT1}$ — в системе среднего солнечного времени. Поэтому задача определения долготы пункта состоит из определения местного времени s или m в некоторый момент T по измерениям зенитных расстояний светил или их азимутов, определения времени начального меридиана S или UT1 в тот же самый момент T.

Задача определения азимута a направления на земной предмет сводится к определению азимута светила A и измерению горизонтального угла Q между светилом и местным предметом:

$$a = A + Q.$$

Аналитическое обоснование различных способов определения широт, времени и азимута вытекает из решения паралактического треугольника $PZ\sigma$, построенного для каждого наблюдаемого светила.

В зенитальных способах основным уравнением, связывающим измеряемую величину z в некоторый момент T с определяемыми значениями широты φ и времени s, является уравнение

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t, \qquad \text{(II.3.1)}$$

где $t = s - \alpha = T + u - \alpha$.

Так как z и T получают из измерений, а экваториальные координаты α и δ выбирают из звездного каталога на момент наблюдений, то в уравнении (II.3.1) имеется два неизвестных: φ и u. Определение их на основании уравнения (II.3.1) можно производить как совместно, так и раздельно. При этом нахождение искомых величин облегчается тем, что обычно известны их приближенные значения. Поэтому практически находят малые поправки $\Delta\varphi$ и Δu к приближенным значениям неизвестных φ_0 и u_0. Обычно эта задача решается методом наименьших квадратов по наблюдениям нескольких светил.

Условия выбора светил устанавливаются на основе принципа наибольшего веса уравненных значений определяемых величин.

В азимутальных способах основным уравнением является

$$\operatorname{ctg} A = \sin\varphi \operatorname{ctg} t - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosec} t. \qquad \text{(II.3.2)}$$

Азимут светила в функции измеренного горизонтального направления представляют в виде

$$A = N - M_N, \qquad \text{(II.3.3)}$$

где N — измеренное горизонтальное направление на светило; M_N — место севера — отсчет по горизонтальному лимбу, соответствующий направлению на север.

В функции измеренного горизонтального угла Q между светилом и местным предметом азимут светила будет:

$$A = a - Q. \qquad \text{(II.3.4)}$$

Таким образом, в уравнении (II.3.2) имеется три неизвестных: $M_N\,(a)$, φ и $s\,(u)$. Как и в зенитальных способах, нахождение этих величин производят либо совместно, либо раздельно. При этом из системы уравнений

(II.3.2), приведенных к линейному виду, находят малые поправки ΔM_N (Δa), $\Delta\varphi$, Δu к приближенным значениям M_N^0 (a_0), φ_0, u_0 определяемых величин.

Б. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

II.3.3. Астрономические теодолиты

Для определения широты, долготы и азимута применяют полевые астрономические приборы: астрономические теодолиты, зенит-телескопы, призменные астролябии, пассажные инструменты. Для приближенных астрономических определений применяют различные по точности теодолиты, а в мореходной и авиационной астрономии — секстанты. Необ-

ТАБЛИЦА 39

Основные технические данные	Марка теодолита			
	АУ 2/10	У-5	Вильд Т-4	ДКМ-3А
Диаметр объектива, мм	55	40	60	72
Фокусное расстояние объектива, мм	450	374	550	510
Увеличение трубы, крат	45, 56	31, 41	65	27, 46
Поле зрения трубы	54′	55′	1°	1°
Цена оборота окулярного микрометра, угл. с	115	135—140	90—100	115
Диаметр горизонтального лимба, мм	220	175	250	—
Диаметр вертикального лимба, мм	135	175	145	—
Цена деления горизонтального лимба, угл. мин	5	10	2	10
Цена деления вертикального лимба, угл. мин	5	10	4	10
Цена деления микроскопа-микрометра, угл. с	2	5	—	—
Цена деления оптического микрометра, угл. с	—	—	0,1	0,1
Цена деления уровней, угл. с:				
накладного на горизонтальную ось	2—2,5	4—5	1	2
при алидаде вертикального круга	10	3	—	—
талькоттовского	1,2—2,0	1,5—2,5	1—2	2
Длина горизонтальной оси между рабочими сечениями цапф, мм	252	182	350	—
Диаметр цапф, мм	40	28	40	—
Масса теодолита, кг	37	22	49,3	14,2
Масса полного комплекта со штативом, упаковочными и транспортировочными ящиками, кг	172	80	125	26

ходимым прибором для астрономических наблюдений является хронометр или точные часы, по которым фиксируют моменты наблюдения светил.

Наибольшее применение в практике геодезической астрономии имеет астрономический теодолит (табл. 39). Он предназначен для точных измерений горизонтальных направлений и зенитных расстояний светил, для наблюдений прохождений светил через альмукантарат или вертикал. С помощью окулярного микрометра трубы можно измерять малые разности зенитных расстояний и азимутов.

Особенностями современного астрономического теодолита являются:

ломаная центральная труба, позволяющая наблюдать светила и предметы на зенитных расстояниях от 0 до 120°.

улучшенная оптика, позволяющая использовать для наблюдений значительную часть поля зрения трубы;

наличие трех точных уровней: накладного (подвесного) на горизонтальную ось, при алидаде вертикального круга, талькоттовского — для фиксаций малых изменений положения трубы по высоте;

окулярный микрометр трубы имеет сетку из 7—9 постоянных нитей и перпендикулярного к ним подвижного биссектора; коробка окулярного микрометра вместе со всеми нитями может поворачиваться на 90°;

электроосвещение поля зрения трубы и отсчетных микрометров горизонтального и вертикального кругов для производства ночных наблюдений;

дополнительные приборы для полуавтоматических или автоматических наблюдений моментов прохождений звезд: контактный микрометр, фотоэлектрическая установка, электромоторный привод с редуктором для наблюдений косых прохождений звезд.

II.3.4. Пассажный инструмент

Пассажный инструмент предназначен для точных определений времени, широты и азимута направления из наблюдений прохождения светил через вертикал. Для определения времени прибор ориентируют в меридиане, для определения широты — в первом вертикале, для определения азимута — в вертикале земного предмета. Пассажный инструмент применяют преимущественно для определения долгот основных и фундаментальных пунктов, а также для точных определений времени в обсерваториях и службах времени.

Основные технические характеристики пассажного инструмента АПМ-10

Диаметр объектива, мм	100
Фокусное расстояние объектива, мм	1000
Увеличение трубы, крат	100, 140, 200
Цена оборота винта контактного микрометра, угл. с	82,5
Цена деления подвесного уровня, угл. с	1
Точность отсчета по вертикальному кругу, угл. мин	1
Расстояние между рабочими сечениями цапф, мм	700
Масса прибора, кг	280

II.3.5. Хронометры. Хронографы

Хронометр предназначен для точного измерения времени. Для астрономических определений в астрономо-геодезической сети используется кварцевый хронометр типа «Альтаир».

Хронометр после восьмичасового прогрева имеет среднюю квадратическую вариацию суточного хода менее 1 мс. Его показания с дискрет-

ностью 1 с выдаются на стрелочный циферблат и цифровое светящееся табло.

Поправкой хронометра в некоторый момент называется разность между временем в принятой системе счета и показанием хронометра T в этот момент. В системе местного звездного или местного среднего времени в момент T можно записать:

$$u^* = s - T, \quad u = m - T. \tag{II.3.5}$$

Определить поправку хронометра — значит определить время в данный момент. Изменение поправки хронометра за единицу времени называется ходом хронометра. Он определяется формулой

$$\omega = (u_2 - u_1)/(T_2 - T_1), \tag{II.3.6}$$

где u_1, u_2 — поправки хронометра в моменты T_1 и T_2 соответственно. Знак хода определяется знаком разности $u_2 - u_1$, так как интервал $T_2 - T_1$ между двумя последовательными моментами всегда положителен.

Полевой маркопечатающий хронограф ХПМ-3 предназначен для автоматической регистрации показаний хронометра, а также замыканий (размыканий) электрической цепи устройств, регистрирующих наблюдения звезд, и приема радиосигналов времени. Регистрация моментов наблюдений звезд с контактным микрометром производится в системе показаний рабочего хронометра. Средняя квадратическая ошибка регистрации не превышает 0,01 с. Запись производится на бумажную ленту. В комплект маркопечатающего хронографа входит прибор для расшифровки хронографической ленты, построенный на принципе клиновой палетки.

Цифропечатающий хронограф 21П предназначен для регистрации моментов электрических импульсов в системе шкалы самого хронографа с погрешностью $0{,}002^s$. К хронографу придается кварцевый генератор 22П для питания синхронного двигателя. Кварцевый генератор включает генератор на 72 кГц, делитель частоты до 50 Гц и усилитель мощности. Суточная вариация частоты кварцевых генераторов после двухчасового прогрева не превышает $3 \cdot 10^{-7}$, что соответствует суточной вариации показаний хронографа 0,03 с.

Для печати показаний хронографа на бумажной ленте используется система дисков, вращающихся при помощи синхронного двигателя, питаемого током стабильной частоты. Хронограф регистрирует до 13 импульсов тока в секунду.

Малогабаритное печатающее устройство МПУ8-3 предназначено для регистрации моментов замыкания (размыкания) входной электрической цепи в системе показаний кварцевого хронометра «Альтаир».

Ошибка регистрации момента внешнего сигнала в системе показаний хронометра не превосходит 1 мс.

В комплект МПУ8-3 входят: 1) собственно печатающее устройство, имеющее схемы переработки информации, управления печатью и блок стабилизации питания; 2) дистанционный пульт управления с клавиатурой ручного ввода информации и переключателями вида работ; 3) блок питания устройства переменным током 220 В, 50 Гц.

II.3.6. Прием радиосигналов времени

Радиосигналы времени отечественными и зарубежными радиостанциями посылаются в телеграфном коде. Для прослушивания их через телефон радиоприемник имеет второй гетеродин, а для регистрации

радиосигналов на хронографе — специальный выход (импульсную приставку), преобразующий радиосигналы в импульсы постоянного тока.

Для астрономических определений в нашей стране в настоящее время используют радиоприемник Р-311 с дополнительной импульсной приставкой и специализированный радиоприемник «Астра».

Все передаваемые отечественными радиостанциями сигналы времени формируются на основе шкалы равномерного координированного времени Советского Союза UTC (SU), воспроизводимой Государственным эталоном времени и частоты СССР, которая согласована со шкалой UTC МБВ с ошибкой, не превышающей 0,1 мс.

Для передачи временных отметок используются сигналы с периодами следования 1 мин, 1 и 0,1 с. Длительность сигналов с периодом 1 с (звуковая точка) — 100 мс. Сигналы, приходящиеся на начало каждой минуты (звуковое тире), удлиняются до 500 мс. Длительность сигналов с периодом 0,1 с — 20 мс; сигналы, приходящиеся на начало каждой секунды, удлиняются до 40 мс.

Широковещательные сигналы поверки времени (шесть точек) передаются один раз в час в виде пакета из шести прямоугольных импульсов длительностью 0,1 с каждый и периодом следования 1 с. Начало шестого импульса соответствует началу часа с ошибкой, не превышающей 100 мс.

Передача сигналов времени радиостанциями, входящими в систему координированного времени, сопровождается информацией о числовом значении и знаке разности шкал времени UT1 — UTC = DUT1 + + dUT1, где DUT1 — десятые, а dUT1 — сотые доли секунды. Информация передается путем окрашивания секундных сигналов в коде, публикуемом в программе передач радиосигналов времени. Точные значения (до 0,1 мс) разностей UT1—UTC публикуются в недельных и квартальных бюллетенях «Всемирное время», издаваемых Госстандартом СССР.

Для радиосигналов, моменты передачи которых отличаются от программных моментов более чем на 0,1 мс, сообщается поправка DT к программному моменту UTC, так что

$$\mathrm{UT1}_{\text{сиг}} = \mathrm{UTC} + (\mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}) + \mathrm{DT}. \tag{II.3.7}$$

Принять радиосигналы времени — значит определить показание хронометра в момент выхода сигнала с антенны передающей станции. С целью ослабления влияния случайных ошибок приема, как правило, принимают 8—10 сигналов и вычисляют показание хронометра в средний момент передачи. Для приведения полученного показания хронометра к моменту выхода соответствующего сигнала с антенны передающей станции учитывают поправки за время распространения радиоволн и время задержки в цепях приемного устройства.

Показание хронометра в средний момент передачи сигналов вычисляют по формуле

$$X = X' - \tau_р - \tau_п, \tag{II.3.8}$$

где $X' = (\sum X_i')/n$ — показание хронометра в средний момент приема радиосигналов (среднее арифметическое из зафиксированных показаний хронометра X_i'); $\tau_р$ — поправка за время распространения радиоволн от антенны передающей станции до пункта приема (выбирается из специальных таблиц); $\tau_п$ — поправка за время задержки в цепях приемного устройства (определяется из специальных лабораторных исследований).

ТАБЛИЦА 40

Хронометр звездный № 384

12 августа 1976 г. Радиостанция РИД 5 мГц UTC = 10^h30^m

$\tau_р = 0{,}001^s$ $\tau_п = 0{,}002^s$ $\lambda = 2^h30^m34{,}160^s$

UTC_i координированное время подачи сигналов	Показания хронометра X'_i в моменты UTC_i	Вычисление поправки хронометра: в системе местного звездного времени	Вычисление поправки хронометра: в системе местного среднего времени
$10^h30^m50^s$	$10^h23^m01{,}12^s$	$S_0 = 21^h19^m58{,}774^s$	UT1 = $10^h31^m19{,}660^s$
55	06,12	UT1 = 10 31 19,660	λ = 2 30 34,160
31 00	11,13	μUT1 = 1 43,711	
10	21,18		m = 13 01 53,820
15	26,19	S = 7 53 02,145	X = 10 23 30,696
20	31,20	λ = 2 30 34,160	
30	41,24		
35	46,24	s = 10 23 36,305	
45	56,27	X = 10 23 30,696	
55	24 06,30		
		$u = +2^h38^m23{,}124^s$	
		в момент $X = 10^h23{,}5^m$	
UTC = $10^h31^m19{,}500^s$	X' = 10 23 30,699		
DUT1 = + 0,10	$\tau_р$ = 0,001	$u^* = +5{,}619^s$	
dUT1 = + 0,06	$\tau_п$ = 0,002	в момент $X = 10^h23{,}5^m$	
UT1 = 10 31 19,660	$X = 10^h23^m30{,}696^s$		

Прием секундных сигналов координированного времени производится, как правило, автоматически, с записью на ленте регистрирующего устройства.

При дешифрировании хронографической ленты с нее выписываются моменты координированного времени UTC_i подачи сигналов и соответствующие им показания хронометра X'_i. По результатам приема радиосигналов находят поправку хронометра в той или иной системе счета времени. Для любой системы счета поправка хронометра находится по единой формуле: время в средний момент подачи радиосигналов в принятой системе счета минус показание хронометра в этот момент. Пример приема секундных сигналов координированного времени приведен в табл. 40.

Значения s и m вычисляются по формулам сферической астрономии:

$$s = S + \lambda, \quad \text{где } S = S_0 + \text{UT1} + \mu\text{UT1}; \qquad \text{(II.3.9)}$$

$$m = \text{UT1} + \lambda. \qquad \text{(II.3.10)}$$

Если по результатам приема радиосигналов времени определены поправки хронометра u_1 и u_2 в моменты X_1 и X_2, то на основании формулы (II.3.6) можно вычислить ход хронометра $\omega = (u_2 - u_1)/(X_2 - X_1)$ в той системе времени, в которой вычислены поправки. При окончательных вычислениях приема радиосигналов времени вводят поправки за разность шкал всемирного и координированного времени, выбираемые из бюллетеней «всемирного времени» с ошибкой, не превышающей 0,1 мс. В этом случае всемирное время UT1 в средний момент передачи сигналов определяют по формуле (II.3.7).

Приборы, предназначенные для астрономических определений, детально исследуют как в лабораторных, так и в полевых условиях.

В. ЗЕНИТАЛЬНЫЕ СПОСОБЫ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

II.3.7. Особенности измерения зенитных расстояний светил

В зенитальных способах астрономических определений измеряемыми величинами являются зенитные расстояния светил. Вследствие суточного вращения Земли вокруг своей оси зенитные расстояния и азимуты светил непрерывно изменяются. Поэтому их измерение необходимо производить в определенной системе счета времени. При этом процесс визирования на светило в общем случае связан с отсчитыванием показаний хронометра в моменты наведения горизонтальной нити на светило или в моменты прохождения светила через горизонтальные нити, установленной неподвижно по высоте трубы прибора.

Визирование методом наведения горизонтальной нити на светило под счет секундных ударов хронометра применяется в тех случаях, когда скорость изменения зенитного расстояния мала. Это соответствует положению светила в меридиане или вблизи него. В высоких широтах, где углы между суточными параллелями светил и кругами равных высот малы, пределы применения метода наведений расширяются. Визирование методом наблюдения прохождений светил через горизонтальные нити неподвижной по высоте трубы прибора необходимо применять во всех случаях, когда скорость изменения зенитного расстояния светила достаточно велика.

Для ослабления влияния личных ошибок наблюдателя, характерных для метода «глаз—ухо», наблюдения осуществляются при помощи

контактного микрометра (полуавтоматический метод визирования) или фотоэлектрической регистрации (автоматический метод визирования). Для учета астрономической рефракции во время наблюдений зенитных расстояний светил измеряют температуру и давление воздуха. Измерение зенитных расстояний светил производят как при одном, так и при двух положениях вертикального круга прибора. В точных способах астрономических определений зенитные расстояния светил измеряются в пределах от 10 до 60°. Верхний предел обусловлен влиянием инструментальных источников ошибок, нижний — ошибками таблиц рефракции. Формулы для вычисления зенитных расстояний светил имеют вид:

$$Z' = L - M_Z; \quad Z' = M_Z - R; \quad Z' = (L - R)/2;$$

$$M_Z = (L + R)/2; \quad L = L' + i^{\partial/2}\tau/2; \quad R = R' + i^{\partial/2}\tau/2; \quad \text{(II.3.11)}$$

$$i^{\partial/2} = (\text{Л} + \text{П}) - m.$$

В формулах (II.3.11) L' и R' — отсчеты вертикального лимба; $i^{\partial/2}$ — наклон оси уровня при вертикальном круге в полуделениях; Л и П — отсчеты по концам пузырька уровня; m — число делений на ампуле уровня (подписи от 0 до m); $\tau/2$ — цена полуделения шкалы уровня (в угл. с).

При наблюдениях с подвижной нитью окулярного микрометра отсчеты вертикального лимба исправляются поправками:

$$L' = L_0 \pm (M_L - 10^{\text{об}})\,R; \quad R' = R_0 \pm (M_R - 10^{\text{об}})\,R,$$

где L_0 и R_0 — отсчеты по лимбу; M_L и M_R — отсчеты по шкале микрометра (в оборотах); $10^{\text{об}}$ — условный отсчет для нуль-пункта шкалы микрометра; R — цена оборота окулярного микрометра. Поправка за микрометр прибавляется или вычитается в зависимости от того, возрастают или убывают отсчеты по микрометру с увеличением зенитного расстояния.

Зенитное расстояние светила, исправленное поправкой за рефракцию

$$Z = Z' + \rho, \qquad \text{(II.3.12)}$$

где $\rho = \rho_0 \gamma B$; ρ_0 — средняя (нормальная) рефракция (выбирается из таблиц по Z'); γ — коэффициент, учитывающий температуру воздуха (выбирается из таблиц по t); B — коэффициент, учитывающий давление воздуха (выбирается из таблиц).

II.3.8. Сведения из общей теории зенитальных способов астрономических определений

В основу общей теории зенитальных способов положена задача совместного определения широты и времени (долготы) по измеренным зенитным расстояниям светил.

Принципиально решение общей задачи может быть получено не менее чем из двух уравнений вида (II.3.1). Однако измерение зенитных расстояний светил может производиться при одном положении вертикального круга теодолита (КЛ или КП). В этом случае все измеренные зенитные расстояния получают дополнительную неизвестную поправку $\Delta Z = \zeta = \text{const}$ за неточное знание места зенита M_Z и другие систематические ошибки, общие для наблюдаемой группы звезд. Поэтому в уравнении (II.3.1) будет три неизвестные величины: φ, u и ζ. При этом условии решение общей задачи может быть получено минимум из трех уравнений (II.3.1), т. е. по наблюдениям по крайней мере трех светил.

Решение общей задачи значительно упрощается, если, пользуясь приближенными значениями φ_0, u_0 и M_Z^0, решить ее с помощью линейных уравнений поправок, вытекающих из уравнения (II.3.1). Уравнение поправок имеет вид:

$$-\zeta \pm \cos A_i \Delta\varphi \pm 15 \cos\varphi_0 \sin A_i \Delta u + l_i = v_i, \qquad \text{(II. 3.13)}$$

$$\text{где } l_i = Z_{0i} - Z'_{H_i}; \qquad \text{(II. 3.14)}$$

$$Z_{0i} = \arccos(\sin\varphi_0 \sin\delta_i + \cos\varphi_0 \cos\delta_i \cos t_{0i}); \qquad \text{(II. 3.15)}$$

$$t_{0i} = T_{H_i} + u_0 + \omega(T_H - X) - \alpha_i; \qquad \text{(II. 3.16)}$$

$$Z'_H = \left(L'_i + i^{\partial/2}\frac{\tau}{2}\right) - M_Z^0 + \rho_i + g \sin Z'_i$$

$$\text{или } Z'_H = M_Z^0 - \left(R'_i + i\frac{\tau}{2}\right) + \rho_i + g \sin Z'_{H_i};$$

Z'_H — измеренное зенитное расстояние; v_i — поправка в измеренное зенитное расстояние.

Располагая наблюдения серии звезд в промежутке между двумя приемами радиосигналов точного времени, в результате совместной обработки данных наблюдений и приема радиосигналов получают географические координаты пункта наблюдения.

Уравнение поправок в этом случае имеет вид:

$$-\zeta \pm \cos A_i \Delta\varphi \pm 15 \cos\varphi_0 \sin A_i \Delta\lambda + l_i = v_i, \qquad \text{(II. 3.17)}$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ — поправки к предварительным условным значениям координат пункта φ_0 и λ_0.

Для решения уравнений (II.3.17) производят замену искомых поправок координат $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ на соответствующие им составляющие уклонения отвесной линии от условной нормали:

$$x = \varphi - \varphi_0 = \Delta\varphi;$$

$$y = 15(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi = 15\Delta\lambda\cos\varphi, \qquad \text{(II. 3.18)}$$

где x, y — условные составляющие уклонения отвеса в меридиане и в первом вертикале соответственно.

При этом уравнение поправок (II.3.17) примет вид:

$$-\zeta \pm \cos A_i x \pm \sin A_i y + l_i = v_i. \qquad \text{(II.3.19)}$$

Выразив уравненное значение измеренного зенитного расстояния в виде $Z_i = Z_{\text{изм}} + \zeta + v_i$, получим при счете азимутов от точки севера зависимость между условным (вычисленным) и уравненным (астрономическим) зенитными расстояниями светила:

$$Z_{0i} - Z_i = x \cos A_i + y \sin A_i. \qquad \text{(II. 3.20)}$$

Правая часть выражения (II.3.20) представляет собой поправку астрономического зенитного расстояния за уклонение отвесной линии от условной нормали. Таким образом, с геометрической точки зрения уравнение поправок (II.3.19) или (II.3.17) представляет собой в общем виде зависимость между условным Z_{0i} и астрономическим Z_i зенитными расстояниями любой произвольной точки сферы. На основании (II.3.18) искомые параметры будут:

$$\varphi = \varphi_0 + x; \qquad \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{15} y \sec\varphi.$$

В частном случае, если при вычислениях вместо условных координат пункта φ_0 и λ_0 принять геодезические координаты B и L, то уравнения поправок будут автоматически редуцированы к геодезическому зениту и из уравнивания непосредственно получат астрономо-геодезические составляющие уклонения отвесной линии от нормали к референц-эллипсоиду ξ и η в пункте наблюдения. Выражения (II.3.18) примут вид:

$$\xi = \varphi - B; \quad \eta = 15\,(\lambda - L)\cos\varphi. \qquad \text{(II.3.21)}$$

В соответствии с равенствами (II.3.21) уравнения (II.3.19) и (II.3.20) будут:

$$-\zeta \pm \cos A_i\xi \pm \sin A_i\eta + l_i = v_i;$$

$$l_i = Z_{\Gamma_i} - Z'_{\text{изм}_i}, \qquad \text{(II. 3.22)}$$

где $Z_{\Gamma i} = \arccos(\sin B \sin\delta_i + \cos B\cos\delta_i\cos t_{\Gamma i})$; (II. 3.23)

$$t_{\Gamma i} = T_{H_i} + u_v + \cos(T_{H_i} - X) - \alpha_i;$$

$$Z_{\Gamma i} - Z_i = \xi\cos A_i + \eta\sin A_i. \qquad \text{(II. 3.24)}$$

Выражение (II.3.24) представляет собой известную из геодезии зависимость между геодезическим и астрономическим зенитными расстояниями произвольной точки сферы. Уравнение (II.3.22) используют в том случае, если известны геодезические координаты пункта, в противном случае при уравнивании пользуются условными координатами φ_0 и λ_0.

На основании (II.3.18) и (II.3.21) устанавливают зависимость между условными и астрономо-геодезическими составляющими уклонения отвесной линии:

$$\xi - x = \varphi_0 - B; \quad \eta - y = 15\,(\lambda_0 - L)\cos\varphi. \qquad \text{(II.3.25)}$$

Таким образом, вводя условные координаты φ_0 и λ_0, из решения системы нескольких уравнений (II.3.19) по методу наименьших квадратов находят условные уклонения отвесной линии x и y. Далее в зависимости от поставленной задачи из выражений (II.3.18) определяют φ и λ, а из (II.3.25) — ξ и η. При отсутствии избыточных измерений система уравнений (II.3.19) решается как система обычных линейных уравнений, в правых частях которых вместо v_i будут нули. Исследования показывают, что вес уравнений поправок

$$P_i = c/m_i^2 = 1, \qquad \text{(II. 3.26)}$$

т. е. уравнения поправок зенитальных способов равноточны независимо от азимутов и зенитных расстояний наблюдаемых светил.

Для удобства решения в уравнения поправок вводят следующие обозначения коэффициентов:

$$-1 = a; \quad \pm\cos A_i = b_i; \quad \pm\sin A_i = c_i, \qquad \text{(II. 3.27)}$$

в которых знак «+» принимается при счете азимутов от точки Юга, а знак «—» от точки Севера. Тогда уравнение (II.3.19) примет вид:

$$a\zeta + b_ix + c_iy + l_i = v_i \text{ с весом } P_i = 1. \qquad \text{(II. 3.28)}$$

Система нормальных уравнений, соответствующая n ($n \geqslant 3$) уравнениям (II.3.28), будет:

$$[aa]\,\zeta + [ab]\,x + [ac]\,y + [al] = 0;$$
$$[ab]\,\zeta + [bb]\,x + [bc]\,y + [bl] = 0; \qquad \text{(II.3.29)}$$
$$[ac]\,\zeta + [bc]\,x + [cc]\,y + [cl] = 0.$$

Искомые неизвестные определяются стандартными формулами:

$$\zeta = \Delta_\zeta/\Delta; \quad x = \Delta_x/\Delta; \quad y = \Delta_y/\Delta, \qquad \text{(II. 3.30)}$$

в которых Δ — главный определитель системы нормальных уравнений; Δ_ζ, Δ_x, Δ_y — определители, полученные из определителя Δ путем замены коэффициентов при соответствующем неизвестном свободными членами нормальных уравнений, взятыми с обратными знаками.

Искомые значения широты и долготы:

$$\varphi = \varphi_0 + x; \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{15}\,y\sec\varphi. \qquad \text{(II. 3.31)}$$

Астрономо-геодезические составляющие уклонения отвеса:

$$\xi = x + (\varphi_0 - B); \quad \eta = y + 15\,(\lambda_0 - L)\cos\varphi. \qquad \text{(II.3.32)}$$

Оценка точности искомых параметров ζ, x и y производится по известным формулам метода наименьших квадратов:

$$\mu = \sqrt{[vv]/(n-3)}; \quad m_\zeta = \mu/\sqrt{P_\zeta};$$
$$m_x = \mu/\sqrt{P_x}; \quad m_y = \mu/\sqrt{P_y}. \qquad \text{(II. 3.33)}$$

Веса искомых параметров:

$$P_\zeta = \Delta/\Delta_{11}; \quad P_x = \Delta/\Delta_{22}; \quad P_y = \Delta/\Delta_{33}, \qquad \text{(II. 3.34)}$$

где Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} — алгебраические дополнения квадратичных элементов определителя Δ системы нормальных уравнений.

Средние квадратические ошибки астрономо-геодезических составляющих уклонения отвесной линии:

$$m_\zeta^2 = m_x^2 + m_B^2; \quad m_\eta^2 = m_y^2 + m_L^2\cos^2\varphi. \qquad \text{(II. 3.35)}$$

Имея в виду, что $m_B \leqslant (1/3)\,m_x$ и $m_L \leqslant (1/3)\,m_y$, практически получим:

$$m_\xi = m_x; \quad m_\eta = m_y. \qquad \text{(II. 3.36)}$$

Средние квадратические ошибки астрономических координат вычисляются по формулам:

$$m_\varphi = m_x; \quad m_\lambda = \frac{1}{15}\,m_y\sec\varphi. \qquad \text{(II. 3.37)}$$

Из выражений (II.3.36) и (II.3.37) видно, что средние квадратические ошибки определения астрономической широты и астрономо-геодезических составляющих уклонения отвесной линии не зависят от широты пункта. Средняя квадратическая ошибка определения астрономической долготы (времени) возрастает с увеличением широты пропорционально $\sec\varphi$ независимо от методов ее определения.

Выгоднейшие условия наблюдений в зенитальных способах находят из анализа выражений весов искомых параметров ζ, x и y, представленных формулами (II.3.34). После преобразований выражения весов принимают вид:

$$P_\zeta = n - \frac{[\sin A]^2}{[\sin^2 A]} - \frac{\left\{[\cos A] - \dfrac{[\sin A\cos A]\,[\sin A]}{[\sin^2 A]}\right\}^2}{[\cos^2 A] - \dfrac{[\sin A\cos A]^2}{[\sin^2 A]}};$$

(II. 3.38)

$$P_x = [\cos^2 A] - \frac{[\cos A]^2}{n} - \frac{\left\{[\sin A \cos A] - \frac{[\sin A][\cos A]}{n}\right\}^2}{[\sin^2 A] - \frac{[\sin A]^2}{n}};$$

(II. 3.39)

$$P_y = [\sin^2 A] - \frac{[\sin A]^2}{n} - \frac{\left\{[\cos A \sin A] - \frac{[\cos A][\sin A]}{n}\right\}^2}{[\cos^2 A] - \frac{[\cos A]^2}{n}}.$$

(II. 3.40)

Из выражений (II.3.38)—(II.3.40) следует, что веса определяемых из уравнивания величин являются функциями числа n наблюдаемых светил и их азимутов и не зависят от широты пункта.

В способах совместного определения нескольких величин нельзя достигнуть наибольшего веса уравненного значения одновременно для всех определяемых величин. Поэтому при совместном определении x и y задаются необходимыми для решения данной задачи соотношением весов, т. е. ставят дополнительное условие

$$P_x = kP_y. \qquad \text{(II.3.41)}$$

Практически принимается равенство весов неизвестных, т. е. полагают $k = 1$ и

$$P_x = P_y. \qquad \text{(II.3.42)}$$

На основании (II.3.42) из выражений (II.3.39) и (II.3.40) следует

$$[\sin^2 A] = [\cos^2 A] \text{ и } [\sin A] = [\cos A]. \qquad \text{(II.3.43)}$$

Выражения (II.3.43) есть условия равномерного распределения светил по азимутам. Для такого распределения имеем:

$$[\sin A] = 0;\ [\cos A] = 0;\ [\sin A \cos A] = 0;$$
$$[\sin^2 A] = n/2;\ [\cos^2 A] = n/2. \qquad \text{(II.3.44)}$$

Подставив (II.3.44) в формулы (II.3.38)—(II.3.40) получим:

$$P_\zeta = n;\quad P_x = n/2;\quad P_y = n/2. \qquad \text{(II.3.45)}$$

Необходимо отметить, что условие равенства $P_x = P_y$ будет также соблюдено и выражения (II.3.44), (II.3.45) останутся теми же, если измерение зенитных расстояний светил производить в плоскостях двух произвольных взаимно перпендикулярных вертикалов, наблюдая равное число звезд по обе стороны от зенита в каждом из вертикалов.

Способы раздельного определения x и y, φ и λ, ξ и η можно рассматривать как частные случаи способов их совместного определения. Здесь вместо равенства весов $P_x = P_y$ выгоднейшими условиями наблюдения являются те, при которых вес определяемой величины будет максимальным, т. е.

$$P_x = \max \quad \text{или} \quad P_y = \max. \qquad \text{(II.3.46)}$$

Из выражения (II.3.39) следует, что вес P_x будет максимален при наблюдениях в меридиане равного числа светил по обе стороны от зенита, а из выражения (II.3.40) следует, что вес P_y будет максимальным при наблюдениях светил в первом вертикале также симметрично относительно зенита.

При определении x (φ, ξ) из наблюдений звезд в меридиане $c = \sin A = 0$ и уравнение поправок, составленное для каждой звезды, имеет вид:

$$a\zeta + b_i x + l_i = v_i;\quad P_i = 1\quad (i = 1, 2, \ldots, n'). \qquad \text{(II.3.47)}$$

Числу таких уравнений равно числу звезд n', наблюдаемых в меридиане. Нормальные уравнения в этом случае

$$[aa]\,\zeta + [ab]\,x + [al] = 0,$$
$$[ab]\,\zeta + [bb]\,x + [bl] = 0. \qquad \text{(II.3.48)}$$

Из их решения получают $\zeta = \Delta_\zeta/\Delta$, $x = \Delta_x/\Delta$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix};\quad \Delta_\zeta = \begin{vmatrix} [ab] & [al] \\ [bb] & [bl] \end{vmatrix};\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} [al] & [aa] \\ [bl] & [ab] \end{vmatrix}.$$

Веса уравненных значений ζ и x:

$$P_\zeta = \frac{\Delta}{[bb]} = [aa] - \frac{[ab]^2}{[bb]} = n' - \frac{[\cos A]^2}{[\cos^2 A]},$$

(II.3.49)

$$P_x = \frac{\Delta}{[aa]} = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} = [\cos^2 A] - \frac{[\cos A]^2}{n}.$$

При наблюдениях в меридиане равного числа звезд к северу и югу от зенита имеем $[\cos A] = 0$, $[\cos^2 A] = n'$.

Максимальные значения весов при этих условиях:

$$P_{\zeta_{\max}} = n';\quad P_{x_{\max}} = n'. \qquad \text{(II.3.50)}$$

При определении y (λ, u, η) из наблюдений звезд в первом вертикале имеют $b_i = \pm\cos A_i = 0$. Уравнения поправок и нормальные уравнения примут вид:

$$a\zeta + a_i y + l_i = v_i;\quad P_i = 1\quad (i = 1, 2 \ldots n'');$$
$$[aa]\,\zeta + [ac]\,y + [al] = 0; \qquad \text{(II.3.51)}$$
$$[ac]\,\zeta + [cc]\,y + [cl] = 0.$$

Искомые значения неизвестных и их веса получают из следующих выражений:

$$\zeta = \Delta_\zeta/\Delta;\quad y = \Delta_y/\Delta;$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} [aa] & [ac] \\ [ac] & [cc] \end{vmatrix};\quad \Delta_\zeta = \begin{vmatrix} [ac] & [al] \\ [cc] & [cl] \end{vmatrix};\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} [al] & [aa] \\ [cl] & [ac] \end{vmatrix};$$
$$P_\zeta = \frac{\Delta}{[cc]} = [aa] - \frac{[ac]^2}{[cc]} = n'' - \frac{[\sin A]^2}{[\sin^2 A]}; \qquad \text{(II.3.52)}$$
$$P_y = \frac{\Delta}{[aa]} = [cc] - \frac{[ac^2]}{[aa]} = [\sin^2 A] - \frac{[\sin A]^2}{n''}.$$

При наблюдениях в первом вертикале симметрично относительно зенита $[\sin A] = 0$, $[\sin^2 A] = n''$, следовательно, максимальные значения весов

$$P_{\zeta_{\max}} = n'';\quad P_{y_{\max}} = n''. \qquad \text{(II.3.53)}$$

Если из общего числа n звезд для определения x'' были измерены зенитные расстояния $n' = n/2$ звезд в меридиане, а для определения y

произведены такие же измерения $n'' = n/2$ звезд в первом вертикале, то это равносильно совместному определению x и y по наблюдениям $n = n' + n''$ звезд, равномерно расположенных по азимутам или наблюдению этих n звезд в плоскостях двух любых взаимно перпендикулярных вертикалов.

Таким образом, положенное в основу способов совместного определения x и y равенство $P_x = P_y$ является в то же время наивыгоднейшим условием, обеспечивающим получение искомых величин с равным и наибольшим весом при данном числе измерений. Отсюда вытекает важный вывод. Если при одинаковой методике измерений затраты времени исчислять числом наблюдаемых светил, то для достижения одинаковой точности определяемых величин способы совместного определения x и y не имеют преимущества перед способами их раздельного определения. Для наиболее полного исключения влияния приборных и внешних источников ошибок, изменяющихся с течением времени, пользуются раздельным способом астрономических наблюдений.

II.3.9. Редукции наблюдений в зенитальных способах

Поправка зенитного расстояния светила за влияние суточной аберрации. Она определяется формулой

$$\Delta Z_a = -0{,}32 \cos\varphi \sin A \cos Z, \qquad \text{(II.3.54)}$$

где 0,32 cos φ — постоянная суточной аберрации для пункта земной поверхности с широтой φ (угл. с).

Часто поправку за влияние суточной аберрации вводят не в измеренное зенитное расстояние, а в момент наблюдения светила

$$\Delta T = -0{,}021 \cos Z. \qquad \text{(II.3.55)}$$

Поправка зенитного расстояния, вычисленного со средним моментом, за ускорение движения светила.

$$\Delta Z_W = \frac{15^2}{2\rho} \frac{d^2Z}{dt^2} \frac{\Sigma (T_i - T_{ср})^2}{n}, \qquad \text{(II.3.56)}$$

где

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = m + n \operatorname{ctg} Z; \qquad \text{(II.3.57)}$$

$$m = \pm \cos\varphi \sin\varphi \cos A;$$

$$n = \cos^2\varphi \cos^2 A; \qquad \text{(II.3.58)}$$

знак «+» соответствует счету азимута от точки юга, знак «—» — от точки севера.

Для коэффициентов m и n составляются таблицы или номограммы. Упрощенный вариант формулы (II.3.56) имеет вид:

$$\Delta Z_W = 5{,}454 \cdot F \frac{d^2Z}{dt^2} \left(\frac{T_n - T_1}{100}\right)^2, \qquad \text{(II.3.59)}$$

где $F = \dfrac{\sum l_i^2}{n (l_1 - l_n)^2}$; l_i — расстояние i-й нити от средней; T_n — момент наблюдения на n-й нити; T_1 — момент наблюдения на первой нити.

Формула (II.3.59) пригодна для вычислений ΔZ_W с сеткой нитей, в которой расстояния между нитями произвольны;

$$\Delta Z_W = 0{,}454 \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{d^2Z}{dt^2} \left(\frac{T_n - T_1}{100}\right)^2. \qquad \text{(II.3.60)}$$

Эта формула пригодна для вычислений с симметричной сеткой нитей, а также для наблюдений с контактным микрометром.

Поправка за ширину контактов и мертвый ход винта контактного микрометра

$$\Delta Z_\gamma = \pm [\pm Ш_к - Мх] R/2, \qquad \text{(II.3.61)}$$

где $Ш_к$ — средняя ширина контактов (в оборотах винта микрометра); Мх — мертвый ход винта микрометра; R — цена оборота винта контактного микрометра (угл. с).

Знак при Шк положительный, если рабочая отметка на хронографической ленте получается в момент размыкания цепи, отрицательный — в момент ее замыкания. Поправка ΔZ_γ берется со знаком «+» для западных звезд и со знаком «—» для восточных.

Поправка разности шкал координированного времени UTC *и всемирного времени* UT1. Сущность поправки и формула для ее учета приведены в II.3.6 [формула (II.3.7)].

Лично-инструментальное уравнение и его влияние на уравненные значения определяемых величин. Постоянная составляющая ∂T лично-инструментальной ошибки в оценке моментов прохождения светила через нити прибора называется лично-инструментальным уравнением. Влияние его на уравненные значения определяемых величин в зенитальных способах может быть выражено следующими формулами:

$$\partial\zeta = \frac{15\partial T \cos\varphi}{n} [\sin A_i]; \qquad \text{(II.3.62)}$$

$$\partial x = \frac{15\partial T \cos\varphi}{[\cos^2 A]} [\sin A_i \cos A_i]; \qquad \text{(II.3.63)}$$

$$\partial y = -15\partial T \cos\varphi. \qquad \text{(II.3.64)}$$

Из выражения (II.3.62) следует, что $\partial\zeta = 0$ при равномерном распределении звезд по азимутам, а также при попарном наблюдении звезд в плоскости одного вертикала по обе стороны от зенита и при соблюдении условий симметричности относительно меридиана.

Из формулы (II.3.63) следует, что $\partial x = 0$ при равномерном распределении звезд по азимутам, при наблюдении звезд в меридиане, а также при наблюдениях звезд парами при азимутах, симметричных относительно меридиана и первого вертикала.

Из выражения (II.3.64) видно, что влияние лично-инструментального уравнения на величину y для данного пункта постоянно. Имея в виду, что $\partial y = 15 \cos\varphi \, \partial\lambda$, из выражения (II.3.64) получим

$$\partial\lambda = -\partial T, \qquad \text{(II.3.65)}$$

т. е. поправка в долготу пункта по абсолютному значению равна лично-инструментальной погрешности наблюдателя. На этом основании лично-инструментальное уравнение наблюдателя находится из определений долготы фундаментального или основного пункта по формуле

$$\partial\lambda = -\partial T = \lambda_{осн} - \lambda'_{осн}, \qquad \text{(II.3.66)}$$

где $\lambda_{осн}$ — известная точная долгота основного пункта ($m_{\lambda_{осн}} \leqslant \leqslant 0{,}005^s$); $\lambda'_{осн}$ — долгота основного пункта, полученная из данных наблюдений. Лично-инструментальное уравнение, полученное из таких определений как разность точной и наблюденной долготы основного пункта, называется лично-инструментальной разностью наблюдателя. Она определяется на основном пункте до и после полевого сезона, а иногда и в его середине.

Долготы полевых астрономических пунктов исправляются поправками за лично-инструментальную разность по формуле

$$\lambda = \lambda' + \partial\lambda, \qquad \text{(II.3.67)}$$

где $\partial\lambda = (\partial\lambda_1 + \partial\lambda_2)/2$ — среднее значение из двух соседних определений в рабочем сезоне.

Поправка за влияние короткопериодических членов нутации. Она учитывается в том случае, если вычисления выполняются при помощи каталога видимых мест звезд Астрономического ежегодника СССР (АЕ), так как в нем координаты звезд даны без учета этих поправок (кроме близполюсных звезд). Учет влияния короткопериодических членов можно производить двумя путями:

1) вводить поправки в видимые экваториальные координаты светил, выбираемые из АЕ, по известным формулам сферической астрономии:

$$\Delta\alpha_{\text{nut}} = A'a + B'b; \quad \Delta\delta_{\text{nut}} = A'a' + B'b' \qquad \text{(II.3.68)}$$

или

$$\Delta\alpha_{\text{nut}} = f' + \frac{1}{15} g' \sin(G' + \alpha) \operatorname{tg}\delta; \qquad \text{(II.3.69)}$$
$$\Delta\delta_{\text{nut}} = g' \cos(G' + \alpha);$$

2) исправлять соответствующими поправками уравненные значения x и y (φ и λ), полученные из наблюдений, произведенных в течение одного вечера.

Второй путь — при ручном счете — менее трудоемкий, чем первый. Формулы этих поправок имеют вид:

$$\Delta x_{\text{nut}} = g' \cos(G' + s_{\text{ср}}); \qquad \text{(II.3.70)}$$
$$\Delta y_{\text{nut}} = 15 f' \cos\varphi + g' \sin\varphi \sin(G' + s_{\text{ср}});$$

$$\Delta\varphi_{\text{nut}} = g' \cos(G' + s_{\text{ср}}); \qquad \text{(II.3.71)}$$
$$\Delta\lambda_{\text{nut}} = f' + \frac{1}{15} g' \operatorname{tg}\varphi \sin(G' + s_{\text{ср}}).$$

Поправки широты и долготы за приведение к центру знака. Для приведения широты и долготы к центру знака измеряют элементы центрировки: горизонтальное проложение линии $l = JC$ (J — теодолит, C — центр знака) и астрономический азимут a направления JC. Ошибки элементов центрировки должны быть: $m_l < 0{,}05$ м, $m_a < 30''$. Формулы для приведения к центру знака:

$$\varphi' = \varphi_0 + l \cos a/\text{I}; \qquad \text{(II.3.72)}$$

$$\lambda' = \lambda_0 + l \sin a/15\text{II}, \qquad \text{(II.3.73)}$$

где $\text{I} = M_0/\rho$ — длина дуги в 1″ меридиана (в м); $\text{II} = \frac{N_0}{\rho} \cos\varphi_0$ — длина дуги в 1″ параллели (в м); M_0 — радиус кривизны меридиана в точке наблюдения; N_0 — радиус кривизны нормального сечения первого вертикала. Величины I и II выбираются их АТ * по аргументу φ_0.

Поправки широты и долготы за приведение к «среднему полюсу» (международному условному началу). Формулы поправок для приведения широты и долготы к «среднему полюсу» имеют вид:

$$\varphi = \varphi' - (X \cos\lambda - Y \sin\lambda); \qquad \text{(II.3.74)}$$

$$\lambda = \lambda' - \frac{1}{15}(X \sin\lambda' + Y \cos\lambda') \operatorname{tg}\varphi, \qquad \text{(II.3.75)}$$

* АТ — здесь и далее «Астрономические таблицы». — Труды ЦНИИГАиК, 1963, вып. 163.

где φ и λ — широта и долгота, редуцированные к международному условному началу (МУН); φ' и λ' — мгновенные значения широты и долготы, полученные из наблюдений; X и Y — координаты мгновенного полюса, выбираемые из бюллетеней «Всемирное время» для эпохи наблюдений.

Формула (II.3.75) для редукции долготы и «среднему полюсу» получена в предположении, что всемирное время выражено в системе UT1, т. е. отнесено к условному международному началу.

II.3.10. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям пар звезд вблизи меридиана (способ Струве)

Теория способа. Для определения широты с наибольшим весом выбор светил необходимо производить в меридиане равным числом по обе стороны от зенита. В этом случае $P_{x_{\max}} = [\cos^2 A] = n$, где n — число наблюденных звезд.

Для ослабления влияния систематических ошибок наблюдения и обработку целесообразно выполнять попарно, выбирая звезды в каждой паре по обе стороны от зенита примерно на равных зенитных расстояниях ($|Z_N - Z_S| < 6°$). Чтобы ослабить влияние случайных ошибок, наблюдение каждой звезды выполняется многократно. При этом наблюдения звезд выполняются вблизи меридиана.

Для измеренных Z каждой пары звезд имеют два уравнения поправок вида (II.3.28), в которых для меридиана $c_i = \sin A_i = 0$ и, следовательно,

$$a\zeta + b_N x + l_N = v_N; \quad a\zeta + b_S x + l_S = v_S,$$

где

$$a = -1; \quad b_{N,S} = \pm\cos A_{N,S} \approx \pm 1;$$

$$l_{N,S} = Z_{0_{N,S}} - Z'_{\text{изм}_{N,S}};$$

$$Z'_{0_{N,S}} = \arccos\left(\sin\varphi_0 \sin\delta_{N,S} + \cos\varphi_0 \cos\delta_{N,S} \cos t_{0N,S}\right);$$

$$t_{0N,S} = T_{HN,S} + u_0 + \omega(T_{HN,S} - X) - \alpha_{N,S};$$

$$T_{HN,S} = \frac{\sum T_{iN,S}}{k}; \quad k \text{ — число измерений } Z \text{ каждой звезды};$$

$$Z_{0_{N,S}} = Z'_{0_{N,S}} + \Delta Z_{W_{N,S}}; \quad \Delta Z_{W_{N,S}} = \frac{15^2}{2\rho} \frac{d^2Z}{dt^2} \frac{\sum (T_i - T_H)^2}{k};$$

поправка и ход хронометра определяются из приема радиосигналов времени;

$$Z'_{\text{изм}_{N,S}} = \frac{\sum Z'_{\text{изм}_{N,S}}}{k}; \quad Z_{\text{изм}_{N,S}} = Z'_{\text{изм}_{N,S}} + \rho_{N,S}.$$

Решение уравнений поправок по стандартным формулам дает следующие значения неизвестных для каждой пары звезд:

$$\zeta = \frac{\Delta_\zeta}{\Delta} = -\frac{[al]}{[aa]} = \frac{[l]}{2}; \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{[bl]}{[bb]} \text{ с весом } P_x = 2.$$

Для наблюдений вблизи меридиана $b_{N,S} = \pm 1$: знак «+» для южных звезд, знак «—» для северных.

С учетом численных значений коэффициентов a и b, раскрывая выражение для x, имеем

$$x = \frac{1}{2}\left[(Z_{0_N} - Z_{0_S}) - (Z_{\text{изм}_N} - Z_{\text{изм}_S})\right]. \qquad (II.3.76)$$

Окончательное значение $x_{\text{ср}}$ из наблюдений n пар звезд

$$x_{\text{ср}} = \frac{\sum x_i}{n} \quad \text{с весом } P_{x_{\text{ср}}} = 2n. \qquad (II.3.77)$$

Уравненное значение широты будет

$$\varphi = \varphi_0 + x_{\text{ср}} \text{ с весом } P_\varphi = 2n.$$

Оценка точности производится по формулам:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[P_x v_x^2]}{n-1}}; \quad v_x = x_{\text{ср}} - x_i; \quad M_\varphi = \frac{\mu_x}{\sqrt{P_\varphi}}. \qquad (II.3.78)$$

Для определения широты с ошибкой $m_\varphi \leqslant 0{,}3''$ необходимо произвести наблюдения 12—15 пар звезд с АУ 2'2.

При разности $|Z_S - Z_N| < 6°$ программу наблюдений можно составить из ярких звезд. Поэтому способ с успехом может быть применен для определения астрономических пунктов в высоких широтах в условиях полярного дня.

Наблюдения. Для определения широты пунктов 1 и 2 классов применяют астрономический теодолит, имеющий 1-секундный или 2-секундный вертикальный круг. Для наблюдений заранее составляют рабочие эфемериды пар звезд, пользуясь каталогом средних мест звезд АЕ и формулами, приведенными ниже

Южная звезда	*Северная звезда*	
	верхняя кульминация	*нижняя кульминация*
$Z_S = \varphi_0 - \delta_S$	$Z_N = \delta_N - \varphi_0$	$Z_{NSP} = 180° - (\varphi_0 + \delta_{NSP})$
$A_S = 180° - a\frac{t}{10}$	$A_N = 0° + a\frac{t}{10}$	$A_{NSP} = 360° - a\frac{t}{10}$
$s = \alpha$	$s_N = \alpha$	$s_{NSP} = \alpha \pm 12^h$

Здесь $a\frac{t}{10}$ — угол упреждения, где $a = 15t^m \cos\delta \operatorname{cosec} Z$ ($t^m \approx 3 - 4^n$). Пары звезд подбираются при соблюдении следующих условий: $10 < Z < 55°$; $|Z_{m_S} - Z_{m_N}| \leqslant 6°$; $|\alpha_S - \alpha_N| \leqslant 20^m$.

Общий порядок наблюдений состоит из приема сигналов времени первой радиостанции, наблюдений пар звезд, приема сигналов времени второй радиостанции.

Порядок наблюдения каждой пары звезд следующий:

за 3—4 мин до эфемеридного момента s устанавливают трубу на Z первой звезды пары; при этом горизонтальная подвижная нить окулярного микрометра устанавливается в нуль-пункт гребенки;

верхнюю часть прибора устанавливают по эфемеридному значению азимута первой звезды с учетом угла упреждения;

появившееся в поле зрения трубы изображение звезды устанавливают рядом с подвижной нитью микрометра и отсчитывают уровень при вертикальном круге;

при приближении звезды к средней вертикальной нити делают последовательно три наведения на звезду подвижной нитью микрометра под счет секундных ударов хронометра; при этом для каждого наведения записывают показание хронометра и отсчет по окулярному микрометру; тотчас после этого производят отсчеты по вертикальному кругу;

верхнюю часть теодолита устанавливают в меридиане (азимут 0° или 180°); подвижная нить микрометра устанавливается в нуль-пункте гребенки; при появлении звезды в поле зрения трубы ее изображение устанавливают рядом с подвижной нитью микрометра и берут отсчеты уровня; как только звезда приблизится к средней вертикальной нити, подвижную нить микрометра снова трижды наводят на звезду и трижды отсчитывают показания хронометра и микрометра, а затем вертикального круга;

поворачивают верхнюю часть теодолита на угол упреждения в направлении видимого суточного движения звезды и в третий раз производят подобные наблюдения;

отсчитывают показания барометра и термометра;

по данным рабочих эфемерид устанавливают теодолит для наблюдения второй звезды пары; наблюдения второй звезды производят в таком же порядке, как и первой.

Обработка наблюдений. Она включает:

вывод поправки u_0 и хода хронометра ω из приема сигналов времени двух радиостанций;

вывод средних моментов наблюдений северной и южной звезд пары:

$$T_{H_N,S_j} = \frac{\sum T_{i_N,S}}{3}; \quad T_{H_N,S} = \frac{\sum T_{H_N,S_j}}{3};$$

здесь же подсчитываются $\Delta T_j = T_{H_N,S} - T_{H_N,S_j}$ и $\sum \Delta T_j^2$;

вывод значений отсчетов по вертикальному лимбу с учетом поправок за окулярный микрометр и уровень $L_i = L_i' + \Delta M_i + i_i$ и $L_{\text{ср}_{N,S}} = \frac{\sum L_{i_N,S}}{n}$, где $\Delta M_i = (M_i - 10)^{\text{об}}\, R$, $i = [(\text{Л} + \text{П}) - m]\frac{\tau}{2}$;

вычисление измеренных значений зенитных расстояний звезд:

$$Z'_{N,S} = L_{\text{ср}_{N,S}} - M_Z^0; \quad Z_{N,S} = Z'_{N,S} + \rho_{N,S}; \quad \rho_{N,S} = \rho_{0_{N,S}}\gamma B;$$

подсчет поправок за ускорение в зенитные расстояния звезд, вычисленные со средним моментом наблюдения $T_{H_N,S}$, по формуле

$$\Delta Z_W = \frac{15^2}{2n\rho}\frac{d^2Z}{dt^2}\sum \Delta T^2, \quad \text{где } \frac{d^2Z}{dt^2} = m + n\operatorname{ctg} Z;$$

для наблюдений в меридиане $m = \pm\frac{1}{2}\sin 2\varphi_0$; $n = \cos^2\varphi_0$, знак «+» перед m ставится для южных звезд, знак «—» для северных;

вычисление значений $Z_{0_{N,S}} = Z'_{0_{N,S}} + \Delta Z_{W_{N,S}}$ и величин x_i по формуле (II.3.76) производится в отдельной ведомости;

вычисление окончательного значения $x_{\text{ср}}$ широты и оценку точности выполняют по формулам (II.3.77) и (II.3.78).

II.3.11. Определение широты по измеренным малым разностям зенитных расстояний пар звезд в меридиане (способ Талькотта)

Теория способа. Для определения широты с наибольшим весом измеряется разность зенитных расстояний двух звезд в меридиане, одной к северу, другой к югу от зенита, примерно на равных зенитных расстояниях.

Для наблюдений подбирают такие пары звезд, разность зенитных расстояний которых не превышает рабочую часть поля зрения трубы прибора, т. е. $|Z_S - Z_N| < 20'$.

Малую разность $(Z_S - Z_N)$ измеряют с помощью окулярного микрометра трубы.

Для фиксирования положения трубы по высоте при наблюдениях северной и южной звезд пары с трубой жестко скрепляется талькоттовский уровень, ось которого лежит в плоскости, параллельной плоскости вертикального круга.

Пусть в моменты прохождения звезд через бесколлимационную плоскость теодолита, ориентированного в меридиане, на них сделаны наведения подвижной нитью микрометра с соответствующими отсчетами по шкале микрометра M_S и M_N и определена разность наклонов оси уровня $(i_S - i_N)\,\tau/2$. Тогда половину измеренной разности зенитных расстояний северной и южной звезд можно представить в виде

$$\frac{1}{2}(Z_S - Z_N)_{\text{изм}} = \pm\left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N), \qquad \text{(II.3.79)}$$

где знак «+» перед скобками берется в случае, когда отсчеты микрометра возрастают, знак «—» — когда они убывают с увеличением зенитного расстояния.

Подставив полуразность зенитных расстояний в формулу (II.3.76), получим

$$X = \frac{1}{2}(Z_{0N} - Z_{0S}) \pm \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N), \qquad \text{(II.3.80)}$$

где $Z_{0S,\,N} = \arccos(\sin\varphi_0 \sin\delta_{S,\,N} + \cos\varphi_0 \cos\delta_{S,\,N} \cos t_{0S,\,N})$.

При $|t| < 15^s$ с ошибкой, не превышающей $0{,}03''$, величины $Z_{0S,\,N}$ можно вычислять по формулам:

$$Z_{0S} = \varphi_0 - \delta_S; \quad Z_{0N} = \delta_N - \varphi_0; \quad Z_{0N_{sp}} = 180° - (\varphi_0 + \delta_N). \qquad \text{(II.3.81)}$$

В этом случае, формулы для вычисления x при наблюдении северной звезды в верхней и нижней кульминациях будут:

$$x = \frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) - \varphi_0 \pm \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) + \frac{1}{2}(k_S + k_N); \qquad \text{(II.3.82)}$$

$$x = 90° - \varphi_0 - \frac{1}{2}(\delta_N - \delta_S) \pm \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) + \frac{1}{2}(k_S - k_N).$$

При вычислениях со средними результатами необходимо учитывать поправку за ускорение движения звезды и поправку за влияние коллимации, так как многократные визирования в этом способе осуществляются при неподвижном по азимуту приборе, в значительных удалениях от бесколлимационной плоскости.

С учетом суммарного влияния поправок за ускорение и коллимацию, называемого поправкой за кривизну суточной параллели, формулы для вычисления широты соответственно будут:

$$\varphi = \varphi_0 + x = \frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) \pm \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) + \frac{1}{2}(k_S + k_N);$$

$$\varphi = \varphi_0 + x = 90° - \frac{1}{2}(\delta_N - \delta_S) \pm \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) + \frac{1}{2}(k_S - k_N), \qquad \text{(II.3.83)}$$

где $k = \frac{15^2}{4n\rho}\sum \Delta T_i^2 \sin 2\delta$, $\Delta T_i = T_{\text{ср}} - T_i$ — для наблюдений в произвольных малых часовых углах; $k = \frac{\sum f_i^2}{2n\rho}\operatorname{tg}\delta_i$ — для наблюдений на постоянных вертикальных нитях; здесь f_i — расстояние i-й нити от средней; n — число визирований (нитей, на которых произведено наблюдение звезды).

Поправка за дифференциальную рефракцию вычисляется по формуле

$$\delta_\rho = \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) = 0{,}0175''\,\frac{(M_S - M_N)\frac{R}{2}}{60}\sec^2 Z_0, \qquad \text{(II.3.84)}$$

где $0{,}0175''\sec^2 Z_0$ — изменение средней рефракции, соответствующее изменению $Z_{\text{ср}} = (Z_S + Z_N)/2$ на $1'$; $\Delta Z' = \frac{(M_S - M_N)}{60}$ — измеренная разность зенитных расстояний (угл. мин).

Наблюдения. Для определения широты способом Талькотта применяют зенит-телескоп или астрономический теодолит, имеющий точный талькоттовский уровень ($\tau = 1{,}5 \div 2{,}0''$ на 2 мм) и окулярный микрометр с ценой оборота винта $90—120''$. Вертикальный и горизонтальный круги прибора могут быть грубыми, с точностью отсчета до $30''$.

Для наблюдений пар звезд прибор устанавливается на столбе или штативе, тщательно горизонтируется с помощью талькоттовского уровня. Ориентировка в меридиане диаметра 0—180° горизонтального круга осуществляется с ошибкой, не превышающей 1—1,5′. Такое ориентирование выполняется по местному предмету, азимут направления на который определен предварительно с ошибкой 1′.

Перед наблюдениями заранее составляют рабочие эфемериды пар звезд на заданный период времени. В соответствии с требованиями Инструкции установлены следующие допуски при подборе пар Талькотта:

$$\frac{1}{2}(Z_S + Z_N) \leqslant 50°; \quad |Z_S - Z_N| \leqslant 16'; \quad 3^m < |\alpha_S - \alpha_N| < 15^m.$$

Общая программа наблюдений пар Талькотта на пункте должна быть подобрана так, чтобы алгебраическая сумма разностей зенитных расстояний северных и южных звезд не превышала 30′; блеск звезд не должен быть ниже 6,0 звездной величины. Практически для подбора пар звезд пользуются рабочими эфемеридами.

Измерение разности зенитных расстояний звезд пары в способе Талькотта можно производить двумя равноценными по точности методами:

из наблюдений звезд в произвольных малых часовых углах;

из наблюдений звезд на постоянных вертикальных нитях.

Наблюдения звезд в произвольных малых часовых углах. Порядок наблюдений каждой пары звезд в произвольных малых часовых углах следующий:

за 3—4 мин до момента кульминации первой звезды труба теодолита ставится на среднее зенитное расстояние пары; верхняя часть прибора устанавливается по азимуту на отсчет 0 или 180° ориентированного горизонтального круга; с трубой скрепляется с помощью закрепительного винта талькоттовский уровень, элевационным винтом пузырек уровня выводится на середину; при появлении звезды в рабочей части поля зрения трубы (при ее приближении к вертикальным нитям сетки) отсчитывается талькоттовский уровень;

далее наблюдатель берет счет секундных ударов хронометра и под любой из ударов наводит подвижную нить микрометра на звезду; при этом в журнал записывают показание хронометра до целых секунд и отсчет по шкале микрометра до тысячных долей оборота; таких наведений на звезду при ее прохождении через рабочую часть поля зрения трубы делают пять, причем располагают их примерно симметрично относительно средней вертикальной нити;

заканчивают наблюдение звезды вторичными отсчетами талькоттовского уровня;

после наблюдения первой звезды поворачивают верхнюю часть прибора ровно на 180° и наблюдают вторую звезду пары в таком же порядке, как и первую.

Наблюдения звезд на постоянных вертикальных нитях. Прием радиосигналов времени не обязателен; поправку хронометра относительно местного звездного времени нужно знать с точностью 1^m лишь для того, чтобы определить, когда наступит момент кульминации той или иной звезды. Ориентирование прибора в меридиане производится особо тщательно по местному предмету, азимут которого определен с ошибкой, не превышающей 1′. Коллимационная ошибка для средней вертикальной нити не должна превышать 30″.

Общий порядок наблюдения пар звезд такой же, как и при наблюдениях пар в произвольных малых часовых углах. Отличие составляет лишь методика визирования на звезду — наведение на звезду подвижной нитью микрометра производится в моменты пересечения ею постоянных вертикальных нитей. При этом хронометр не отсчитывается и во время наблюдения звезды им не пользуются.

Так как южные и близзенитные звезды имеют большую азимутальную скорость в видимом суточном движении, их обычно наблюдают через нить; северные звезды, у которых скорость изменения азимута

меньше, наблюдают на пяти средних нитях. Если сетка имеет 9 постоянных вертикальных нитей, то южную звезду наблюдают на 1-, 3-, 5-, 7- и 9-й нитях, а северную — на 3-, 4-, 5-, 6- и 7-й нитях. В остальном порядок наблюдений звезд не отличается от методики наблюдений в произвольных малых часовых углах.

Вычисление широты. Вычисление x (φ) при наблюдениях в произвольных часовых углах производят по формулам (II.3.82). При этом величины Z_{0_N} и Z_{0_S} вычисляют со средним моментом наблюдения звезды. Если часовые углы звезд по абсолютному значению окажутся меньше 15^s, то вычисление φ производят по формулам (II.3.83). При наблюдениях на постоянных вертикальных нитях вычисления производят также по формулам (II.3.83). Для вычислений широты по указанным формулам в журнале наблюдений подсчитывают:

средние моменты наблюдений и часовые углы (при наблюдениях в произвольных малых часовых углах):

$$T_{H_{S,N}} = \frac{\sum T_{i_{S,N}}}{n}; \qquad t_{S,N} = T_{H_{S,N}} + u_0 + \omega\,(T_{H_{S,N}} - x) - \alpha_{S,N};$$

средние отсчеты по микрометру и их полуразность в градусной мере:

$$M_{S,N} = \frac{\sum M_{i_{S,N}}}{n}; \qquad (M_S - M_N)\frac{R}{2};$$

полуразность наклонностей оси талькоттовского уровня:

$i_S - i_N = (\text{Л} + \text{П})_S - (\text{Л} + \text{П})_N$ — нуль делений шкалы вблизи объектива;

$i_S - i_N = (\text{Л} + \text{П})_N - (\text{Л} + \text{П})_S$ — нуль делений шкалы уровня вдали от объектива;

(приведенные формулы применяются в случае, если отсчеты по шкале микрометра возрастают с увеличением зенитного расстояния; если эти отсчеты убывают с увеличением зенитного расстояния, то знаки в формулах разностей наклонов оси уровня будут обратными);

поправку за дифференциальную рефракцию

$$\frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N) = 0{,}0175\,\frac{(M_S - M_N)\frac{R}{2}}{60}\sec^2 Z_0;$$

поправку за «кривизну суточной параллели» $k = \frac{1}{2}(k_S \pm k_N)$, где

$$k_{S,N} = \frac{15^2}{20\rho}\sum \Delta T_i^2 \sin 2\delta_{S,N} \quad \text{или} \quad k_{S,N} = \frac{\sum i_{S,N}^2}{20\rho}\operatorname{tg}\delta_{S,N};$$

измеренные полуразности зенитных расстояний пар звезд

$$\frac{1}{2}(Z_S - Z_N)_{\text{изм}} =$$

$$= \left[(M_S - M_N)\frac{R}{2} + (i_S - i_N)\frac{\tau}{4}\right] + \frac{1}{2}(\rho_S - \rho_N).$$

В отдельных ведомостях производят вычисление видимых мест звезд, а также вычисление широты по формулам (II.3.82) или (II.3.83).

При окончательных вычислениях производят уравнивание широт за неверно принятую цену оборота винта микрометра. Для этой цели составляют для каждой пары звезд уравнение поправок вида

$$\Delta\varphi - b_i \Delta R + l_i = v_i,$$

где $b_i = \frac{1}{2}(M_S - M_N)_i$; $l_i = \varphi_{ср} - \varphi_i$; $P_{l_i} = 1$; ΔR — искомая поправка цены оборота микрометра; $\Delta\varphi$ — соответствующая ей поправка широты пункта.

Нормальные уравнения, соответствующие n уравнениям поправок, будут:

$$\begin{aligned} n\,\Delta\varphi - [b]\,\Delta R + [l] &= 0; \\ [b]\,\Delta\varphi + [bb]\,\Delta R - [bl] &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(II.3.85)}$$

Искомые значения определяемых величин будут:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta_\varphi}{\Delta}; \quad \Delta R = \frac{\Delta_R}{\Delta}, \qquad \text{(II.3.86)}$$

где

$\Delta = n[bb] - [b]^2$; $\Delta_\varphi = [b][bl]$; $\Delta_R = n[bl]$.

Веса искомых параметров:

$$P_\varphi = \frac{\Delta}{[bb]} = n - \frac{[b]^2}{[bb]}; \quad R_R = \frac{\Delta}{n} = [bb] - \frac{[b]^2}{n}. \qquad \text{(II.3.87)}$$

Максимальные значения весов будут при условии $[b] = \frac{1}{2} \times$ $\times [M_S - M_N)] = 0$.

Практически при подборе пар осуществляется требование Инструкции

$$\sum (M_S - M_N) = \sum (Z_S - Z_N) \leqslant 30'.$$

Оценка точности производится по формулам:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}; \quad M_\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{P_\varphi}}; \quad M_R = \frac{\mu}{\sqrt{P_R}}. \qquad \text{(II.3.88)}$$

II.3.12. Определение долготы (времени) из наблюдений пар звезд на равных высотах (способ Цингера)

Для каждой пары звезд имеют два уравнения вида (II.3.28):

$$\begin{aligned} a\zeta + b_1 x + c_1 y + l_1 &= v_1; \\ a\zeta + b_2 x + c_2 y + l_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Для достижения максимального веса уравненного значения y звезды в каждой паре необходимо наблюдать в первом вертикале по обе стороны от зенита. В этом случае на основании формулы (II.3.40) $P_{y\max} = [\sin^2 A] = 2$.

Для увеличения числа пар и обеспечения непрерывной работы на пункте звезды в парах без особого ущерба точности можно выбирать на удалении по азимуту от первого вертикала до 30°. В этом случае для

получения наибольшего веса P_y на основании (II.3.40) необходимо соблюдение условий: $[ac] = [\sin A] = 0$, $[bc] = [\sin A \cos A] = 0$, которые для пары звезд означают, что звезды расположены симметрично относительно меридиана.

В функции азимутов звезд условие симметричности имеет вид

$$A_E = 360° - A_W. \qquad \text{(II.3.89)}$$

При соблюдении условий симметричности вес для каждой пары звезд определится формулой $P_y = [\sin^2 A] = 2\sin^2 A_W$.

A_W, угл. градус . .	50	60	70	80	90	100	110	120	130
P_y	1,18	1,50	1,77	1,94	2,00	1,94	1,77	1,50	1,18

Численное значение y для каждой пары звезд, найденное из двух уравнений вида (II.3.28), при соблюдении условий симметричности (II.3.89) будет

$$y_i = -[cl]/[cc] \text{ с весом } P_y = 2\sin^2 A_{W_i}. \qquad \text{(II.3.90)}$$

Уравненное значение $y_{ср}$ из наблюдений n пар звезд, заключенных между двумя приемами радиосигналов времени, вычисляются как среднее весовое, т. е.

$$y_{ср} = \frac{\sum P_{y_i} y_i}{\sum P_{y_i}} \text{ с весом } P_{y_{ср}} = \sum P_{y_i}. \qquad \text{(II.3.91)}$$

Значение долготы будет

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{1}{15} y_{ср} \sec\varphi \text{ с весом } P_{\lambda'} = P_{y_{ср}} \cos^2\varphi. \qquad \text{(II.3.92)}$$

В случае необходимости может быть вычислена поправка хронометра u' относительно местного звездного времени в средний момент между приемами радиосигналов по формуле

$$u' = u_0 + \frac{1}{15} y_{ср} \sec\varphi \text{ с весом } P_{u'} = P_{y_{ср}} \cos^2\varphi. \qquad \text{(II.3.93)}$$

С помощью известного хода хронометра ω эта поправка может быть передана на любой момент в пределах промежутка времени между приемами радиосигналов.

Оценка точности выполняется по формулам:

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_{y_i} v_{y_i}^2]}{n-1}}; \quad m_{y_{ср}} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{y_{ср}}}}; \quad m_{\lambda'} = \frac{1}{15} m_{y_{ср}} \sec\varphi, \qquad \text{(II.3.94)}$$

где n — число пар звезд; $v_{y_i} = y_{ср} - y_i$; $P_{y_i} = 2\sin^2 A_i$.

При наблюдениях пар звезд на равных высотах, расположенных симметрично относительно меридиана, наиболее полно исключаются ошибки в долготе пункта, связанные с рефракцией, гнутием трубы прибора и другими систематическими погрешностями, действующими на результаты измерений в функции зенитных расстояний светил.

Систематические поправки исключаются в разности измеряемых зенитных расстояний каждой пары звезд. Поэтому этот способ является одним из самых точных и рекомендуется как основной для определения долготы пунктов Лапласа до широт 65°.

Наблюдение пар Цингера. Для наблюдений способом Цингера в ЦНИИГАиК составлены эфемериды пар звезд. Наблюдение каждой пары выполняется в течение 5 мин. Средняя плотность распределения пар по времени — 6—8 пар в час. Для наблюдений пар Цингера на пунктах Лапласа применяется астрономический теодолит или зенит-телескоп, снабженный контактным микрометром.

Подготовка теодолита к наблюдениям выполняется так же, как и в других способах. Особое внимание обращается на регулировку правильности вращения теодолита вокруг вертикальной оси — пузырек талькоттовского уровня не должен уходить от среднего положения более чем на 1—1,5 деления. Ориентировка диаметра 0—180° осуществляется нулем на юг.

Порядок наблюдения каждой пары звезд теодолитом с контактным микрометром следующий:

за 4—5 мин до эфемеридного момента s трубу теодолита устанавливают на зенитное расстояние пары и закрепляют в этом положении зажимным винтом трубы; верхнюю часть теодолита в соответствии с выбранным порядком наблюдений (WE или EW) устанавливают по азимуту первой звезды; талькоттовский уровень скрепляют с трубой зажимным винтом и откидывают ограничительную вилку, пузырек уровня элевационным винтом выводится на середину, подвижная нить микрометра устанавливается на расстоянии 1,5 оборотов от нуль-пункта гребенки навстречу ожидаемому появлению в поле зрения трубы изображения звезды;

с приближением звезды к первой по ходу координатной горизонтальной нити отсчитывают талькоттовский уровень, вертикальную координатную нить наводят вращением азимутального винта теодолита на звезду и удерживают на ней вращением винта до тех пор, пока изображение звезды не дойдет до пересечения с горизонтальной координатной нитью, после этого вращение азимутального винта прекращают и дают сигнал для пуска хронографа; с момента вступления звезды на подвижную нить контактного микрометра последнюю удерживают на звезде вращением рукояток микрометра на протяжении трех оборотов, после этого отсчитывают по уровню;

верхнюю часть теодолита устанавливают по азимуту второй звезды пары и наблюдают ее в таком же порядке, как и первую.

Помощник наблюдателя, работающий с хронографом, производит записи в журнале и на ленте хронографа, по команде наблюдателя осуществляет пуск и остановку хронографа, следит за правильностью его работы, производит разметку и расшифровку ленты, переключает соленоиды хронографа между наблюдениями звезд пары для исключения параллакса марок.

При переходе наблюдений от одной пары к другой меняется порядок наблюдений звезд в паре.

Обработка наблюдений. Она состоит из:

обработки приема радиосигналов времени;

расшифровки хронографической ленты и обработки журнала наблюдений;

вычислений значений y из наблюдений пар звезд;

вывода среднего весового значения $y_{ср}$ и долготы пункта по наблюдениям серии из n пар звезд;

вывода окончательного значения долготы пункта и оценки точности конечного результата.

Из обработки приема радиосигналов времени выводят значения u_0 в средний момент приема X и часового хода хронометра ω. В журнале выводятся: средние моменты наблюдений звезд, средние наклонности оси талькоттовского уровня, вычисляются поправки величин y за разность наклонностей оси уровня, за влияние суточной аберрации, за ширину контактов и мертвый ход винта контактного микрометра.

Формулы для вычисления указанных поправок имеют вид:

$$\Delta y_i = (i_W - i_E)^{\partial/2} \frac{\tau}{4} \operatorname{cosec} A_W; \qquad (II.3.95)$$

$(i_W - i_E)^{\partial/2} = (Л + П)_W - (Л + П)_E$ — для нуля шкалы уровня вблизи объектива;

$(i_W - i_E)^{\partial/2} = (Л + П)_E - (Л + П)_W$ — для нуля шкалы уровня вдали от объектива;

$$\Delta y_a = 0{,}32 \cos\varphi \cos Z; \qquad (II.3.96)$$

$$\Delta y_\gamma = (\pm Шк - Мх) \frac{R}{2} \operatorname{cosec} A_W. \qquad (II.3.97)$$

При наблюдениях с микрометром знак «—» перед Шк ставится при работе хронографа на размыкание цепи, знак «+» — на замыкание цепи.

Формула для вычисления y из наблюдений пары звезд, после раскрытия выражения (II.3.90), с учетом необходимых поправок имеет вид:

$$y_i = \frac{Z'_{0_E} - Z'_{0_W}}{\sin A_W - \sin A_E} + \Delta y_i + \Delta y_a + \Delta y_\gamma, \quad P_{y_i} = 2 \sin^2 A_{W_i}, \qquad (II.3.98)$$

где

$$Z'_{0_{E,W}} = \arccos\left(\sin\varphi_0 \sin\delta_{E,W} + \cos\varphi_0 \cos\delta_{E,W} \cos t_{0_{E,W}}\right);$$

$$t_{0_{E,W}} = T_{H_{E,W}} + u_0 + \omega\left(T_{H_{E,W}} - X\right) - \alpha_{E,W}.$$

Вывод среднего весового значения $y_{ср}$ и долготы пункта по наблюдениям серии из n пар звезд производится по формулам:

$$y_{ср} = \frac{\sum P_{y_i} y_i}{\sum P_{y_i}} \quad \text{с весом} \quad P_{y_{ср}} = \sum P_{y_i};$$

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{1}{15} y_{ср} \quad \text{с весом} \quad P_{\lambda'} = P_{y_{ср}} \cos^2\varphi.$$

При окончательных вычислениях полученные значения долготы исправляют поправкой за влияние короткопериодических членов нутации (II.3.71), за приведение к центру знака (II.3.73) и к среднему полюсу (II.3.75). Оценка точности для каждой серии звезд производится по формулам (II.3.94).

Вывод окончательного значения долготы и оценка точности конечного результата производится по формулам:

$$\lambda'_{ср} = \frac{\sum P_{\lambda'_i} \lambda'_i}{\sum P_{\lambda'_i}} \quad \text{с весом} \quad P_{\lambda_{ср}} = \sum P_{\lambda'_i}; \qquad (II.3.99)$$

$$M_{\lambda'_{ср}} = \frac{\mu_{\lambda'}}{\sqrt{P_{\lambda'_{ср}}}},$$

где $\mu_{\lambda'} = \sqrt{\dfrac{[P_{\lambda'_i} v^2_\lambda]}{k-1}}$; $\quad v_{\lambda'} = \lambda'_{ср} - \lambda'_i$;

$M_{\lambda'_{ср}}$ — не должна превышать 0,022; k — число серий пар звезд.

Окончательное значение долготы пункта с учетом поправки за лично-инструментальную разность вычисляется по формуле

$$\lambda = \lambda'_{\text{ср}} + \partial\lambda, \qquad \text{(II.3.100)}$$

где $\partial\lambda$ — средневесовое значение лично-инструментальной разности, полученное из определений на фундаментальном пункте.

Средняя квадратическая ошибка окончательного значения лично-инструментальной разности вычисляется по формуле

$$M_{\partial\lambda} = \sqrt{\frac{[P_{\partial\lambda} v^2_{\partial\lambda}]}{(r-1)\sum P_{\partial\lambda}}}, \qquad \text{(II.3.101)}$$

где r — число наблюденных серий пар звезд в обоих определениях личной разности; $v_{\partial\lambda} = \partial\lambda_{\text{ср}} - \partial\lambda_i$. Средняя квадратическая ошибка $M_{\partial\lambda}$ не должна превышать $0{,}012^s$.

Средняя квадратическая ошибка окончательного значения долготы вычисляется по формуле

$$M_\lambda = \sqrt{M^2_{\lambda'_{\text{ср}}} + M^2_{\partial\lambda} + M^2_{\delta\lambda}}, \qquad \text{(II.3.102)}$$

где $M_{\delta\lambda} = 0{,}016^s$ — величина среднего квадратического колебания поправки за лично-инструментальную разность, полученная из статистических исследований производственных определений астрономическим теодолитом с контактным микрометром.

Абсолютное значение M_λ не должно превышать $0{,}030^s$.

II.3.13. Определение широты из наблюдений пар звезд на равных высотах (способ Певцова)

Теория способа. Для определения широты в этом способе, так же как и в способе Цингера, наблюдаются пары звезд на равных высотах. Для достижения максимальной точности определения широты выбор звезд в парах должен производиться под условием $P_x = \max$. В соответствии с формулами (II.3.39) и (II.3.49) для выполнения этого условия звезды в каждой паре необходимо наблюдать в меридиане по обе стороны от зенита. В этом случае $P_{x_{\max}} = [\cos^2 A] = 2$.

Однако видимое суточное движение звезды в меридиане параллельно плоскости горизонта, вследствие чего наблюдать прохождение звезд через горизонтальные нити невозможно. Поэтому на практике звезды в каждой паре выбирают вблизи меридиана, на угловых удалениях от него от 10 до 40°. При этом для обеспечения наибольшего возможного веса P_x выбор звезд в паре осуществляется при соблюдении условий

$$[ab] = [\cos A] = 0 \text{ и } [bc] = [\sin A \cos A] = 0, \qquad \text{(II.3.103)}$$

которые представляют условия симметричного расположения звезд пары относительно плоскости первого вертикала. В функции азимутов звезд пары эти условия имеют вид:

$$A_S = 180° - A_N; \quad A_S = 540° - A_N. \qquad \text{(II.3.104)}$$

При соблюдении указанных условий симметричности вес для каждой пары звезд определится формулой

$$P_x = [\cos^2 A] = 2\cos^2 A_N. \qquad \text{(II.3.105)}$$

A_N, угл. градус	10	20	30	40
P_x	1,94	1,77	1,50	1,18

Значение x для каждой пары звезд на основании двух уравнений вида (II.3.28) при соблюдении условий симметричности (II.3.104) будет

$$x_i = -\frac{[bl]_i}{[bb]_i} \quad \text{с весом} \quad P_{x_i} = 2\cos^2 A_N. \qquad \text{(II.3.106)}$$

Уравненное значение x из наблюдений n пар звезд будет

$$x_{\text{ср}} = \frac{\sum P_{x_i} x_i}{\sum P_{x_i}} \quad \text{с весом} \quad P_{x_{\text{ср}}} = \sum P_{x_i}. \qquad \text{(II.3.107)}$$

Уравненное значение широты пункта

$$\varphi' = \varphi_0 + x_{\text{ср}} \quad \text{с весом} \quad P_\varphi = P_{x_{\text{ср}}}. \qquad \text{(II.3.108)}$$

Полученная широта приводится к центру пункта и к среднему полюсу. Если видимые места звезд не исправлялись поправками за влияние короткопериодических членов нутации, то широты, полученные в данный вечер, исправляются поправками по формуле (II.3.71).

Оценка точности производится по формуле

$$M_\varphi = M_{x_{\text{ср}}} = \frac{\mu_x}{\sqrt{[P_{x_i}]}}, \qquad \text{(II.3.109)}$$

где

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[P_{x_i} v^2_{x_i}]}{n-1}}; \quad v_{x_i} = x_{\text{ср}} - x_i.$$

При определениях широты из наблюдений пар звезд на равных высотах исключаются ошибки, связанные с рефракцией, гнутием трубы и другими источниками систематических ошибок. Поэтому данный способ является одним из самых точных способов определения широты.

Наблюдение пар Певцова. Для наблюдений составлены эфемериды пар звезд. При этом заданы были следующие условия: $15° < Z < 50°$ (60°); $4^m < |s_S - s_N| < 15^m$; $10° < |A| < 40°$; $A_S + A_N = 180°$ или $A_S + A_N = 540°$.

Подготовка теодолитов к наблюдениям выполняется так же, как и в способе Цингера. Обычно наблюдения производятся с контактным микрометром. При этом пары Певцова наблюдают совместно с парами Цингера, а именно: в каждой серии между приемами радиосигналов времени наблюдают 6—9 пар Цингера и 2—3 пары Певцова. В шести сериях, необходимых для определения долготы способом Цингера, производят одновременные наблюдения 14—16 пар Певцова. Этого числа пар оказывается вполне достаточно для определения широты пункта с ошибкой, не превышающей 0,3″.

Общий порядок наблюдений и порядок наблюдения пары звезд в способе Певцова принципиально такой же, как и в способе Цингера. Особенности наблюдений пар Певцова:

звезды в паре наблюдаются только в том порядке, какой указан в эфемеридах; обратного порядка наблюдений звезд в каждой паре, как и в способе Цингера, здесь нет;

звезды (особенно южные) перемещаются под острым углом к горизонтальной нити, поэтому наблюдение звезд на всех трех оборотах винта возможно при перемещении по азимуту верхней части прибора со скоростью, равной азимутальной скорости звезды; такое вращение можно осуществить с помощью специального механизма вращения прибора по азимуту;

наблюдение звезд можно производить и без перемещения верхней части прибора по азимуту, но при этом необходимо существенно уменьшить величину перемещения подвижной горизонтальной нити микрометра по высоте (например, наблюдать звезду в пределах одного среднего оборота винта вместо трех оборотов); при этом видимый путь движения звезды должен пройти примерно через центр поля зрения трубы.

Обработка наблюдений. Из обработки приема радиосигналов времени выводят значение поправки хронометра u_0 в момент X и хода ω.

В журнале наблюдений пар звезд Певцова вычисляют:

средние моменты наблюдений звезд $T_{S,N} = \dfrac{\Sigma T_{S_i N_i}}{n}$;

средние суммы отсчетов по концам пузырька уровня и поправку величины x за разность наклонов оси талькоттовского уровня

$$\Delta x_i = (i_S - i_N)^{\partial/2} \frac{\tau}{4} \sec A_S, \qquad \text{(II.3.110)}$$

где

$$(i_S - i_N)^{\partial/2} = \pm [(\text{Л} + \text{П})_S - (\text{Л} + \text{П})_N],$$

если нуль шкалы уровня вблизи объектива, то знак «+» перед квадратной скобкой соответствует наблюдениям при КЛ, а знак «—» при КП.

поправку за ускорение движения звезд пары по зенитному расстоянию

$$\Delta x_v = -k_v \left(\frac{T_n - T_1}{100}\right)^2_S, \qquad \text{(II.3.111)}$$

где

$$k_v = 0{,}227 \frac{n+1}{n-1} \sin 2\varphi_0;$$

n — число нитей (контактов), принятых в обработку; T_n — момент наблюдения на n-й нити; T_1 — момент наблюдения на первой нити.

Вычисление широты пункта и оценка точности производятся в отдельной ведомости. Формулы для вычисления x_i из наблюдений каждой пары звезд после преобразования (II.3.106) с учетом необходимых поправок имеет вид:

$$x_i = \frac{Z'_{0_N} - Z'_{0_S}}{\cos A_S - \cos A_N} + \Delta x_i + \Delta x_v, \quad P_{x_i} = 2\cos^2 A_{S_i}, \qquad \text{(II.3.112)}$$

где

$$Z'_{0_{N,S}} = \arccos\left(\sin\varphi_0 \sin\delta_{N,S} + \cos\varphi_0 \cos\delta_{N,S} \cos t_{0_{N,S}}\right);$$

$$t_{0_{N,S}} = T_{H_{N,S}} + u_0 + \omega\left(T_{H_{N,S}} - X\right) - \alpha_{N,S}.$$

Если видимые координаты звезд не исправлялись поправкой за влияние короткопериодических членов нутации, то эту поправку

$\delta_{x_{\text{nut}}} = g' \cos(G' + S_{\text{ср}})$ вводят в вычисленные значения x_i. Далее вычисляется

$$x_{\text{ср}} = \sum P_{x_i} x_i / \sum P_{x_i} \text{ с весом } P_{x_{\text{ср}}} = \sum P_{x_i} \qquad \text{(II.3.113)}$$

и широта пункта $\varphi = \varphi_0 + x_{\text{ср}}$ с весом $P_\varphi = P_{x_{\text{ср}}}$.

Уравненное значение широты приводится к центру пункта по формуле (II.3.72) и к среднему полюсу по формуле (II.3.74).

Оценка точности выполняется по формуле

$$M_\varphi = \frac{\mu_x}{\sqrt{P_{x_{\text{ср}}}}}, \qquad \text{(II.3.114)}$$

где

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[P_{x_i} v^2_{x_i}]}{n-1}}; \quad v_{x_i} = x_{\text{ср}} - x_i.$$

Г. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЗИМУТА НАПРАВЛЕНИЯ НА ЗЕМНОЙ ПРЕДМЕТ

II.3.14. Определение астрономического азимута по измеренному горизонтальному углу между Полярной и земным предметом

Теория способа. Астрономический азимут направления на земной предмет определяется следующими формулами:

$$a_i = A_{N_i} + Q_i \quad \text{или} \quad a_i = M_i - M_{N_i}, \qquad \text{(II.3.115)}$$

в которых a_i — астрономический азимут направления на земной предмет; A_{N_i} — астрономический азимут направления на светило; Q_i — горизонтальный угол между светилом и земным предметом; M_i — горизонтальное направление на земной предмет; N_i — горизонтальное направление на светило; M_{N_i} — место Севера — горизонтальное направление, соответствующее направлению на Север при данной ориентировке горизонтального круга.

Астрономический азимут светила вычисляется по формуле

$$A_{N_i} = A'_{N_i} + \delta_{A_i} + \Delta A_{W_i}, \qquad \text{(II.3.116)}$$

где

$$A'_{N_i} = \operatorname{arctg} \frac{m_i \sin t_i}{n_i \cos t_i - 1}; \qquad \text{(II.3.117)}$$

$m_i = \operatorname{ctg}\delta_i \sec\varphi$; $n = \operatorname{ctg}\delta_i \operatorname{tg}\varphi$; $t_i = T_{H_i} + u_0 + \omega\left(T_{H_i} - X\right) - \alpha_i$;

$$\delta A_i = \frac{0{,}32 \cos\varphi \cos A'_{N_i}}{\sin Z_i}$$ — поправка за влияние суточной аберрации; (II.3.118)

$\Delta A_W = 5{,}454 \dfrac{d^2A}{dt^2}\left(\dfrac{\Delta T}{100}\right)^2$ — поправка за ускорение (при вычислениях со средним моментом наблюдений); (II.3.119)

$$\frac{d^2A}{dt^2} = k_1 \sin A'_N - k_2 \sin 2A'_N; \quad k_1 = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \operatorname{ctg} Z;$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(\operatorname{ctg}^2 Z + \operatorname{cosec}^2 Z); \qquad \text{(II.3.120)}$$

$$\Delta T = T_H - T_L \quad \text{или} \quad \Delta T = T_H - T_R;$$

$$T_H = \frac{T_L + T_R}{2}; \quad T_{L,R} = \frac{\sum T_{L_i R_i}}{n}; \qquad \text{(II.3.121)}$$

$$Q_i = M_i - N_i; \quad M_{N_i} = N_i - A_{N_i}.$$

Вычисление уравненного значения азимута из n приемов и оценка точности для равновесных измерений горизонтальных углов Q_i (горизонтальных направлений N_i, M_i) производится по формулам арифметической середины:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\sum a_i}{n}; \quad \mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}; \quad m_a = \frac{\mu}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(II.3.122)}$$

Полярная звезда является незаходящей звездой практически для всего северного полушария. Ее можно наблюдать как ночью, так и днем относительно малыми переносными приборами. Одно из главных преимуществ способа состоит в том, что ошибки определения времени и широты не оказывают существенного влияния на точность определения азимута Полярной звезды, а следовательно, и азимута направления на земной предмет. Однако ошибка определения азимута по Полярной звезде возрастает с увеличением широты пропорционально sec φ. Погрешности цапф, боковое гнутие трубы и другие ошибки, действующие на результат измерений в функции зенитного расстояния, имеют в этом методе систематический характер.

Наблюдения. Астрономический азимут по часовому углу Полярной определяют 18 приемами с перестановкой горизонтального круга между приемами через 10° 05′. Для ослабления ошибок, связанных с влиянием внешних условий, программа определения азимута должна выполняться в течение не менее чем трех суток. Азимут наблюдают со столика геодезического знака или с астрономического столба.

Наблюдения азимута должны быть заключены между приемами радиосигналов времени.

При определении азимута со столба каждый прием содержит:

1) наблюдение земного предмета — четырехкратное визирование на местный предмет подвижной нитью окулярного микрометра с отсчетами по шкале микрометра; отсчет горизонтального лимба;

2) наблюдение Полярной — отсчет накладного уровня, три наведения подвижной нитью окулярного микрометра на Полярную под счет секундных ударов хронометра с соответствующей записью отсчетов хронометра и микрометра; отсчет уровня и отсчеты горизонтального лимба;

3) перекладку уровня на 180° и второе наблюдение Полярной и земного предмета.

Указанные действия составляют полуприем; во втором полуприеме трубу переводят через зенит и все перечисленные действия повторяют.

При определении азимута со столика сигнала используется поверительная труба. В этом случае при наблюдении земного предмета и Полярной в момент каждого визирования делают наведение на специальную миру подвижной нитью микрометра поверительной трубы и производят отсчеты по шкале микрометра. Для вычисления поправки в отсчеты горизонтального лимба за окулярный микрометр поверительной трубы определяют зенитное расстояние миры.

Разность горизонтальных направлений в полуприемах после исправления их поправками за окулярные микрометры главной и поверительной трубы не должна превышать 4″. Колебание двойной коллимационной ошибки по наблюдениям земного предмета не должно превышать 6″, а колебание нуль-пункта уровня — трех полуделений.

Расхождение отдельных значений азимута направления должны находиться в пределах 6″.

Обработка наблюдений. Вычисляют поправки и ход хронометра из приема радиосигналов времени. Затем определяют средние моменты наблюдений для каждой группы визирований на Полярную, после чего вычисляют горизонтальные направления на земной предмет и на Полярную для КЛ и КП. Для подсчета поправок горизонтальных направлений на Полярную за наклон горизонтальной оси и за окулярный микрометр главной трубы предварительно вычисляется для каждого полуприема зенитное расстояние Полярной с точностью 0,1′ по формуле

$$Z = 90° - \varphi + \text{I} + \text{II} + \text{III}, \qquad \text{(II.3.123)}$$

где I, II и III — выбираются из табл. 24 АТ.

Определяют нуль-пункт уровня для каждого наклона с перекладкой уровня на 180° по формуле

$$x = \frac{2m - [(\text{Л} + \text{П})_1 + (\text{Л} + \text{П})_2]}{2}. \qquad \text{(II.3.124)}$$

Из наблюдений земного предмета вычисляют двойную коллимационную ошибку. Выбирают видимые координаты Полярной из АЕ на средний момент ее наблюдения в приеме

$$s_{\text{ср}} = T_{\text{ср}} + u + \omega\,(T_{\text{ср}} - X).$$

Интервал интерполирования в долях суток определяют по формуле

$$n^d = [s_{\text{ср}} - (\lambda + \alpha_0)]^d.$$

Вычисление азимута направления и оценку точности производят по формулам (II.3.115)—(II.3.122).

II.3.15. Определение азимута из многократных наблюдений ярких звезд в вертикалах, близких к меридиану

Для определения азимута направления с наибольшим весом на основании формулы

$$P_{a'} = [\sin^2 Z] - \frac{[\sin Z \cos Z \cos A]^2}{[(\cos Z \cos A)^2]} - \cdots \qquad \text{(II.3.125)}$$

наблюдения светил можно производить в плоскости любого произвольного вертикала на больших зенитных расстояниях ($50° < Z < 80°$) симметрично относительно зенита. Способ разработан в ЦНИИГАиК и рекомендован для непосредственного определения геодезического азимута в высоких широтах.

Общий порядок наблюдений состоит из приема сигналов времени первой радиостанции, измерений горизонтальных углов между земным предметом и звездами вблизи меридиана (до 8—10° от меридиана), приема сигналов времени второй радиостанции. Промежуток между приемами радиосигналов времени при наблюдениях с кварцевым хронометром допускается до четырех часов, с механическим хронометром — до двух часов.

Обработка журнала наблюдений включает: вычисление поправок и хода хронометра из приема радиосигналов координированного времени; вычисление средних моментов наблюдений светил; вычисление приближенных значений зенитных расстояний светил; вычисление горизонтальных направлений M_i и N_i и горизонтальных углов $Q_i = M_i - N_i$ между светилами и земным предметом.

Для каждого приема измерения горизонтального угла Q_i составляется уравнение поправок вида

$$\Delta a' + b_i x + c_i y + l_i = v_i \quad \text{с весом} \quad P_i = \sin^2 Z_i, \qquad (II.3.126)$$

где

$$b_i = -\sin A_{0i} \operatorname{ctg} Z_i; \quad c_i = \cos A_{0i} \operatorname{ctg} Z_i; \quad l_i = [(a_0 - A_{0i}) - Q_i]; \qquad (II.3.127)$$

$$A_{0i} = A'_{0i} + \delta A_i + \Delta A_{W_i} + \Delta A_{\text{Шк}-\text{Мх}}; \qquad (II.3.128)$$

$$A'_{0_i} = \operatorname{arctg} \frac{m_i \sin t_{0i}}{n_i \cos t_{0i} - 1}; \quad t_{0i} = T_{H_i} + u_0 + \omega (T_{H_i} - X) - \alpha_i;$$

$$m_i = \operatorname{ctg} \delta_i \sec \varphi_0; \quad n_i = \operatorname{ctg} \delta_i \operatorname{tg} \varphi_0; \quad \delta A_i = \frac{0{,}32 \cos \varphi \cos A'_{0i}}{\sin Z_i};$$

$$\Delta A_{W_i} = 5{,}454 \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_i \left(\frac{\Delta T}{100}\right)^2;$$

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right)_i = k_1 \sin A'_{0_i} - k_2 \sin 2A'_{0_i};$$

$$\Delta A_{\text{Шк}-\text{Мх}} = (\pm \text{Шк} - \text{Мх}) \frac{R}{2} \operatorname{cosec} Z_i. \qquad (II.3.129)$$

Нормальные уравнения, соответствующие n уравнениям поправок, имеют вид:

$$\begin{aligned} [p]\,\Delta a' + [pb]\,x + [pc]\,y + [pl] &= 0; \\ [pb]\,\Delta a' + [pbb]\,x + [pbc]\,y + [pbl] &= 0; \\ [pc]\,\Delta a' + [pbc]\,x + [pcc]\,y + [pcl] &= 0. \end{aligned} \qquad (II.3.130)$$

Уравненные значения определяемых величин определяются из выражений

$$\Delta a' = \Delta a'/\Delta; \quad x = \Delta_x/\Delta; \quad y = \Delta_y/\Delta, \qquad (II.3.131)$$

где Δ — определитель системы нормальных уравнений; $\Delta_{a'}$, Δ_x, Δ_y — определители, полученные путем замены в определителе Δ коэффициентов при соответствующем неизвестном свободными членами нормальных уравнений, взятыми с обратными знаками.

Условный азимут, широта и долгота будут:

$$a' = a_0 + \Delta a'; \quad \varphi = \varphi_0 + x; \quad \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{15} y \sec \varphi.$$

Геодезический азимут направления на земной предмет вычисляется по формуле

$$a_\Gamma = a' - 15 (\lambda_0 - L) \sin \varphi + \frac{\eta_0 \cos a' - \xi_0 \sin a'}{\operatorname{tg} Z_\Delta}, \qquad (II.3.132)$$

где $\xi_0 = \varphi_0 - B$; $\eta_0 = 15 (\lambda_0 - L) \cos \varphi$.

Астрономический азимут при необходимости вычисляют по формуле

$$a = a' - 15 (\lambda_0 - \lambda) \sin \varphi + \frac{y \cos a' - x \sin a'}{\operatorname{tg} Z_\Delta}. \qquad (II.3.133)$$

Влиянием последних членов в формулах (II.3.132) и (II.3.133), как правило, можно пренебречь. Оценка точности производится по известным формулам метода наименьших квадратов:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-3}}; \quad m_{a'} = \frac{\mu}{\sqrt{P_{a'}}}; \quad m_x = \frac{\mu}{\sqrt{P_x}} \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}. \qquad (II.3.134)$$

Веса уравненных значений определяемых величин находят по стандартным формулам:

$$P_{a'} = \Delta/\Delta_{11}; \quad P_x = \Delta/\Delta_{22}; \quad P_y = \Delta/\Delta_{33}, \qquad (II.3.135)$$

где Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} — алгебраические дополнения, вычисляемые для квадратичных элементов определителя Δ:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix}; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} [p] & [pc] \\ [pc] & [pcc] \end{vmatrix}; \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} [p] & [pb] \\ [pb] & [pbb] \end{vmatrix}. \qquad (II.3.136)$$

Как видно, в этом способе вместе с азимутом получают и условные составляющие уклонения отвесной линии x и y. Однако веса их уравненных значений при данных условиях наблюдений будут малы, особенно мал будет вес P_x. Средняя квадратическая ошибка геодезического азимута будет

$$m^2_{a_\Gamma} = m^2_{a'} + 15^2 m^2_L \sin^2 \varphi. \qquad (II.3.137)$$

По малости m_L можно полагать

$$m_{a_\Gamma} \approx m_{a'}. \qquad (II.3.138)$$

II.3.16. Редукции (методические поправки) азимутальных определений

В II.3.15 уже были приведены методические поправки азимута светила за влияние суточной аберрации (II.3.118), за ускорение движения светила при вычислениях со средним моментом наблюдений (II.3.119), за ширину контактов и мертвый ход винта контактного микрометра (II.3.129).

При окончательных вычислениях уравненное значение азимута направления на земной предмет исправляют следующими методическими поправками:

1) за влияние лично-инструментальной разности

$$\partial a' = \partial a_\Gamma = -15 \sin \varphi \partial \lambda, \qquad (II.3.139)$$

где $\partial\lambda$ — лично-инструментальная разность, полученная из азимутальных наблюдений светил на основном (фундаментальном) пункте;

2) за влияние короткопериодических членов нутации; учет этого влияния можно производить двумя путями:

а) вводить поправки в видимые экваториальные координаты светил, выбираемые из АЕ, по известным формулам сферической астрономии:

$$\Delta\alpha_{\text{nut}} = A'a + B'b = f' + \frac{1}{15} g' \sin(G' + \alpha) \operatorname{tg}\delta; \qquad \text{(II.3.140)}$$

$$\Delta\delta_{\text{nut}} = A'a' + B'b' = g' \cos(G' + \alpha).$$

В видимых координатах близполюсных звезд ($\delta > 80°$) поправки за короткопериодические члены нутации учтены;

б) исправлять соответствующими поправками уравненные значения a' (a_Γ), полученные из наблюдений, произведенных в течение 2—4 часов (одного вечера)

$$\delta a' = \delta a_p = -15 f' \sin\varphi + g' \cos\varphi \sin(G' + S_{\text{ср}}); \qquad \text{(II.3.141)}$$

3) за приведение азимута направления к центрам геодезических знаков, т. е. за центрировку, редукцию и за сближение меридианов:

$$a = a_0 + \Delta c + \Delta r + \Delta\gamma, \qquad \text{(II.3.142)}$$

где

$$\Delta c = \rho \frac{e}{D} \sin\theta \text{ — поправка за центрировку;} \qquad \text{(II.3.143)}$$

$$\Delta r = \rho \frac{e_1}{D} \sin\theta_1 \text{ — поправка за редукцию;} \qquad \text{(II.3.144)}$$

$$\Delta\gamma = \frac{e \sin a_{\text{ЦГ}} \sin\varphi}{\text{II}} \text{ — поправка за сближение меридианов.} \qquad \text{(II.3.145)}$$

Здесь e — линейный элемент центрировки; θ — угловой элемент центрировки; e_1 и θ_1 — соответственно линейный и угловой элементы редукции; D — горизонтальное проложение расстояния между центрами пунктов наблюдаемого направления; $a_{\text{ЦГ}}$ — азимут направления центр инструмента — центр пункта; $\text{II} = \frac{N_0}{\rho} \cos\varphi$ — выбирается из таблиц по аргументу φ; N_0 — радиус кривизны нормального сечения первого вертикала;

4) за высоту наблюдаемого пункта над поверхностью эллипсоида (сфероидическая поправка)

$$\Delta a_c = \rho \frac{e^2}{2a} H_2 \cos^2\varphi_1 \sin 2a', \qquad \text{(II. 3.146)}$$

где e и a — соответственно эксцентриситет и большая полуось земного эллипсоида; H_2 — высота наблюдаемого пункта над эллипсоидом (м); a' — азимут направления с пункта 1 на пункт 2, полученный из наблюдений; φ_1 — широта пункта 1.

Для эллипсоида Красовского

$$\Delta a_c = 0{,}000109 H_2 \cos^2\varphi_1 \sin 2a';$$

5) за приведение азимута к среднему полюсу в системе МУН

$$\Delta a_p = -(X \sin\lambda + Y \cos\lambda) \sec\varphi \text{ — поправка астрономического азимута;} \qquad \text{(II.3.147)}$$

$$\Delta a_{p_\Gamma} = -(X \sin\lambda + Y \cos\lambda) \cos\varphi \text{ — поправка геодезического азимута,} \qquad \text{(II.3.148)}$$

где X и Y — координаты мгновенного полюса эпохи наблюдений, публикуемые в бюллетенях «Всемирное время»; φ и λ — широта и долгота пункта (долгота положительная к востоку от начального меридиана).

Таким образом, окончательное значение азимута направления с учетом поправок за приведение к центрам знаков, среднему полюсу и на поверхность эллипсоида будет:

$$a_\Gamma = a_{0_\Gamma} + \Delta c + \Delta r + \Delta\gamma + \Delta a_{p_\Gamma} + \Delta a_c. \qquad \text{(II,3.149)}$$

Д. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СПОСОБЫ АСТРОНОМИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

II.3.17. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям Полярной

Для приближенного определения широты с ошибкой 2—3″ достаточно выполнить два-три приема измерения зенитных расстояний Полярной оптическим теодолитом типа Т-2. Звездное время наблюдения Полярной фиксируется с помощью двухстрелочного секундомера или палубных часов, поправка которых определяется из приема радиосигналов с ошибкой, не превышающей $0{,}1^{\text{m}}$.

Измерения зенитных расстояний Полярной производят при двух положениях вертикального круга. Для учета влияния рефракции измеряют температуру воздуха и давление.

В журнале наблюдений вычисляют:

зенитное расстояние Полярной звезды по формулам:

$$Z'_{\text{изм}} = (L - R)/2; \quad Z = Z'_{\text{изм}} + \rho; \quad \rho = \rho_0 \gamma \cdot B;$$

звездное время в средний момент наблюдения Полярной в приеме:

$$T_H = (T_L + T_R)/2; \qquad s = T_H + u_{T_H}; \quad u_{T_H} = u_X + \omega(T_H - X).$$

Вычисление широты для каждого приема наблюдений Полярной производят по формуле

$$\varphi = 90° - Z + \text{I} + \text{II} + \text{III}, \qquad \text{(II.3.150)}$$

в которой из таблиц АЕ выбирают:

$$\text{I} = -\Delta_0 \cos t_0 \text{ — по аргументу } s;$$

$$\text{II} = \frac{\Delta_0^2}{2\rho} \sin^2 t_0 \operatorname{ctg} Z \text{ — по аргументу } s \text{ и высоте Полярной } h = 90° - Z;$$

$$\text{III} = -15 \frac{\Delta_0}{\rho} \sin t_0 \Delta\alpha + \Delta\delta \cos t_0 \text{ — по аргументу } s \text{ и дате наблюдений.}$$

II.3.18. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям Солнца

В соответствии с выгоднейшими условиями для определения широты по измеренным зенитным расстояниям светил Солнце необходимо наблюдать в меридиане или в непосредственной близости от него. Целесообразно часть наблюдений производить до прохождения Солнцем меридиана, а часть — после прохождения. При этом влияние на широту погрешности в поправке часов будет минимальным. По-

правку часов определяют из приема радиосигналов времени. При наблюдениях Солнца на окуляр надевают светофильтр. Перед началом наблюдения определяют место зенита теодолита.

Каждый прием наблюдения Солнца выполняется в следующем порядке:

визирование на верхний (нижний) край Солнца, отсчет по часам, отсчет по вертикальному лимбу КЛ (КП);

визирование на нижний (верхний) край Солнца, отсчет по часам, отсчет по вертикальному лимбу КЛ (КП);

перевод трубы через зенит;

визирование на нижний (верхний) край Солнца, отсчет по часам, отсчет по вертикальному лимбу КП (КЛ);

визирование на верхний (нижний) край Солнца, отсчет по часам, и по вертикальному лимбу КП (КЛ).

При каждом визировании средняя вертикальная нить должна располагаться примерно по центру видимого диска Солнца. Для учета влияния рефракции измеряют температуру и атмосферное давление. Для приближенного определения широты делают два-три приема.

В журнале вычисляют:

зенитные расстояния центра видимого диска Солнца:

$$Z_{\odot_L} = L_\odot - M_Z + \rho - P_\odot; \qquad Z_{\odot_R} = M_Z - R_\odot + \rho - P_\odot;$$

$$\rho = \rho_\odot \gamma B; \qquad P_\odot = P_\odot \sin Z'_\odot; \qquad P_\odot \approx 9'';$$

средние моменты наблюдения Солнца:

$$T_{L_\odot} = (T_{\odot_L} + T_{\odot_L})/2; \qquad T_{R_\odot} = (T_{\odot_R} + T_{\odot_R})/2.$$

Широта из каждого полуприема наблюдений вычисляется по формуле

$$\varphi_{L,R} = M_{L,R} + N_{L,R}, \tag{II.3.151}$$

где

$$\operatorname{tg} M_{L,R} = \frac{\operatorname{tg} \delta_{\odot L,R}}{\cos t_{\odot L,R}}; \qquad \cos N_{L,R} = \frac{\cos Z_{\odot L,R} \cdot \sin M_{L,R}}{\sin \delta_{\odot L,R}}; \tag{II.3.152}$$

$$t_{\odot L,R} = m_{L,R} + E_{L,R} = T_{\odot L,R} + u_{\odot L,R} + E_{L,R}; \tag{II.3.153}$$

$$u_{\odot L,R} = u_X + \omega (T_{\odot L,R} - X).$$

u_X в момент X и ω определяются из приема радиосигналов времени. $E_{L,R}$ — уравнение времени + 12^h и склонение $\delta_{\odot L,R}$ — интерполируется на момент $(ET)^h = (T_{\odot L,R} + u_\odot - \lambda + \Delta T)^h$ эфемеридного времени из таблиц Солнца АЕ.

Широта в каждом приеме вычисляется по формуле

$$\varphi = (\varphi_L + \varphi_R)/2. \tag{II.3.154}$$

Широта пункта из n приемов будет $\varphi_{ср} = (\Sigma \varphi_i)/n$.

II.3.19. Определение поправки часов и долготы пункта по измеренным зенитным расстояниям Солнца

Для определения поправки часов и долготы пункта Солнце необходимо наблюдать в первом вертикале или вблизи от него, т. е. в утренние или вечерние часы. Во избежание больших ошибок из-за рефракции не следует наблюдать Солнце на зенитных расстояниях, превышающих 80°.

Общий порядок наблюдений при определении долготы пункта следующий: прием радиосигналов времени, измерение зенитных расстояний Солнца, прием радиосигналов времени.

Принципиальная схема измерения зенитных расстояний Солнца такая же, как и при определении широты.

Из обработки приема радиосигналов времени получают:

поправки хронометра относительно всемирного времени:

$$U' = \mathrm{UT1}' - X' \qquad \text{в момент } X';$$

$$U'' = \mathrm{UT1}'' - X'' \qquad \text{в момент } X'';$$

$$U_X = (U' + U'')/2 \qquad \text{в момент } X = (X' + X'')/2;$$

часовой ход хронометра (секундомера) в системе среднего времени

$$\omega^h = \frac{U'' - U'}{(X'' - X')}.$$

В журнале для каждого приема наблюдений вычисляют: зенитные расстояния Солнца $Z_{\odot_L} = L_\odot - M_Z + \rho_L - P_{\odot_L}$; $Z_{\odot_R} = M_Z - R_\odot + \rho_k - P_{\odot_R}$,

где

$\rho_{L,R} = \rho_{\odot L,R} \gamma \cdot B$ — поправки за рефракцию;

$P_{\odot L,R} = P_\odot \sin Z'_{L,R}$ — суточный параллакс Солнца;

$P_\odot \simeq 9''$ — горизонтальный параллакс;

моменты наблюдения Солнца:

$$T_{\odot L} = (T_{\odot_L} + T_{\odot_L})/2; \qquad T_{\odot R} = (T_{\odot_R} + T_{\odot_R})/2;$$

$$T_H = (T_{\odot_L} + T_{\odot_R})/2.$$

При вычислении поправок хронометра относительно местного среднего времени пользуются формулами:

$$m_{L,R} = t_{\odot L,R} - E_{L,R}; \qquad u_{L,R} = m_{L,R} - T_{\odot L,R}, \tag{II. 3.155}$$

в которых

$$\cos t_{\odot L,R} = \frac{\cos Z_{\odot L,R} - \sin \varphi \sin \delta_{\odot L,R}}{\cos \varphi \cos \delta_{\odot L,R}}. \tag{II. 3.156}$$

Значения $E_{L,R} = (12^h + \eta)$ и $\delta_{\odot L,R}$ интерполируются по таблицам Солнца АЕ на моменты эфемеридного времени

$$(ET)^h_{L,R} = [T_{\odot L,R} + U_X + \omega (T_{\odot L,R} - X) + \Delta T]^h, \tag{II.3.157}$$

где ΔT — поправка за переход от всемирного времени к эфемеридному для данного года наблюдений.

Среднее значение поправки хронометра для каждого приема наблюдений Солнца вычисляют по формуле $u_{T_H} = (u_L + u_R)/2$ в момент $T_H = (T_{\odot_L} + T_{\odot_R})/2$.

Долгота пункта для каждого приема наблюдений Солнца будет

$$\lambda' = u_X - U_X, \text{ где } u_X = u_{T_H} + \omega (X - T_H).$$

Среднее значение долготы из наблюдений n приемов вычисляется по формуле

$$\lambda'_{ср} = (\sum \lambda'_i)/n.$$

Для получения долготы пункта с точностью 0,5—0,7^s достаточно произвести два-три приема измерения зенитного расстояния Солнца.

II.3.20. Определение приближенного астрономического азимута по часовому углу Полярной

Определение астрономического азимута по часовому углу Полярной с помощью среднего оптического теодолита может быть выполнено с ошибкой 3—5″ при условии тщательного исследования правильности вращения горизонтальной оси и учета соответствующей поправки горизонтального угла Q между Полярной и земным предметом за неправильную форму цапф.

Для определения астрономического азимута с указанной точностью астрономические координаты пункта можно знать приближенно со средними квадратическими ошибками $m_\varphi = 10''$, $m_\lambda = m_u = 1^s$.

Для определения азимута с ошибкой 3″ необходимо выполнить шесть приемов измерения угла Q между Полярной и земным предметом, а с ошибкой 5″ — три-четыре приема.

Наблюдения азимута заканчиваются приемом радиосигналов времени. Каждый прием измерения угла Q выполняется в следующем порядке. При КЛ: наведение трубы на земной предмет, запись отсчетов по горизонтальному лимбу; наведение трубы на Полярную, запись отсчетов по часам (секундомеру), по уровню и по горизонтальному лимбу. При КП: наведение трубы на Полярную, запись отсчетов по часам (секундомеру), по уровню и по горизонтальному лимбу; наведение трубы на местный предмет, запись отсчетов по горизонтальному лимбу.

Поправки и ход часов (секундомера) из приемов радиосигналов времени вычисляют в системе местного звездного времени с астрономической долготой пункта λ. В журнале наблюдений вычисляют:

средний момент наблюдений Полярной в приеме $T_H = (T_L + T_R)/2$;

разность $\Delta T = T_H - T_{L,R}$ и $5{,}454\ (\Delta T/100)^2$ — для учета поправки за ускорение;

средний наклон горизонтальной оси в приеме $b^{\partial/2} = [(Л + П)_0 - {}_0(Л + П)]/2$;

поправку горизонтального направления на Полярную за наклон горизонтальной оси $\Delta N_b = b\,(\tau/2)\operatorname{ctg} Z$, где $Z = 90° - (\varphi - f)$;

величина f выбирается из таблиц высот и азимутов Полярной АЕ по аргументу s;

горизонтальное направление на земной предмет $M = [L + (R \pm 180°)]/2$;

горизонтальное направление на Полярную $N = [L^* + (R^* \pm 180°)]/2 + \Delta N_b$;

горизонтальный угол Q между Полярной и земным предметом $Q = M - N + \Delta Q$, где ΔQ — поправка горизонтального угла,

выбираемая из результатов исследования правильности вращения горизонтальной оси.

Азимут направления на земной предмет вычисляют по следующим формулам:

азимут Полярной, вычисленный со средним моментом наблюдения в приеме,

$$\operatorname{tg} A'_N = m \sin t/(n \cos t - 1),$$

где $m = \operatorname{ctg}\delta \sec\varphi$; $n = \operatorname{ctg}\delta\ tg\ \varphi$; $t = T_H + u_X + \omega (T_H - X) - \alpha$;

поправка азимута Полярной звезды за ускорение

$$\Delta A_W = 5{,}454\ (\Delta T/100)^2 \frac{d^2A}{dt^2},$$

где

$$\frac{d^2A}{dt^2} = k_1 \sin A'_N - k_2 \sin 2A'_N;$$

$$k_1 = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \operatorname{ctg} Z; \qquad k_2 = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,(\operatorname{ctg}^2 Z + \operatorname{cosec}^2 Z)$$

выбираются из вспомогательных таблиц по аргументам Z и φ;

азимут направления на земной предмет в приеме $a_i = A_{N_i} + Q_i$, где $A_{N_i} = A'_{N_i} + \Delta A_{W_i}$;

средний азимут направления на земной предмет из n приемов $a_{ср} = (\sum a_i)/n$;

средняя квадратическая ошибка азимута

$$m = \sqrt{[v^2]/n\,(n-1)}.$$

В случае необходимости вычисляется геодезический азимут направления по формуле

$$a_г = a - 15\,(\lambda - L)\sin\varphi; \qquad m_{a_г} = \sqrt{m_a^2 + 15^2(m_\lambda^2 + m_L^2)\sin^2\varphi}.$$

При определениях азимута с ошибкой 15″ и грубее можно упростить формулы для вычислений. При тщательном горизонтировании теодолита можно не определять наклон горизонтальной оси. Астрономические координаты пункта должны быть известны с ошибками, не превышающими $m_\varphi = 1'$ и $m_\lambda = m_u = 0{,}1^m$.

Часы могут быть поставлены по Московскому декретному времени. В остальном порядок определения остается таким же, как и при определении азимута с точностью 3—5″. Для определения азимута производят измерение угла Q двумя-тремя приемами.

Упрощенные формулы для вычислений азимута имеют вид:

$$a = A_N + Q, \text{ где } Q = M - N; \qquad T_M = (T_{M_L} + T_{M_R})/2;$$

$$A_N = d \sec(\varphi + f);\ f = (90 - \delta)\cos t,\ d = (90 - \delta)\sin t,$$

$$t = s - \alpha; \qquad s = (T_M - 3^h) + \mu\,(T_M - 3^h) + S_0 + \lambda.$$

II.3.21. Определение азимута по часовому углу Солнца

Выгоднейшими условиями определения азимута по часовому углу Солнца являются утренние и вечерние часы, когда зенитное расстояние Солнца достаточно велико ($50° < Z_\odot < 80°$). Для определения азимута

с погрешностью 10″ астрономические координаты пункта должны быть известны с ошибками $m_\varphi \leqslant 10''$, $m_\lambda \leqslant 0{,}3^s_z$.

Для фиксации моментов наблюдения Солнца целесообразно применять двухстрелочный секундомер.

Каждый прием наблюдения азимута выполняется в следующем порядке. При КЛ (КП): наведение трубы на земной предмет, запись отсчетов по горизонтальному лимбу; наведение трубы на Солнце; наблюдение моментов прохождения левого (правого) края Солнца через три вертикальные нити методом «глаз-клавиша»; запись моментов $T_{\odot_i}$ по секундомеру; запись отсчетов уровня накладного на горизонтальную ось; запись отсчетов по горизонтальному лимбу; отсчет по вертикальному лимбу с точностью 1′.

При КП (КЛ): наблюдение другого края Солнца (так же, как и при первом положении теодолита); наведение трубы на земной предмет, запись отсчетов горизонтального лимба.

Из обработки приема радиосигналов времени выводят поправки и ход хронометра в системе местного среднего времени по формулам:

$$u_1 = m_1 - X_1 \text{ в момент } X_1;\ u_2 = m_2 - X_2 \text{ в момент } X_2;$$

$$u_X = (u_1 + u_2)/2 \text{ в момент } X = (X_1 + X_2)/2;$$

$$\omega^{\text{h}} = (u_2 - u_1)/(X_2 - X_1)^{\text{h}},$$

где

$$m_{1,2} = \text{UT1}_{1,2} + \lambda.$$

В журнале наблюдений вычисляют:

средний момент наблюдения Солнца в полуприеме $T_{\odot_{L,R}} = (\sum T_{\odot_{L,R}})/3$ и в приеме $T_{\odot_H} = (T_{\odot_L} + T_{\odot_R})/2$;

разность $\Delta T = T_{\odot_H} - T_{\odot_{L,R}}$ и $5{,}454\ (\Delta T/100)^2$;

зенитное расстояние Солнца в приеме (мин) $Z_\odot = \left(L^b_\odot - R^b_\odot\right)/2 + \rho_0$;

поправку горизонтального направления на Солнце за наклон горизонтальной оси $\Delta N_b = b\frac{\mathfrak{l}}{2}\operatorname{ctg} Z_\odot$, $b = [(Л + П)_0 - {}_0(Л + П)]/2$;

горизонтальное направление на земной предмет $M = [L + (R \pm 180°)]/2$;

горизонтальное направление на Солнце $N = [L_\odot + (R_\odot \pm 180°)]/2 + \Delta N_b$;

горизонтальный угол между Солнцем и земным предметом $Q = M - N$.

Астрономический азимут направления на земной предмет вычисляют по формуле: $a = A_N + Q$, где $A_N = A'_N + \Delta A_w$;

$$\operatorname{ctg} A'_N = \sin\varphi \operatorname{ctg} t_\odot - \cos\varphi \operatorname{tg}\delta_\odot \operatorname{cosec} t_\odot;$$

$$\Delta A_w = 5{,}454\left(\frac{\Delta T}{100}\right)^2 \frac{d^2A}{dt^2};\quad \frac{d^2A}{dt^2} = k_1 \sin A'_N - k_2 \sin 2A'_N.$$

Часовой угол Солнца вычисляют по формуле

$$t_\odot = T_H + u_X + \omega(T_H - X) + E.$$

Склонение Солнца $\delta_\odot$ и уравнение времени $E = 12^{\text{h}} + \eta$ интерполируют из таблиц Солнца АЕ на момент эфемеридного времени $(ET)^{\text{h}} = (\text{UT1} + \Delta T)^{\text{h}}$.

Средний азимут направления на земной предмет и ошибку азимута вычисляют по формулам:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\sum a_i}{a};\quad m_{a_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}},$$

где n — число приемов.

II.3.22. Определение азимута направления на земной предмет по измеренным зенитным расстояниям светил

Для определения приближенных азимутов с точностью 5—10″ и грубее данный способ обладает тем преимуществом, что здесь не нужно точно знать времени наблюдения светил.

При наблюдениях звезд достаточно знать лишь дату наблюдений, а при наблюдениях Солнца или планет можно пользоваться обыкновенными часами, поправка которых известна с ошибкой $2—3^{\text{m}}$. С указанной точностью время необходимо знать для приближенного интерполирования склонения светил по таблицам АЕ.

Определение азимута направления по измеренным зенитным расстояниям звезд. Для наблюдений выбираются яркие звезды вблизи первого вертикала на зенитных расстояниях от 40 до 70°. Звезды выбираются визуально.

Каждый прием определения азимута включает следующие операции. При КЛ (КП): визирование средней вертикальной нитью на земной предмет, отсчеты горизонтального лимба, наведение трубы на звезду, отсчитывание по вертикальному и горизонтальному лимбам; определение наклона горизонтальной оси по отсчетам уровня.

При КП (КЛ): наведение трубы на звезду, отсчеты по вертикальному и горизонтальному лимбам, определение наклона горизонтальной оси, визирование на местный предмет, отсчеты горизонтального лимба.

Для определения азимута с ошибкой 5—7″ достаточно произвести наблюдения по приведенной программе 4—6 приемами, причем одну половину звезд следует наблюдать на востоке, а другую — на западе.

Формулы для вычислений:

зенитного расстояния звезды $Z = Z' + \rho$; $Z' = (L^*_b - R^*_b)/2$, $\rho = \rho_0\gamma \cdot B$;

горизонтального направления на земной предмет $M = [L + (R \pm 180°)]/2$;

горизонтального направления на звезду $N = [L^* + (R^* \pm 180°)]/2 + \Delta N_b$;

горизонтального угла $Q = M - N$;

азимута светила $\cos A_N = (\sin\delta - \sin\varphi\cos Z)/(\cos\varphi \sin Z)$;

для светила на востоке $A = A_N$;

для светила на западе $A = 360° - A_N$;

азимута направления на земной предмет $a = A + Q$;

среднего азимута направления из n приемов $a_{\text{ср}} = (\Sigma a_i)/n$;

средней квадратической ошибки азимута $m_a = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}$.

Определение азимута направления по измеренному зенитному расстоянию Солнца. Азимут направления по зенитному расстоянию Солнца определяется в утренние и вечерние часы при высоте Солнца не менее 10°. Для наблюдений Солнца необходимо иметь часы, поправка которых относительно декретного времени данного пояса должна быть известна с ошибкой, не превышающей 2^{m}.

Наблюдения в каждом приеме выполняются в следующем порядке.

При КЛ (КП): наведение трубы на земной предмет, запись отсчетов по горизонтальному лимбу; наведение трубы на Солнце; запись отсчетов по часам (до целых минут), по вертикальному и горизонтальному лимбам.

При КП (КЛ): наведение трубы на Солнце, запись отсчетов по часам, по вертикальному и горизонтальному лимбам, наведение трубы на земной предмет, запись отсчетов по горизонтальному лимбу.

После того как изображение Солнца попало в поле зрения трубы, горизонтальная нить сетки подводится наводящим винтом трубы к верхнему или нижнему краю диска Солнца. Вращением наводящего винта край диска Солнца удерживается на этой нити до тех пор, пока изображение бокового края диска Солнца не коснется средней вертикальной нити.

В момент касания берутся и записываются в журнал отсчеты по часам, вертикальному и горизонтальному лимбам теодолита. При КЛ и КП диск Солнца наблюдается в противоположных углах сетки нитей трубы. В этом случае средние из отсчетов по вертикальному и горизонтальному лимбам будут отнесены к центру Солнца. Зенитное расстояние Солнца исправляется поправками за рефракцию и за суточный параллакс, т. е. $Z_\odot = Z'_\odot + \rho - P_\odot$, где $P_\odot \approx 9'' \sin Z'_\odot$.

Склонение Солнца интерполируется на момент эфемеридного времени $(ET) = (\mathrm{UT1} + \Delta T)^{\mathrm{h}}$, где $\mathrm{UT1} = T_{NH} - (N + 1)$; $T_{N+1} = (T_{(N+1)_L} + T_{(N+1)_R})/2$; N — номер часового пояса.

Все остальные формулы такие же, как и при определениях азимута по зенитным расстояниям звезд.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уралов С. С.* Курс геодезической астрономии. М.. Недра, 1980.
2. *Халхунов В. З.* Сферическая астрономия. М., Недра, 1972.

II.4. КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

И. И. Краснорылов, М. С. Урмаев

А. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

II.4.1. Роль космической геодезии в системе геодезических работ

Космическая геодезия — раздел геодезической науки, в котором для решения научных и практических задач геодезии используются результаты наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ), космических аппаратов (КА) и Луны.

Задачами космической геодезии являются:

1) определение взаимного положения пунктов в некоторой геодезической системе координат; 2) определение положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли; 3) определение координат пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли, и создание единой мировой геодезической системы; 4) установление связи между отдельными геодезическими системами; 5) изучение внешнего гравитационного поля и формы Земли; 6) уточнение некоторых фундаментальных геодезических постоянных.

Методы космической геодезии имеют существенные преимущества при решении некоторых задач по сравнению с традиционными. Возникает возможность быстрой передачи координат на расстояния в несколько тысяч километров и создания построений в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли. Определение параметров гравитационного поля по наблюдениям ИСЗ требует сравнительно небольшого числа станций на поверхности Земли, в то время как использование для этой цели традиционных методов основывается на густой сети пунктов на суше и на море. Применение спутниковой альтиметрии позволяет в короткое время детально изучить форму геоида в океанах, получить другую геодезическую и океанографическую информацию.

Достигнутая к настоящему времени высокая точность лазерных и доплеровских наблюдений ИСЗ обеспечивает их эффективное применение для решения геодинамических проблем: определения параметров вращения Земли (ПВЗ), исследования приливных явлений, изучения движения литосферных плит, разработки методов прогноза землетрясений. Большие перспективы при решении этих вопросов открывает использование лазерной локации Луны, радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) и фазостабильной радиоинтерферометрии.

Применение спутникового динамического метода в сочетании со спутниковой градиентометрией и наблюдениями по линии «спутник — спутник» позволяет не только изучать детальную структуру гравитационного поля, но и в перспективе исследовать его возможные изменения во времени. Полученная динамическим методом информация служит основой для выводов о внутреннем строении Земли.

Обобщением и развитием задач и методов космической геодезии является использование искусственных спутников Луны и планет для изучения этих объектов геодезическими методами: создание опорных сетей, определение параметров гравитационных полей, исследование формы, составление топографических и специальных карт.

Задачи космической геодезии обычно подразделяют на геометрические и динамические. В задачах первой группы спутник используется как высокая визирная цель и не требуется знать теорию его движения. При решении геометрических задач используют синхронные или квазисинхронные наблюдения ИСЗ с нескольких пунктов. В динамических задачах теории движения ИСЗ используются в качестве основы для вывода по результатам наблюдений спутников параметров гравитационного поля Земли; определения координат пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли; параметров атмосферы, ПВЗ и фундаментальных геодезических постоянных. Для определения последних кроме результатов наблюдений ИСЗ используются также данные слежения за другими космическими аппаратами.

II.4.2. Общие принципы использования ИСЗ в геодезических целях

На рис. 55 $\bar{\rho}_i$ — геоцентрический вектор ИСЗ, $\bar{r}_{ki}$ — топоцентрический вектор, начало которого совпадает с пунктом земной поверхности k, $\bar{R}_k$ — геодезический вектор пункта, имеющий начало в центре O' некоторого референц-эллипсоида, $\Delta\bar{R}$ — вектор, связывающий положение центра референц-эллипсоида с центром масс Земли O.

Векторы $\bar{\rho}_i$, $\bar{r}_{ki}$, $\Delta\bar{R}$ и $\bar{R}_k$ связаны соотношением

$$\bar{\rho}_i = \bar{r}_{ki} + \bar{R}_k + \Delta\bar{R}, \qquad \text{(II.4.1)}$$

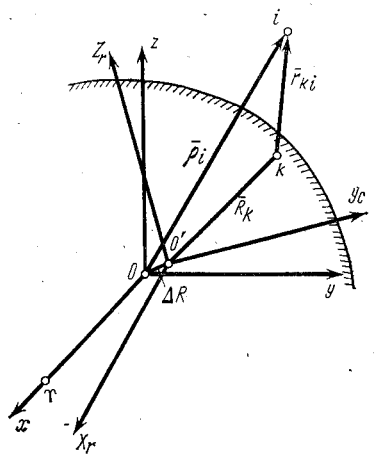


Рис. 55. Принцип использования ИСЗ для решения геодезических задач

которое является фундаментальным уравнением космической геодезии.

Одним из этапов при решении задач космической геодезии может являться задача определения положений ИСЗ (прямая задача). Она решается с помощью уравнения (II.4.1), если известны координаты пункта (т. е. компоненты вектора $\bar{R}_k$) и для момента t_i определены все три компоненты топоцентрического вектора $\bar{r}_{ki}$. При этом положение ИСЗ будет определено в той системе координат, в которой заданы координаты пункта наблюдений.

При использовании геодезических координат пунктов (в системе референц-эллипсоида) возникает задача определения положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли, т. е. определения вектора $\Delta\bar{R}$ в уравнении (II.4.1).

Гораздо чаще в космической геодезии приходится рассматривать вопрос об определении координат пункта наблюдений (обратная задача).

В этом случае уравнение (II.4.1) будет иметь вид

$$\bar{R}_k = \bar{\rho}_i - \bar{r}_{ki} - \Delta\bar{R}. \qquad \text{(II.4.2)}$$

Задача решается, если для момента t_i из теории движения ИСЗ известен геоцентрический вектор ИСЗ $\bar{\rho}_i$ и для этого же момента на пункте k получены по результатам наблюдений все три компоненты топоцентрического вектора $\bar{r}_{ki}$, а компоненты вектора $\Delta\bar{R}$ установлены заранее.

Для создания геодезических сетей широко применяются синхронные и квазисинхронные наблюдения ИСЗ. Если для некоторого момента t_i на пунктах k и j синхронно определить компоненты топоцентрических векторов ИСЗ $\bar{r}_{ki}$ и $\bar{r}_{ji}$, то получится два векторных уравнения:

$$\bar{\rho}_i = \bar{R}_k + \bar{r}_{ki} + \Delta\bar{R};\ \bar{\rho}_i = \bar{R}_j + \bar{r}_{ji} + \Delta\bar{R}, \qquad \text{(II.4.3)}$$

откуда

$$\bar{R}_j - \bar{R}_k = \bar{r}_{ki} - \bar{r}_{ji}. \qquad \text{(II.4.4)}$$

Если координаты одного из пунктов заданы, то уравнение (II.4.4) дает возможность получить координаты другого пункта в системе исходного.

Динамический метод космической геодезии заключается в совместном определении параметров гравитационного поля Земли, элементов орбит и координат пунктов наблюдений по совокупности измерений, выполняемых на пунктах. Кроме этого, часто определяют некоторые аппаратурные постоянные, параметры, характеризующие атмосферу, и уточняют значение гравитационного параметра $fM_\oplus$.

Геоцентрический радиус-вектор ИСЗ — сложная функция элементов орбиты $\bar{E}_i$, параметров гравитационного поля ψ_k и времени t:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}\,(\bar{E}_i,\ \psi_k,\ t). \qquad \text{(II.4.5)}$$

Если измеренными величинами в общем случае можно считать топоцентрические радиусы-векторы, то в обобщенной форме

$$\bar{r} = \bar{\rho}\,(E_i,\ \psi_k,\ t) - \bar{R}. \qquad \text{(II.4.6)}$$

Линеаризируя уравнение (II.4.6) и полагая безошибочными моменты регистрации времени t, получим

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial E}\Delta\bar{E}_i + \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\psi_k}\Delta\psi_k - \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{R}}\Delta\bar{R} + (\bar{r}_0 - \bar{r}_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \qquad \text{(II.4.7)}$$

где $\Delta\bar{E}_i$, $\Delta\psi_k$, $\Delta\bar{R}$ — соответственно поправки к элементам орбиты, параметрам гравитационного поля и координатам пунктов; $\bar{r}_0$ — приближенное значение топоцентрического радиуса-вектора; $\bar{v}_r$ — вектор поправок, полученных из уравнения, к измеренным величинам.

В частном случае, когда не определяют поправки к принятой модели гравитационного поля, полагают $\psi_k = 0$ и получают основное уравнение орбитального метода

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial E}\Delta\bar{E}_i - \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{R}}\Delta\bar{R} + (\bar{r}_0 - \bar{r}_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \qquad \text{(II.4.8)}$$

в котором предполагаются известными возмущающие силы, действующие на ИСЗ, и ставится задача совместного определения элементов орбиты и координат пунктов.

Полагая для моментов измерений известными элементы орбиты $\bar{E}_i$, получают основное уравнение упрощенного орбитального метода

$$-\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{R}}\Delta\bar{R} + (\bar{r}_0 - \bar{r}_{\text{изм}}) = \bar{v}_r. \qquad \text{(II.4.9)}$$

В последнем случае ставится задача определения лишь координат пунктов.

II.4.3. Системы координат

В космической геодезии приходится использовать несколько координатных систем. При обработке фотографических наблюдений, например, топоцентрические прямое восхождение α' и склонение спутника δ' определяются в системе координат, заданной опорными звездами. При этом изображения звезд и спутника на снимке получаются в мгновенной системе координат, а исходными являются координаты опорных звезд в системе некоторого звездного каталога. Эта система непригодна для задания координат пунктов и параметров гравитационного поля, так как в ней они являются функциями времени. Чтобы упомянутые величины не изменялись со временем, надо использовать систему координат, жестко связанную с Землей.

Следует отметить, что система координат, используемая в динамических методах, должна быть инерциальной. Создание такой системы является одной из основных задач астрометрии на современном этапе.

Приведем системы координат, наиболее часто используемые при исследованиях в космической геодезии.

Звездные геоцентрические системы координат

I. x, y, z (α, δ, ρ) — мгновенная геоцентрическая звездная система координат. Ось x направлена в мгновенную точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{мгн}}$ (рис. 56), ось z — вдоль мгновенной оси вращения Земли, плоскость xOy совпадает с плоскостью мгновенного экватора, ось y дополняет систему до правой. Направление на звезду в этой системе задается прямым восхождением α $[0 \leqslant \alpha \leqslant 24^h]$ и склонением δ $[-90° \leqslant \delta \leqslant +90°]$, ρ — геоцентрический радиус-вектор.

$$\alpha, \delta, \rho \to x, y, z:$$

$$x = \rho \cos\alpha \cos\delta, \qquad (II.4.10)$$

$$y = \rho \sin\alpha \cos\delta,$$

$$z = \rho \sin\delta;$$

$$x, y, z \to \alpha, \delta, \rho:$$

$$\operatorname{tg}\alpha = y/x,$$

$$\operatorname{tg}\delta = z/\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (II.4.11)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

II. x_t, y_t, z_t $(\alpha_t, \delta_t, \rho_t)$ — средняя геоцентрическая звездная система координат. Ось x_t направлена в среднюю точку весеннего равноденствия Υ_t на эпоху t, ось z_t совпадает со средней осью вращения Земли, плоскость x_tOy_t совпадает с плоскостью среднего экватора, ось y_t дополняет систему до правой.

III. x_0, y_0, z_0 $(\alpha_0, \delta_0, \rho)$ — средняя геоцентрическая звездная система на эпоху звездного каталога.

IV. X, Y, Z $(\alpha_0, \delta_0, \rho)$ — гринвичская звездная геоцентрическая система. Ось X параллельна плоскости меридиана Гринвича, ось Z направлена вдоль оси вращения Земли, ось Y дополняет систему до правой. Система X, Y, Z участвует во вращении Земли; полярные

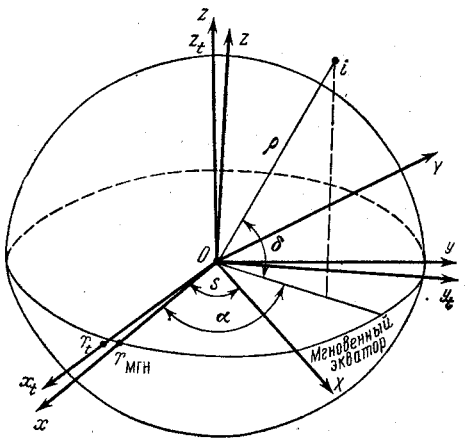


Рис. 56. Звездные геоцентрические системы координат

координаты: склонение δ и угол γ, равный часовому углу T меридиана Гринвича, взятому с обратным знаком:

$$\gamma = -T = (\alpha - S),$$

где S — гринвичское звездное время. В зависимости от решаемых задач гринвичская звездная система может задаваться как мгновенная или как средняя.

Звездные топоцентрические системы координат

V. x', y', z' (α', δ', z') — топоцентрическая звездная мгновенная система координат имеет начало в точке физической поверхности Земли, оси соответственно параллельны осям системы I (рис. 57). Аналогично вводятся две следующие системы.

VI. x'_t, y'_t, z'_t $(\alpha'_t, \delta'_t, z'_t)$ — топоцентрическая звездная средняя система координат.

VII. X', Y', Z' (γ', δ', r') — топоцентрическая гринвичская звездная система координат.

Земные системы координат

VIII. $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ (Λ, Φ, R) (L, B, H) * — квазигеоцентрическая земная система координат (рис. 58). Начало в центре эллипсоида, принятого в настоящее время за общий земной. Ось $\overline{X}$ направлена в точку пересечения геодезического меридиана Гринвича с плоскостью экватора общего земного эллипсоида, ось $\overline{Z}$ совпадает с малой осью общего земного эллипсоида, плоскость $\overline{X}O\overline{Y}$ совпадает с плоскостью геодезического экватора. Полярные координаты: квазигеоцентрическая долгота Λ — двугранный угол между плоскостями гринвичского и местного меридианов, квазигеоцентрическая широта Φ — угол между квазигеоцентрическим радиусом-вектором R и плоскостью экватора общего земного эллипсоида.

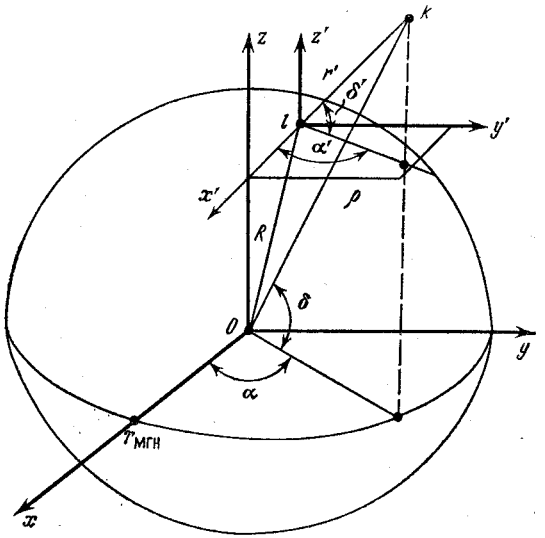
IX. X_r, Y_r, Z_r (L_r, B_r, H_r) — геодезические координаты в системе некоторого референц-эллипсоида.

X. u, v, w (A_Γ, Z_Γ, r') — прямоугольная горизонтальная геодезическая система координат (рис. 59). Начало этой системы находится в точке физической поверхности Земли l (B, L, H), ось u параллельна касательной $\overline{l}$ к геодезическому меридиану и направлена на север, ось w направлена вдоль нормали к референц-эллипсоиду и положительна в направлении от центра, ось v дополняет систему до правой. Полярные координаты: геодезический азимут A_Γ, геодезическое зенитное расстояние Z_Γ и расстояние r' от текущей точки до начала координат.

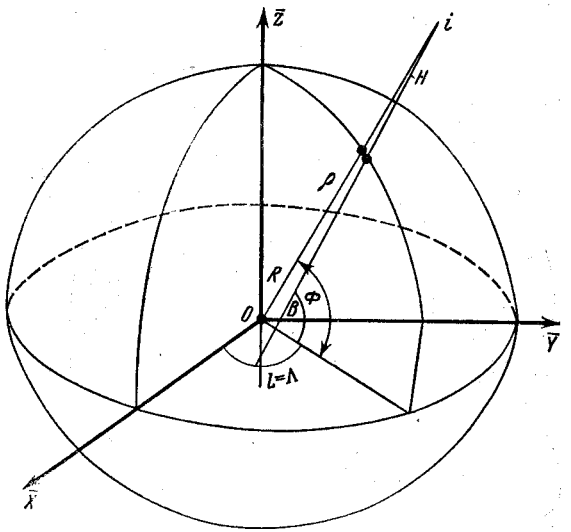
XI. φ, λ, H^g — астрономические координаты: астрономическая долгота λ — двугранный угол между плоскостями гринвичского и местного астрономического меридианов. Плоскость астрономического меридиана проходит через отвесную линию в заданной точке и параллельна оси вращения Земли; астрономическая широта φ — угол между отвесной линией в заданной точке и плоскостью экватора; ортометрическая высота H^g — расстояние по отвесной линии от точки на физической поверхности Земли до поверхности геоида.

---

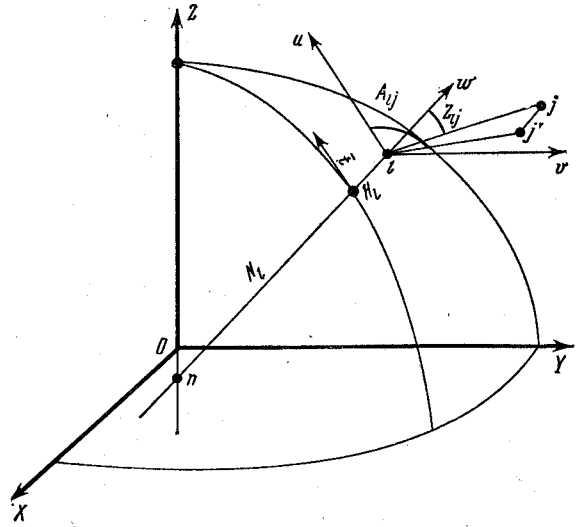
* L, B, H — геодезические координаты (долгота, широта, нормальная высота).



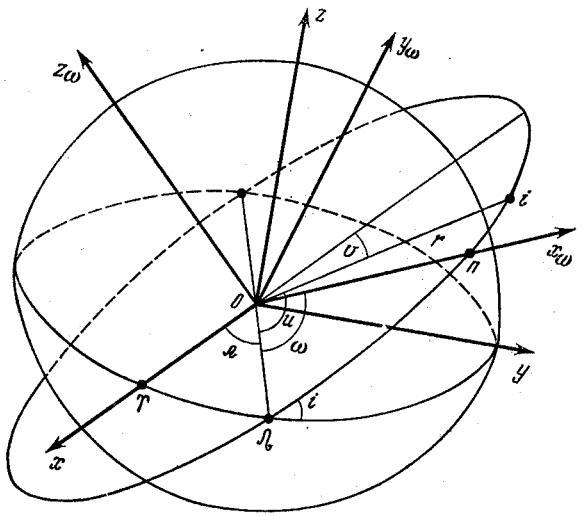
Р и с. 57. Звездная топоцентрическая система координат



Р и с. 58. Квазигеоцентрическая земная система координат



Р и с. 59. Прямоугольная горизонтальная геодезическая система координат



Р и с. 60. Орбитальная система координат

XII. $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ (A, $\widetilde{Z}$, r') — астрономическая прямоугольная горизонтальная система координат, в которой ось $\bar{u}$ параллельна касательной к астрономическому меридиану и положительна к северу, ось $\bar{w}$ направлена по отвесной линии и положительна в сторону от центра Земли, ось $\bar{v}$ дополняет систему до правой. Полярные координаты: астрономический азимут A, астрономическое зенитное расстояние $\widetilde{Z}$ и расстояние r' от текущей точки до начала координат.

XIII. x_ω, y_ω, z_ω — орбитальная система координат (рис. 60). Начало — в центре масс Земли. Ось x_ω направлена в перицентр орбиты, ось z_ω — перпендикулярна к плоскости орбиты, ось y_ω в плоскости орбиты дополняет систему до правой.

XIV. x_S, y_S, z_S — спутникоцентрическая система координат. Ось y_S (радиальная) направлена к центру масс центрального тела, ось x_S (трансверсальная) перпендикулярна к y_S в плоскости орбиты в направлении движения спутника, ось z_S (бинормальная) перпендикулярна к плоскости орбиты (положительна к северу). Единичные векторы вдоль осей x_S, y_S, z_S часто обозначаются соответственно $\overline{T}$, $\overline{S}$ и $\overline{W}$.

II.4.4. Преобразования систем координат

1. От средней звездной системы на эпоху t_0 звездного каталога α_0, δ_0 (x_0, y_0, z_0) к средней звездной α_t, δ_t (x_t, y_t, z_t) на эпоху t.

Выписывают из каталога координаты звезды α_0 и δ_0 и исправляют их поправками за собственное движение от эпохи каталога t_0 до эпохи t. Далее вычисляют направляющие косинусы направления на звезду:

$$\begin{aligned} l_0 &= \cos\alpha_0 \cos\delta_0; \\ m_0 &= \sin\alpha_0 \cos\delta_0; \\ n_0 &= \sin\delta_0. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.12)}$$

Влияние прецессии учитывается с помощью формулы

$$\begin{vmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{vmatrix}, \qquad \text{(II.4.13)}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sin\xi_0 \sin z + \cos\xi_0 \cos z \cos\theta; \\ b_1 &= -\cos\xi_0 \sin z - \sin\xi_0 \cos z \cos\theta; \\ c_1 &= -\cos z \sin\theta; \\ a_2 &= \sin\xi_0 \cos z + \cos\xi_0 \sin z \cos\theta; \\ b_2 &= \cos\xi_0 \cos z - \sin\xi_0 \sin z \cos\theta; \\ c_2 &= -\sin z \sin\theta; \\ a_3 &= \cos\xi_0 \sin\theta; \\ b_3 &= -\sin\xi_0 \sin\theta; \\ c_3 &= \cos\theta, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.14)}$$

причем

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (2304,253'' + 1,397''t_0)\,\tau + 0,302''\tau^2 + 0,018''\tau^3; \\ z &= (2304,253'' + 1,397''t_0)\,\tau + 1,095''\tau^2 + 0,018''\tau^3; \\ \theta &= (2004,685'' + 0,853''t_0)\,\tau - 0,427''\tau^2 - 0,042''\tau^3, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.15)}$$

где $\tau = t - t_0$; t, t_0 и τ задаются в тропических столетиях, считая от 1900,0. Затем вычисляют α_t и δ_t:

$$\alpha_t = \operatorname{arctg}\frac{\bar{m}}{\bar{l}}; \quad \delta_t = \operatorname{arctg}\frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{m}^2 + \bar{l}^2}}. \qquad \text{(II.4.16)}$$

2. От средней звездной системы α_t, δ_t на эпоху t к истинной α, δ на эпоху t.

Вначале учитывают влияние нутации

$$\begin{vmatrix} l_{\text{ист}} \\ m_{\text{ист}} \\ n_{\text{ист}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\delta\psi\cos\varepsilon & -\delta\psi\sin\varepsilon \\ \delta\psi\cos\varepsilon & 1 & -\delta\varepsilon \\ \delta\psi\sin\varepsilon & \delta\varepsilon & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{l} \\ \bar{m} \\ \bar{n} \end{vmatrix}, \qquad \text{(II.4.17)}$$

где $\delta\psi$ — долгопериодическая и короткопериодическая нутация по долготе; $\delta\varepsilon$ — долгопериодическая и короткопериодическая нутация в наклонении,

$$\begin{aligned} \delta\psi = {} & -17,2327'' \sin\Omega - 1,2729'' \sin 2(\Omega + F - D) + \\ & + 0,2088'' \sin 2\Omega + 0,1261'' \sin l' - 0,0497'' \sin(2\Omega + l' + \\ & + 2F - 2D) - 0,2037'' \sin 2(\Omega + F) + 0,0675'' \sin l; \qquad \text{(II.4.18)} \\ \delta\varepsilon = {} & 9,2100'' \cos\Omega + 0,5522'' \cos 2(\Omega + F - D) - \\ & - 0,0904'' \cos 2\Omega + 0,0884'' \cos 2(\Omega + F). \qquad \text{(II.4.19)} \end{aligned}$$

Аргументы в формулах для вычисления нутации представляют рядами. По исправленным таблицам движения Луны Брауна эти ряды имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega &= 259^\circ\,10'\,59,79'' - 1934^\circ\,08'\,31,23''T + 7,48''T^2 + 0,0080''T^3; \\ l &= 296^\circ\,06'\,16,59'' + 477\,198^\circ\,50'\,56,79''T + 33,09''T^2 + 0,0518''T^3; \\ l' &= 358^\circ\,28'\,33,00'' + 35\,999^\circ\,02'\,59,10''T - 0,54''T^2 - 0,0120''T^3; \\ & \qquad \text{(II.4.20)} \\ F &= 11^\circ\,15'\,03,20'' + 483\,202^\circ\,01'\,30,54''T - 11,56''T^2 - 0,0012''T^3; \\ D &= 350^\circ\,44'\,14,95'' + 445\,267^\circ\,06'\,51,18''T - 5,17''T^2 + 0,0068''T^3; \end{aligned}$$

$T = (t - 1900)$, в тропических столетиях.

Затем вычисляют α и δ:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m}{l}; \quad \delta = \operatorname{arctg}\frac{n}{\sqrt{m^2 + l^2}}. \qquad \text{(II.4.21)}$$

3. От истинных координат α, δ, ρ на эпоху t к гринвичским X, Y, Z:

$$\begin{vmatrix} l_{\text{гр}} \\ m_{\text{гр}} \\ n_{\text{гр}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos S & \sin S & x_p \\ -\sin S & \cos S & -y_p \\ -x_p\cos S - y_p\sin S & -x_p\sin S + y_p\cos S & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_{\text{ист}} \\ m_{\text{ист}} \\ n_{\text{ист}} \end{vmatrix}; \qquad \text{(II.4.22)}$$

$$\begin{aligned} X &= \rho l_{\text{гр}}; \\ Y &= \rho m_{\text{гр}}; \\ Z &= \rho n_{\text{гр}}, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.22')}$$

где S — истинное звездное время в Гринвиче; x_p, y_p — координаты мгновенного полюса в радианах.

4. От гринвичских координат X, Y, Z к квазигеоцентрическим $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= X - \Delta X_0 - \psi_0 Y + \gamma_0 Z;\\ \overline{Y} &= Y - \Delta Y_0 + \psi_0 X - \nu_0 Z;\\ \overline{Z} &= Z - \Delta Z_0 - \gamma_0 X + \nu_0 Y,\end{aligned} \qquad \text{(II.4.23)}$$

где ΔX_0, ΔY_0, ΔZ_0 — координаты центра эллипсоида, принятого за общий земной, в гринвичской системе координат; ψ_0, ν_0, γ_0 — Эйлеровы углы. Обычно полагают $\psi_0 = \nu_0 = \gamma_0 = 0$.

5. От прямоугольных квазигеоцентрических координат $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ к геодезическим B, L, H:

$$\operatorname{tg} L = \overline{Y}/\overline{X}; \qquad \text{(II.4.24)}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\overline{Z} + Ne^2 \sin B}{\overline{X}\cos L + \overline{Y}\sin L}; \qquad \text{(II.4.25)}$$

$$H = \frac{\overline{X}}{\cos B \cos L} - N = \frac{\overline{Y}}{\cos B \sin L} - N = \frac{\overline{Z}}{\sin B} - N(1 - e^2), \qquad \text{(II.4.26)}$$

где a — большая полуось эллипсоида; e — эксцентриситет эллипсоида; N — длина внутренней нормали (см. рис. 59), причем

$$N = a/\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \qquad \text{(II.4.27)}$$

Вычисления по формуле (II.4.25) ведутся последовательными приближениями.

В первом приближении можно положить

$$\operatorname{tg} B^{(1)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{X}\cos L + \overline{Y}\sin L}. \qquad \text{(II.4.28)}$$

Обратный переход от B, L, H к $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= (N + H)\cos B \cos L;\\ \overline{Y} &= (N + H)\cos B \sin L;\\ \overline{Z} &= [N(1 - e^2) + H]\sin B.\end{aligned} \qquad \text{(II.4.29)}$$

6. От квазигеоцентрических координат $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ к прямоугольным геодезическим горизонтальным u, v, w и далее к геодезическому азимуту $A_г$, зенитному расстоянию $Z_г$ и расстоянию r':

$$\begin{vmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin B_i \cos L_i & -\sin B_i \sin L_i & \cos B_i \\ -\sin L_i & \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{X}_j - \overline{X}_i \\ \overline{Y}_j - \overline{Y}_i \\ \overline{Z}_j - \overline{Z}_i \end{vmatrix}; \qquad \text{(II.4.30)}$$

$$\begin{aligned} r'_{ji} &= \sqrt{v_j^2 + u_j^2 + w_j^2};\\ \operatorname{tg}(A_г)_{ij} &= v_j/u_j;\\ \operatorname{tg}(Z_г)_{ij} &= \sqrt{v_j^2 + u_j^2}/w_j, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.31)}$$

где индексом j отмечают координаты текущей точки, а индексом i — координаты начала координат горизонтальной системы.

7. От астрономических широты φ и долготы λ к геодезическим B и L:

$$\xi = \varphi - B; \quad \eta = (\lambda - L)\cos B, \qquad \text{(II.4.32)}$$

где ξ, η — составляющие полного уклонения отвесной линии u в плоскостях меридиана и первого вертикала, причем

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \qquad \text{(II.4.33)}$$

8. От экваториальных прямоугольных координат x, y, z к орбитальным x_ω, y_ω, z_ω:

$$\begin{vmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \qquad \text{(II.4.34)}$$

где

$$\begin{aligned} P_x &= \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i;\\ P_y &= \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i;\\ P_z &= \sin\omega\sin i;\\ Q_x &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i;\\ Q_y &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i;\\ Q_z &= \cos\omega\sin i;\\ W_x &= \sin\Omega\sin i;\\ W_y &= -\cos\Omega\sin i;\\ W_z &= \cos i. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.35)}$$

В формулах (II.4.35) ω, Ω, i — элементы орбиты, определения которых будут даны ниже (см. рис. 60).

II.4.5. Системы измерения времени

Промежуток времени, в течение которого Земля совершает один оборот вокруг своей оси относительно направления на какую-нибудь точку в пространстве, называется с у т к а м и. Если оборот Земли вокруг своей оси фиксируется относительно направления на точку весеннего равноденствия, то это — звездные сутки; при направлении на центр видимого диска Солнца, смещенный годичной аберрацией, — истинные солнечные сутки; при направлении на «среднее солнце» — средние солнечные сутки.

В зависимости от того, какая точка весеннего равноденствия используется в качестве отсчетного индекса, звездное время подразделяют на среднее, истинное и квазиистинное.

Местное среднее солнечное время гринвичского меридиана называют мировым или всемирным UT0. Получив из наблюдений местное звездное время некоторого меридиана и зная долготу последнего, находят UT0. Вследствие движения полюса полученное из наблюдений в разных точках Земли время UT0 будет неодинаковым.

С учетом движения полюса имеем

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\lambda, \qquad \text{(II.4.36)}$$

где

$$\Delta\lambda = \frac{1}{15}(x \sin\lambda_0 + y \cos\lambda_0) \operatorname{tg}\varphi_0, \qquad (II.4.37)$$

здесь x, y — сферические координаты мгновенного полюса Земли.

Вследствие неравномерного вращения Земли вокруг своей оси время UT1 будет неравномерным. Учет поправки за сезонные неравномерности во вращении Земли дает систему UT2:

$$UT2 = UT1 + \Delta T_S = UT0 + \Delta\lambda + \Delta T_S. \qquad (II.4.38)$$

Необходимость использования при составлении эфемерид и в других динамических задачах в качестве аргумента равномерно текущего времени привела к введению так называемого эфемеридного времени. Начиная с 1960 г. эфемеридное время является аргументом во многих таблицах АЕ. Различие эфемеридного времени и времени UT0 обусловлено вековыми и нерегулярными изменениями скорости вращения Земли.

Эфемеридное время связано с UT0 формулой

$$ET = UT0 + \Delta T, \qquad (II.4.39)$$

где ΔT определяют из специальных наблюдений Луны *.

Эфемеридная секунда по определению Международного бюро мер и весов (1956 г.) — это 1/31 556 925,9747 доля тропического года для 1900 г., январь 0, в 12 час эфемеридного времени. Таким образом, определение эфемеридной секунды связано как с вращением Земли вокруг своей оси, так и с ее движением по орбите вокруг Солнца.

Молекулярные и атомные эталоны частоты позволяют получить шкалу времени, не зависящую от вращения Земли. Атомная секунда определяется как промежуток времени, равный 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома-изотопа цезия с массовым числом 133 при нулевом магнитном поле. Таким образом получаем шкалу атомного времени (AT). В СССР такая шкала времени обозначается AT1 и является государственным эталоном времени и частоты. При переходе к ней от UT2 приняли, что 1 января 1964 г. в 12^h (UT) эти времена совпадали.

Практической реализацией времени AT1 является всемирное координированное время UTC; оно согласуется с UT2 так, что $|UT2 - UTC| < 100$ мс. Разность показаний часов в системах UTC и UT1 не должна превышать 700 мс.

Данные, необходимые для связи систем UT1 (SU) и UTC (SU), UT1 (SU) и AT (SU), UT1 (SU) и UT1 (BIH), координаты полюса Земли x и y в системе OCI и среднемесячные систематические отклонения фактического времени передач сигналов отдельных радиостанций от шкалы координированного времени UTC (SU) приводятся в бюллетенях «Всемирное время» (серия E1), издаваемых Междуведомственной комиссией единой службы времени при Госстандарте СССР.

Б. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

II.4.6. Невозмущенное движение ИСЗ

В первом приближении движение искусственного спутника вокруг Земли можно рассматривать в рамках ограниченной задачи двух тел. При этом полагают, что притягивающее тело (в нашем случае Земля) является шаром со сферическим распределением плотности, а спутник — материальная точка, не притягивающая центральное тело. При таком допущении спутник будет двигаться вокруг Земли в соответствии с законами Кеплера.

* ΔT приводится в «Астрономическом ежегоднике СССР» (§ 1).

Первый закон Кеплера. Орбита искусственного спутника Земли есть эллипс, в одном из фокусов которого находится центр масс притягивающего тела. Уравнение орбитального эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos v}; \qquad (II.4.40)$$

$$p = a(1 - e^2),$$

где p — параметр орбиты; a — большая полуось; e — эксцентриситет.

Второй закон Кеплера. Радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади. Другими словами, секториальная скорость спутника есть величина постоянная:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{dv}{dt}. \qquad (II.4.41)$$

Третий закон Кеплера. Квадраты периодов обращения двух спутников относительно центра масс притягивающего тела относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (II.4.42)$$

Период обращения спутника вокруг Земли

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{fM_\oplus}}, \qquad (II.4.43)$$

следовательно,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{fM_\oplus} = \text{const}. \qquad (II.4.44)$$

Ньютон уточнил третий закон Кеплера и получил формулу, учитывающую притяжение спутником центрального тела:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (II.4.45)$$

Вместо формулы (II.4.44) в этом случае имеем

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f(M_\oplus + m)}. \qquad (II.4.46)$$

Для того чтобы тело стало искусственным спутником Земли, ему необходимо сообщить некоторую начальную скорость. Минимальное значение этой скорости называют первой космической скоростью

$$V_c = \sqrt{\mu/\rho_0}, \qquad (II.4.47)$$

где

$$\mu = f(M_\oplus + m). \qquad (II.4.47')$$

У поверхности Земли $V_c = 7{,}9$ км/с.

Скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно преодолело земное притяжение, называют второй космической или скоростью освобождения.

Эта скорость равна

$$V_{\text{п}} = \sqrt{2\mu/\rho_0} \qquad \text{(II.4.48)}$$

и у поверхности Земли составляет 11,2 км/с.

Движение спутника вокруг Земли в неподвижной системе координат с началом в ее центре масс определяется системой дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{x}{\rho^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu\frac{y}{\rho^3}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{z}{\rho^3}, \qquad \text{(II.4.49)}$$

где

$$\mu = f(M + m);$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad \text{(II.4.50)}$$

Уравнения (II.4.49) называются дифференциальными уравнениями невозмущенного кеплеровского движения. Эти уравнения в цилиндрических координатах (r, λ, z) имеют вид:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -\mu\frac{r}{\rho^3};$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right) = 0; \qquad \text{(II.4.51)}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu\frac{z}{\rho^3},$$

где

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}. \qquad \text{(II.4.52)}$$

Если ρ, φ, λ — сферические координаты, определяемые выражениями

$$x = \rho\cos\varphi\cos\lambda;$$

$$y = \rho\cos\varphi\sin\lambda; \qquad \text{(II.4.53)}$$

$$z = \rho\sin\varphi,$$

то дифференциальные уравнения невозмущенного движения будут:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos^2\varphi = -\frac{\mu}{\rho^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) + \rho^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi = 0; \qquad \text{(II.4.54)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\cos^2\varphi\right) = 0.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения приводит к совокупности независимых между собой первых интегралов.

Интегралы площадей:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_1;$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = c_2; \qquad \text{(II.4.55)}$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_3.$$

В уравнениях (II.4.55) c_1, c_2, c_3 — п о с т о я н н ы е п л о щ а д е й.

Интеграл энергии

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h, \qquad \text{(II.4.56)}$$

где произвольную постоянную h называют п о с т о я н н о й э н е р г и и.

Так как

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2, \qquad \text{(II.4.57)}$$

то вместо (II.4.56) получаем

$$V^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h. \qquad \text{(II.4.58)}$$

Интегралы Лапласа:

$$x\dot{\rho} - \rho\dot{x} = f_1;$$

$$y\dot{\rho} - \rho\dot{y} = f_2; \qquad \text{(II.4.59)}$$

$$z\dot{\rho} - \rho\dot{z} = f_3,$$

где f_1, f_2, f_3 — п о с т о я н н ы е Л а п л а с а.

Между семью полученными интегралами существуют следующие соотношения:

$$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0; \qquad \text{(II.4.60)}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \mu^2 + h(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2). \qquad \text{(II.4.61)}$$

Отметим также, что

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

есть вектор момента количества движения,

$$f_{\text{Л}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

— вектор Лапласа.

Векторы c и $f_{\text{Л}}$ перпендикулярны друг к другу и определяют неизменную плоскость Лапласа. Из семи интегралов (II.4.55), (II.4.56) и (II.4.59) только пять будут независимыми.

Общим интегралом системы (II.4.49) являются системы уравнений:

$$x = x(t, h, g, |c|, |f|);$$

$$y = y(t, h, g, |c|, |f|); \qquad \text{(II.4.62)}$$

$$z = z(t, h, g, |c|, |f|);$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t, h, g, |c|, |f|);$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t, h, g, |c|, |f|); \qquad \text{(II.4.63)}$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t, h, g, |c|, |f|),$$

где $F(t, h, g, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3)$ — функция времени и шести независимых произвольных постоянных.

Произвольные постоянные могут быть определены через так называемые начальные условия, т. е. через координаты (x_0, y_0, z_0) и соста-

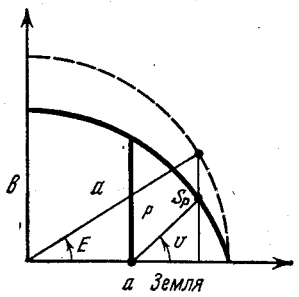


Рис. 61. К выводу соотношения между разными элементами орбиты

вляющие скорости спутника ($\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$) в момент t_0. Однако с практической точки зрения во многих случаях произвольные постоянные целесообразно выразить через элементы орбиты.

Элементы орбиты спутника есть совокупность параметров, характеризующих положение орбиты в пространстве, ее размеры и форму, а также положение спутника на орбите в некоторый момент времени.

Положение орбиты в пространстве характеризуют: Ω — долгота восходящего узла; ω — аргумент перигея; i — угол наклона орбиты (см. рис. 60). Размеры и форму орбиты характеризуют: a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты. В качестве шестого элемента может быть использован момент прохождения спутника через перигей τ.

Возможны разные модификации элементов орбиты (рис. 61):

a	e	ω	τ
	$\sin\varphi = e$	$\pi = \Omega - \omega$	$M_0 = n(t - \tau)$
$p = a(1 - e^2)$			$\varepsilon = \Omega + \omega + M_0$
$q = a(1 - e)$			$M = n(t - t_0) + M_0$
$n = \sqrt{\mu/a^3}$			$E = M + e\sin E$
$T = 2\pi/n$			$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$

Здесь p — фокальный параметр; n — среднее движение; T — период обращения спутника; π — долгота перигея; M — средняя аномалия; E — эксцентрическая аномалия; v — истинная аномалия; ε — средняя долгота; $\mu = fM_\oplus$ — гравитационный параметр.

Связь между эксцентрической и средней аномалиями устанавливается посредством уравнения

$$E - e\sin E = M, \tag{II.4.64}$$

называемого уравнением Кеплера. Обычно это уравнение решают методом приближений.

В соответствии с рис. 60

$$u = v + \omega, \tag{II.4.65}$$

где u — аргумент широты.

Между элементами орбиты и постоянными интегрирования существует следующая связь:

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\mu p}\,\sin i \sin\Omega; \\ c_2 &= -\sqrt{\mu p}\,\sin i\cos\Omega; \\ c_3 &= \sqrt{\mu p}\,\cos i; \end{aligned} \tag{II.4.66}$$

$$f_1 = \mu e(\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i);$$

$$f_2 = \mu e(\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i); \tag{II.4.67}$$

$$f_3 = \mu e\sin\omega\sin i;$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\mu p}; \\ f &= e\mu; \\ h &= -\mu(1 - e^2)/p. \end{aligned} \tag{II.4.68}$$

Невозмущенное движение ИСЗ может происходить либо по эллиптической, либо по круговой орбите. В случае эллиптической орбиты:

$$c \neq 0,\ 0 < e < 1,\ h < 0,\ V_0 < \sqrt{2\mu/\rho_0},\ f < \mu. \tag{II.4.69}$$

Для круговой орбиты соответственно имеем:

$$c \neq 0,\ e = 0,\ h = -\mu/\rho_0 < 0,\ V_0 = \sqrt{\mu/\rho_0},\ f = 0. \tag{II.4.70}$$

Для орбит с очень малыми эксцентриситетами вместо элементов e и ω, которые становятся неудобными, часто используют $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0$:

$$\lambda_1 = e\cos\omega,\ \lambda_2 = e\sin\omega,\ \lambda_0 = M_0 + \omega. \tag{II.4.71}$$

Составляющие радиуса-вектора положения и радиуса-вектора скорости, выраженные через элементы орбиты, имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \rho(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i); \\ y &= \rho(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i); \\ z &= \rho\sin u\sin i; \end{aligned} \tag{II.4.72}$$

$$v_x = v_\rho(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i) - v_n(\cos\Omega\sin u + \sin\Omega\cos u\cos i);$$

$$v_y = v_\rho(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i) - v_n(\sin\Omega\sin u - \cos\Omega\cos u\cos i);$$

$$v_z = v_\rho\sin u\sin i + v_n\cos u\sin i, \tag{II.4.73}$$

где

$$v_\rho = \sqrt{\mu/p}\,e\sin v;\ v_n = \sqrt{\mu/p}\,(1 + e\cos v).$$

Основные разложения в ряды в задаче двух тел:

$$v = E + 2\left(\beta\sin E + \frac{1}{2}\beta^2\sin 2E + \frac{1}{3}\beta^3\sin 3E + \cdots\right);$$

$$\beta = \frac{1}{e}(1 - \sqrt{1 - e^2}) = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \ldots;$$

$$E = v - 2\left(\beta\sin v - \frac{1}{2}\beta^2\sin 2v + \frac{1}{3}\beta^3\sin 3v - \cdots\right);$$

$$v = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \cdots\right)\sin M + \left(\frac{5}{4}e^2 + \cdots\right)\sin 2M + \left(\frac{13}{12}e^3 + \cdots\right)\sin 3M + \ldots;$$

$$E = M + \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \cdots\right)\sin M + \left(\frac{1}{2}e^2 - \cdots\right)\sin 2M +$$

$$+\left(\frac{3}{8}e^3-\cdots\right)\sin 3M+\ldots;$$

$$\frac{\rho}{a}=1-e\cos M-\frac{e^2}{2}(\cos 2M-1)-$$

$$-\frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 2^2}(3\cos 3M-3\cos M)-\ldots;$$

$$\cos E=\cos M+\frac{e}{2}(\cos 2M-1)+$$

$$+\frac{e^2}{1\cdot 2\cdot 2^2}(3\cos 3M-3\cos M)-\cdots$$

II.4.7. Возмущенное движение ИСЗ

В зависимости от характера действующих сил возмущения в движении ИСЗ делятся на гравитационные (возмущения от аномального гравитационного поля Земли, от притяжения Луны и Солнца) и возмущения от неконсервативных сил, основными из которых являются сопротивление атмосферы и давление солнечного излучения.

Для изучения возмущенного движения используют понятие оскулирующей (соприкасающейся) орбиты, которая определяется как кеплерова орбита, элементарная дуга которой в любой момент совпадает с элементарной дугой действительной орбиты. Элементы этой орбиты называются оскулирующими. Изменение оскулирующих эллипсов описывается функциями $e(t)$, $p(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $M(t)$. Определение этих функций является основной задачей теории возмущенного движения.

В самом общем виде возмущенное движение описывается системой дифференциальных уравнений Лагранжа (2-го рода)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}+Q_i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad \text{(II.4.74)}$$

где q_i — обобщенная координата; T — кинетическая энергия системы; V — потенциальная функция; Q_i — обобщенная неконсервативная сила.

Если q_i — декартовы координаты (x, y, z) в абсолютной системе прямоугольных координат с началом в центре масс Земли, то уравнения Лагранжа обращаются в систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{\rho^3}=\frac{\partial V}{\partial x}+Q_x;\\
&\frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{\rho^3}=\frac{\partial V}{\partial y}+Q_y;\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{\rho^3}=\frac{\partial V}{\partial z}+Q_z.
\end{aligned} \qquad \text{(II.4.75)}$$

Начальными условиями для интегрирования уравнений (II.4.75) являются координаты x_0, y_0, z_0 и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в начальный момент.

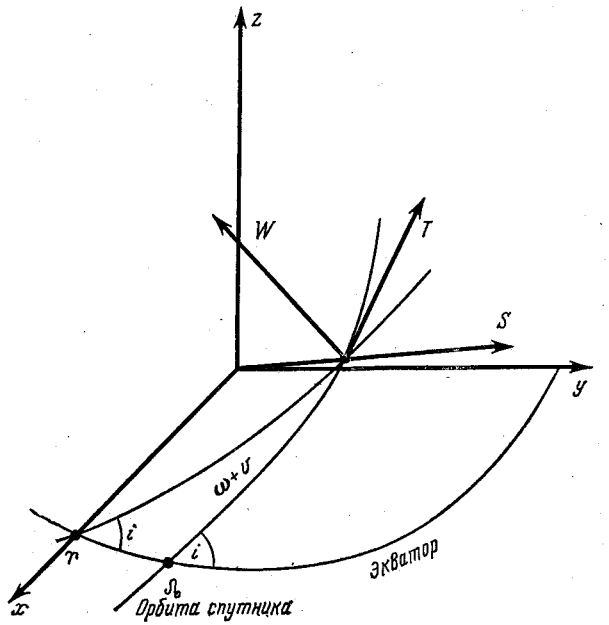


Рис. 62. Компоненты возмущающего ускорения

Дифференциальные уравнения возмущенного движения (в оскулирующих элементах) могут быть представлены через компоненты возмущающего ускорения в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=W\frac{\rho}{\sqrt{\mu p}}\frac{\sin u}{\sin i};\\
&\frac{dp}{dt}=2\sqrt{\frac{p}{\mu}}\rho T;\\
&\frac{di}{dt}=\frac{\rho}{\sqrt{\mu p}}W\cos u;
\end{aligned} \qquad \text{(II.4.76)}$$

$$\frac{de}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin v+\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v+e\frac{\rho}{p}T\right];$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{1}{e}S\cos v+\frac{1}{e}\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right];$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{\rho^2}\left[1-\frac{\rho^3}{\mu p}W\operatorname{ctg} i\sin u-\frac{\rho^2}{(\rho^2)}\sqrt{\frac{(p)}{p}}\right],$$

где (u), (p) и (ρ) — невозмущенные значения аргумента широты u фокального параметра p и радиуса-вектора ρ; W, T, S — компоненты возмущающего ускорения соответственно в направлении бинормали, трансверсали и радиуса-вектора (рис. 62);

При малых значениях эксцентриситета e уравнения для de/dt и $d\omega/dt$ в системе (II.4.76) заменяют на уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-S\cos u + T\left(1+\frac{\rho}{p}\right)\sin u + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho}{p}\left(T\lambda_1 - W\lambda_2 \operatorname{ctg} i \sin u\right)\right]; \qquad \text{(II.4.77)}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[S\sin u + T\left(1+\frac{\rho}{p}\right)\cos u + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho}{p}\left(T\lambda_2 + W\lambda_1 \operatorname{ctg} i \sin u\right)\right], \qquad \text{(II.4.78)}$$

где $\lambda_1 = e\sin\omega$; $\lambda_2 = e\cos\omega$; $e = \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$; $\operatorname{tg}\omega = \lambda_1/\lambda_2$.

Система уравнений движения интегрируется при известных начальных условиях.

II.4.8. Методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ

Для интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения используются аналитические методы (Пикара, малого параметра), численные методы и аппроксимация системами полиномов.

При аналитическом интегрировании в качестве независимой переменной обычно выбирают не t, а одну из быстро меняющихся переменных, чаще всего u или v.

С помощью выражения

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\gamma\rho^2} \quad \text{или} \quad \frac{dt}{du} = \gamma\frac{\rho^2}{\sqrt{\mu p}}, \qquad \text{(II.4.79)}$$

где

$$\gamma = 1/1 - \frac{\rho^3}{\mu p} W \operatorname{ctg} i \sin u,$$

легко перейти от уравнений (II.4.76) к следующим уравнениям по переменной u:

$$\frac{d\Omega}{du} = W\frac{\rho^3\gamma}{\mu p}\frac{\sin u}{\sin i};$$
$$\frac{dp}{du} = \frac{2\gamma}{\mu}\rho^3 T;$$
$$\frac{di}{du} = \frac{\rho^3\gamma}{\mu p} W\cos u; \qquad \text{(II.4.80)}$$
$$\frac{de}{du} = \frac{\rho^2\gamma}{\mu}\left[S\sin v + \left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v + e\frac{\rho}{p}T\right];$$
$$\frac{d\omega}{du} = \frac{\rho^2\gamma}{\mu e}\left[-S\cos v + \left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v - e\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right];$$
$$\frac{d\bar{u}}{du} = 1 - \frac{\rho^2\gamma}{\sqrt{p}}\frac{\sqrt{(p)}}{(\rho^2)}.$$

Аналогично с помощью выражения

$$\frac{dt}{dv} = \frac{\rho^2\gamma_1}{\sqrt{\mu p}} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\rho^2\gamma_1}, \qquad \text{(II.4.81)}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{1+\frac{\rho^2}{\mu e}S\cos v - \frac{\rho^2}{\mu e}\left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v},$$

можно перейти к уравнениям по переменной v, которые будут иметь такой же вид, как и (II.4.80), но с заменой множителя γ на γ_1.

Система (II.4.76) или (II.4.80) может быть решена методом последовательных приближений, для чего она представляется в интегральной форме. В первом приближении оскулирующие элементы в правых частях полагают постоянными, после чего система распадается на отдельные уравнения, которые решаются с помощью квадратур:

$$\delta\Omega = \Omega - (\Omega) = \int \frac{\rho^3\gamma}{\mu p} W \frac{\sin u}{\sin i}\, du;$$
$$\delta p = p - (p) = \int \frac{2\gamma}{\mu}\rho^3 T\, du;$$
$$\delta i = i - (i) = \int \frac{\rho^3\gamma}{\mu p} W\cos u\, du;$$
$$\delta e = e - (e) = \int \frac{\rho^2\gamma}{\mu}\left[S\sin v + \left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\cos v + e\frac{\rho}{p}T\right] du; \qquad \text{(II.4.82)}$$
$$\delta\omega = \omega - (\omega) = \int \frac{\rho^2\gamma}{\mu e}\left[-S\cos v + \left(1+\frac{\rho}{p}\right)T\sin v - \right.$$
$$\left. - e\frac{\rho}{p}W\operatorname{ctg} i\sin u\right] du;$$
$$\delta\bar{u} = \bar{u} - (\bar{u}_0) = \int\left(1 - \frac{\rho^2\gamma}{\sqrt{p}}\frac{\sqrt{(p)}}{(p)^2}\right) du,$$

где (Ω), (p), (i), (e), (ω) — невозмущенные элементы орбиты, определяемые как $(\Omega) = \Omega_0 - \int_{u_0}^{u} W\frac{\rho^3\gamma\sin u}{\mu p\sin i}du$ и т. д., а Ω_0, p_0, ... — начальные значения элементов.

Для интегрирования системы (II.4.76) или (II.4.80) численными методами используются, как правило, экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса, при этом начальные («разгонные») точки для применения метода Адамса получаются при помощи метода Рунге—Кутта четвертого порядка.

Для получения интегралов системы (II.4.80) методом аппроксимирования используют степенные ряды, тригонометрические функции и так называемые гиперболические члены, при этом любой элемент E_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) представляется в виде

$$E_i(t) = \sum_{j=0}^{n} E_j^i (t-t_0)^j + \sum_{j=0}^{n} S_j^i \sin\left(\alpha_j^i + \beta_j^i t\right) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n} H_j^i \exp\left\{{}^1H_j^i\left[\ln^2\left(H_j^i - t\right)\right]\right\}. \qquad \text{(II.4.83)}$$

II.4.9. Возмущения от гравитационного поля Земли

Одной из основных причин, вызывающих возмущения в движении искусственных спутников Земли, является весьма сложная структура ее гравитационного поля, определяемая неправильностью ее формы и неравномерным распределением масс в недрах.

Одной из распространенных формул, выражающих гравитационное действие Земли на точку во внешнем пространстве, является

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_n(\sin\Phi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_{nm}(\sin\Phi)\,(J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda)\right], \tag{II.4.84}$$

где Φ — геоцентрическая широта; λ — долгота; $P_n(\sin\Phi)$ — полиномы Лежандра; $P_{nm}(\sin\Phi)$ — присоединенные функции Лежандра; R_0 — средний радиус Земли; J_{nm}, K_{nm} — безразмерные коэффициенты.

Возможно представление гравитационного потенциала в иной форме:

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda + \right.$$

$$\left. + S_{nm}\sin m\lambda)\,P_{nm}(\sin\Phi)\right] \tag{II.4.85}$$

причем

$$-C_{n0} = J_n;\ -C_{nm} = J_{nm};\ -S_{nm} = K_{nm}.$$

Приведем еще одну формулу

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_n(\sin\Phi) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} A_{nm}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_{nm}(\sin\Phi)\cos m(\lambda - \lambda_{nm})\right], \tag{II.4.86}$$

где

$$A_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2};$$

$$\operatorname{tg} m\lambda_{nm} = S_{nm}/C_{nm}.$$

Первый член $fM_\oplus/\rho$ характеризует притяжение шарообразной Земли со сферическим распределением плотностей.

Все остальные члены (R) учитывают переход к реальной Земле. Члены, содержащие $P_n(\sin\Phi)$, называют зональными гармониками. Члены, содержащие $P_{nm}(\sin\Phi)$, называют долготными, причем в случае $n \neq m$ имеем дело с так называемыми тессеральными гармониками, а при $n = m$ — с секториальными.

Если на спутник действует только притяжение Земли, гравитационный потенциал которой равен

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho} + R, \tag{II.4.87}$$

то возмущения в движении ИСЗ будут обусловлены только величиной R (пертурбационная функция).

Влияние второй зональной гармоники на движение спутника характеризуется величиной возмущающей функции

$$R = -J_2\frac{fM_\oplus R_0^2}{\rho^3}\left(\frac{3}{2}\sin^2\Phi - \frac{1}{2}\right), \tag{II.4.88}$$

или в виде разложения по степеням эксцентриситета (с точностью до e^3)

$$R = \frac{1}{2}J_2 fM_\oplus\frac{R_0^2}{a^3}\left(1 - \frac{3}{2}s^2\right)\left[1 + \frac{3}{2}e^2 + 3\left(e + \frac{9}{8}e^3\right)\cos M + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{2}e^2\cos 2M + \frac{53}{8}e^3\cos 3M\right] + \frac{3}{4}J_2 fM_\oplus\frac{R_0^2}{a^3}s^2 \times$$

$$\times\left[\frac{1}{48}e^3\cos(M - 2\omega) - \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{8}e^3\right)\cos(M + 2\omega) + \right.$$

$$+\left(1 - \frac{5}{2}e^2\right)\cos(2M + 2\omega) + \frac{7}{2}\left(e - \frac{123}{56}e^3\right)\cos(3M + 2\omega) +$$

$$\left. + \frac{17}{2}e^2\cos(4M + 2\omega) + \frac{845}{48}e^3\cos(5M + 2\omega)\right], \tag{II.4.89}$$

где $s = \sin i$.

Действие возмущающей функции (II.4.89) вызывает вековые возмущения в элементах Ω, ω, M_0:

$$\dot\Omega = -\frac{3}{2}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\cos i\,(1 - e^2)^{-2}; \tag{II.4.90}$$

$$\dot\omega = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2}; \tag{II.4.91}$$

$$\dot M_0 = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{3\cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{3/2}}. \tag{II.4.92}$$

Вследствие возмущающего действия второй зональной гармоники, как видно из приведенных формул, перемещение узла происходит в направлении, обратном движению спутника (регрессия узла). Одновременно в противоположном направлении происходит вращение плоскости орбиты вокруг собственной оси.

Как отмечалось выше, вместо ω и M_0 могут использоваться соответственно элементы π и ε; для них имеем:

$$\dot\pi = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{5\cos^2 i - 2\cos i - 1}{(1 - e^2)^2}; \tag{II.4.93}$$

$$\dot\varepsilon = \frac{3}{4}J_2 n\left(\frac{R_0}{a}\right)^2\frac{(5 + 3\sqrt{1 - e^2})\cos^2 i - 2\cos i - 1 - \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e^2)^2}. \tag{II.4.94}$$

Кроме того, вторая зональная гармоника вызывает короткопериодические возмущения во всех элементах орбиты. Формулы для вычисления этих возмущений могут быть взяты из [1], [2], [14].

При исследовании движении ИСЗ в течение продолжительных промежутков времени в формулах должны быть учтены влияния вековых возмущений второго порядка и долгопериодические возмущения первого порядка относительно полярного сжатия. Возможность использования при этом формул для орбит с разными эксцентриситетами определяется количеством сохраненных в разложении членов. Имеет место особенность при $e = 0$.

Для орбит с малыми эксцентриситетами при вычислении возмущений от второй зональной гармоники возмущающую функцию выражают в виде

$$R = \frac{1}{2} J_2 \frac{fM_\oplus R_0^2}{a^3} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left[1 + 3l\cos\lambda + 3h\sin\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(h^2 + l^2)\cos 2\lambda + 9hl\sin 2\lambda\right] -$$

$$- \frac{3}{4} J_2 \frac{fM_\oplus R_0^2}{a^3}\sin^2 i\left[-\frac{1}{2}l\cos\lambda + \frac{1}{2}h\sin\lambda + \cos 2\lambda + \right.$$

$$+ \frac{7}{2}l\cos 3\lambda + \frac{7}{2}h\sin 3\lambda - \frac{5}{2}(h^2 + l^2)\cos 2\lambda +$$

$$\left. + \frac{17}{2}(l^2 - h^2)\cos 4\lambda + 17hl\sin 4\lambda\right]. \qquad (II.4.95)$$

где

$$h = e\sin(\pi - \Omega),\ l = e\cos(\pi - \Omega),\ \lambda = \varepsilon - \Omega + \int_{t_0}^{t} n\,dt.$$

Формулы вычисления возмущений для этого случая можно взять из [14]; там же даются формулы для круговой орбиты.

Зональные гармоники, порядок которых $n > 2$, вызывают вековые возмущения в элементах Ω, ω, M и долгопериодические — во всех элементах. Вековые возмущения первого порядка вызываются только четными зональными гармониками.

Формулы для вычисления влияния зональных гармоник высших порядков $(n > 2)$ имеют вид:

$$\Delta\dot{\Omega} = -n\cos i\left[\frac{15}{32}\gamma_4(2 + 3e^2)(4 - 7s^2) - \right.$$

$$- \frac{105}{1024}\gamma_6(8 + 40e^2 + 15e^4)(8 - 36s^2 + 33s^4) +$$

$$+ \frac{315}{32\,768}\gamma_8(16 + 168e^2 + 210e^4 + 35e^6)\times$$

$$\left.\times(64 - 528s^2 + 1144s^4 - 715s^6)\right]; \qquad (II.4.96)$$

$$\Delta\dot{\omega} = -\Delta\dot{\Omega}\cos i + n\left[\frac{15}{128}\gamma_4(4 + 3e^2)(8 - 40s^2 + 35s^4) - \right.$$

$$- \frac{105}{2048}\gamma_6(8 + 20e^2 + 5e^4)(16 - 168s^2 + 378s^4 - 231s^6) +$$

$$+ \frac{315}{262\,144}\gamma_8(64 + 336e^2 + 280e^4 + 35e^6)(128 - 2304s^2 +$$

$$\left. + 9504s^4 - 13\,728s^6 + 6435s^8)\right], \qquad (II.4.97)$$

где

$$\gamma_n = J_n\left(\frac{R_0}{p}\right)^n,\quad s = \sin i,\ p = a(1 - e^2).$$

Для вычисления долгопериодических возмущений, обусловленных зональными гармониками, могут быть рекомендованы формулы, приведенные в [2]. Эти формулы для эксцентриситета орбиты имеют следующую структуру:

$$\Delta e_{\text{ж}} = 2\pi\sum_n J_n\left(\frac{R_0}{p}\right)^n e_n;$$

$$e_2 = 0;$$

$$e_3 = -\frac{3}{2}(1 - e^2)\sin i\cos\omega\left(1 - \frac{5}{4}\bar{I}\right);$$

$$e_4 = -\frac{45}{16}(1 - e^2)\left(1 - \frac{7}{6}\bar{I}\right)\bar{I}e\sin 2\omega; \qquad (II.4.98)$$

$$e_5 = \frac{15}{4}(1 - e^2)\sin i\left[\left(1 - \frac{7}{2}\bar{I} + \frac{21}{8}\bar{I}^2\right)\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right)\cos\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{8}\left(1 - \frac{9}{8}\bar{I}\right)\bar{I}e^2\cos 3\omega\right],$$

где $\bar{I} = \sin^2 i$.

Аналогично можно записать выражения для возмущений в других элементах орбиты.

В формулах вида (II.4.98) члены, содержащие синусы или косинусы от ω, 2ω, 3ω, 4ω, ..., вызывают долгопериодические возмущения. Точные вычисления требуют продолжения рядов в этих формулах.

Долгопериодические возмущения имеют такой же порядок, что и короткопериодические возмущения от второй зональной гармоники. Вековые возмущения от второй зональной гармоники примерно в тысячу раз больше вековых возмущений от зональных гармоник высших порядков.

Тессеральные и секториальные гармоники вызывают только периодические возмущения. Амплитуды долгопериодических возмущений примерно в 10—15 раз больше амплитуд короткопериодических возмущений. Период долгопериодических возмущений примерно соответствует суткам, формулы для вычисления этих возмущений могут быть взяты из [1], [2], [14].

II.4.10. Влияние притяжения Луны и Солнца

Под влиянием притяжения Луны и Солнца в элементах орбиты спутника появляются вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. Возмущающее ускорение, обусловленное притяжением Луны, примерно в 2,2 раза больше, чем возмущающее ускоре-

ние, обусловленное притяжением Солнца. При высоте спутника 2000 км величина возмущающего ускорения от Луны в 140 раз меньше, чем от аномалий силы тяжести. Если ИСЗ находится на высоте 20 000 км, то возмущения, обусловленные притяжением Луны, в 2 раза больше, чем возмущения от аномалий силы тяжести.

Вековые возмущения в элементах орбиты за время одного оборота спутника вокруг Земли вычисляются по формулам [14]:

$$\Delta a = 0;$$

$$\Delta e = \frac{15}{4} MeK (1 - e^2) \sin^2 i \sin 2\omega;$$

$$\Delta\Omega = -\frac{3}{2} MK \cos i (1 - e^2 + 5e^2 \sin^2 \omega); \qquad \text{(II.4.99)}$$

$$\Delta i = -\frac{15}{8} MKe \sin 2i \sin 2\omega;$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{2} MK [5 \cos^2 i \sin^2 \omega + (1 - e^2)(2 - 5 \sin^2 \omega)],$$

$$\Delta h_{\text{п}} = -\frac{15}{4} MKae (1 - e^2) \sin^2 i \sin^2 2\omega,$$

где

$$M = \pi \frac{\mu_1}{\mu_0}; \quad K = \left(\frac{a}{r_1}\right)^3 (1 - e^2)^{-1/2}; \quad \mu_1 = fM_{\text{☾}(\odot)};$$

$$\mu_0 = fM_{\oplus}; \quad r_1 = r_{\text{☾}(\odot)}.$$

Долгопериодические возмущения, обусловленные притяжением Луны и Солнца, имеют периоды 13,66 и 182,63 средних суток соответственно. Их можно вычислить по формулам, приведенным в [1], [2], [14].

Короткопериодические возмущения, имеющие периоды, равные или кратные времени обращения ИСЗ, малы и ими в большинстве случаев пренебрегают.

II.4.11. Возмущения в движении ИСЗ вследствие тормозящего действия атмосферы

Сила сопротивления атмосферы

$$F = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D,$$

где ρ — плотность воздуха; V — скорость спутника относительно атмосферы; S — площадь поперечного сечения спутника; C_D — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления (в верхних слоях атмосферы C_D равен 2—2,5).

Изменения плотности воздуха в первом приближении происходят по закону, выражающемуся экспоненциальной формулой

$$\rho = \rho_0 \exp(-h/H),$$

где H — постоянная (шкала высот); ρ_0 — плотность воздуха в исходной точке, например в точке перигея; h — высота, отсчитанная от исходной точки.

Для вычисления возмущений от сопротивления атмосферы используются формулы из [1], [2], [14]. Возмущения наклона i настолько малы, что их можно не принимать во внимание.

Для учета вращения атмосферы необходимо вместо $\varkappa = SC_D/m_0$ (m_0 — масса спутника) использовать в формулах для подсчета возмущений

$$\varkappa = \left(1 - \frac{r_{\text{п}}}{V_{\text{п}}} \omega \cos i_0\right)^2,$$

где $r_{\text{п}}$ и $V_{\text{п}}$ — радиус-вектор и скорость спутника в перигее; ω — угловая скорость вращения атмосферы.

Время существования спутника

Если спутник движется в атмосфере, то вследствие ее тормозящего действия высота полета будет уменьшаться, и в конце концов он прекратит существование.

Продолжительность существования спутника от некоторого момента t_0 вычисляется по формуле

$$\Delta t = \frac{e_0 T_0 F(e_0)}{|\dot{T}_0|}, \qquad \text{(II.4.100)}$$

где

$$F(e_0) = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{7}{6}e_0 + \frac{5}{16}e_0^2 + \frac{1}{2}\frac{H}{a_0 e_0} + \frac{11}{24}\frac{H}{a_0} + \frac{3}{8}\frac{H^2}{a_0^2 e_0^2}\right];$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{n^2}\frac{dn}{dt};$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3n_0^2 a_0 \rho_0 \varkappa}{2\sqrt{2\pi\zeta_0}}\left\{1 + 2e_0 + \frac{3}{2}e_0^2 + e_0^3 + \frac{2 - 12e_0 - 21e_0^2}{16\zeta_0} + \cdots\right\}^*;$$

$$\zeta_0 = a_0 e_0 / H.$$

Использование формулы (II.4.100) обеспечивает определение с ошибкой порядка 5 %.

Для приближенных расчетов времени существования ИСЗ могут применяться формулы

$$\Delta t = -\frac{3}{4}\frac{eT}{dT/dt} = -\frac{3}{8}\frac{h_a - h_{\text{п}}}{a}\frac{T}{dT/dt}. \qquad \text{(II.4.101)}$$

Если орбита имеет параметры $0{,}02 < e < 0{,}2$ и 180 км $< h_{\text{п}} <$ $<$ 400 км, то формулы (II.4.101) обеспечивают определение Δt с ошибкой порядка 10 %.

Для весьма приближенных расчетов (ошибка порядка 25 %) можно использовать формулу

$$\Delta t = -\frac{1}{2}\frac{h_a - h_{\text{п}}}{dh_a/dt}. \qquad \text{(II.4.102)}$$

II.4.12. Влияние светового давления

Сила светового давления определяется формулой

$$F = \frac{CS_0(1 + k)}{c}\left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^2 \cos^2 \alpha, \qquad \text{(II.4.103)}$$

где C — площадь поперечного сечения спутника; S_0 — мощность солнечной радиации на 1 см² земной поверхности в единицу времени (сол-

* Полная формула приведена в [1].

нечная постоянная); k — коэффициент отражения; R_0 — среднее расстояние от Земли до Солнца; Δ — расстояние между спутником и Солнцем; α — угол падения солнечного луча; c — скорость света.

Формулы для вычисления возмущений от светового давления для случая, если спутник постоянно освещен Солнцем, могут быть взяты из [14]; там же даются формулы для вычисления возмущений с учетом теневого эффекта.

Возмущения от светового давления пропорциональны отношению C/m_0 (m_0 — масса спутника) и особенно велики для спутников-баллонов.

При высоких требованиях к точности определения возмущений надо учитывать действие отраженного от Земли солнечного излучения. Возмущения по этой причине составляют 10—15 % от возмущений, обусловленных действием прямой солнечной радиации.

Другие возмущения в движении ИСЗ

При решении геодинамических задач требуются как высокоточные наблюдения ИСЗ (например, измерение дальностей лазерными дальномерами с ошибкой в несколько сантиметров), так и тщательный учет возмущающих факторов, влияющих на движение спутника. Необходимо учитывать при этом, кроме рассмотренных выше, возмущения, обусловленные приливными деформациями Земли, электромагнитными силами, прецессией и нутацией оси вращения Земли, притяжением атмосферы и релятивистскими эффектами.

II.4.13. Вычисление эфемериды ИСЗ

Эфемеридой называется таблица, в которой для равноотстоящих моментов времени даются топоцентрические экваториальные $\alpha'(t)$ и $\delta'(t)$ или горизонтальные $A(t)$ и $Z(t)$ координаты ИСЗ с точностью, необходимой для организации наблюдений на станциях.

Порядок вычисления эфемериды. Интегрируют систему дифференциальных уравнений движения (II.4.76) соответственно для моментов $t_1, t_2, \ldots, t_n$. При этом ограничиваются учетом лишь первых членов (до четвертого порядка) в разложении аномалий силы тяжести, сопротивление атмосферы учитывают приближенно. В результате интегрирования получают оскулирующие элементы орбиты. С помощью уравнения Кеплера $E - e\sin E = M$ вычисляют эксцентрическую аномалию E с использованием итерационной схемы:

$$E_{q+1} = E_q - \frac{E_q - e\sin E_q - M}{1 - e\cos E_q}, \qquad \text{(II.4.104)}$$

где e — эксцентриситет орбиты (в градусах).

Далее вычисляют истинную аномалию:

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\sin E;\ \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}; \qquad \text{(II.4.105)}$$

радиус-вектор ρ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos v} = a(1 - e\cos E); \qquad \text{(II.4.106)}$$

прямоугольные геоцентрические координаты ИСЗ:

$$\begin{aligned} x_c &= \rho\,[\cos(\omega + v)\cos\Omega - \sin(\omega + v)\sin\Omega\cos i];\\ y_c &= \rho\,[\cos(\omega + v)\sin\Omega + \sin(\omega + v)\cos\Omega\cos i], \qquad \text{(II.4.107)}\\ y_c &= \rho\sin(\omega + v)\sin i; \end{aligned}$$

геоцентрическое прямое восхождение и склонение:

$$\operatorname{tg}\alpha = y_c/x_c;\ \operatorname{tg}\delta = z_c/\sqrt{x_c^2 + y_c^2};$$

прямоугольные гринвичские координаты пункта наблюдений:

$$\begin{aligned} X_п &= (N + H)\cos B\cos L;\\ Y_п &= (N + H)\cos B\sin L; \qquad \text{(II.4.108)}\\ Z_п &= [N(1 - e^2) + H]\sin B;\\ N &= a(1 - e^2\sin^2 B)^{-1/2}; \end{aligned}$$

экваториальные геоцентрические координаты пункта наблюдений:

$$\begin{aligned} x_п &= X_п\cos S + Y_п\sin S;\\ y_п &= -X_п\sin S + Y_п\cos S; \qquad \text{(II.4.109)}\\ z_п &= Z_п. \end{aligned}$$

В формулах (II.4.109) S — гринвичское звездное время, причем

$$S = S_0 + \mathrm{UT1} + \mu\mathrm{UT1}. \qquad \text{(II.4.110)}$$

Затем вычисляют топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ:

$$\operatorname{tg}\alpha' = (y_c - y_п)/(x_c - x_п); \qquad \text{(II.4.111)}$$

$$\operatorname{tg}\delta' = (z_c - z_п)/\sqrt{(x_c - x_п)^2 + (y_c - y_п)^2} \qquad \text{(II.4.112)}$$

и далее в случае необходимости горизонтальные координаты, азимут и зенитное расстояние:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\cos\delta'\cos s}{-\sin\delta'\sin\varphi + \cos\delta'\sin\varphi\sin s}; \qquad \text{(II.4.113)}$$

$$\cos Z = \sin\varphi\sin\delta' + \cos\varphi\cos\delta'\cos s; \qquad \text{(II.4.114)}$$

$$s = \mathfrak{s} + \lambda. \qquad \text{(II.4.115)}$$

II.4.14. Определение орбиты ИСЗ

Определение орбиты ИСЗ заключается в нахождении поправок к приближенным начальным условиям интегрирования дифференциальных уравнений движения (II.4.76) по совокупности орбитальных измерений, выполненных на станциях наблюдения за некоторый промежуток времени $t - t_0$.

Приближенные начальные условия обычно известны для момента выхода ИСЗ на орбиту. Элементы орбиты в любой момент t есть функция начальных условий и времени. Если начальными условиями являются кеплеровские элементы, то

$$\begin{aligned} a &= a(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t);\\ e &= e(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t);\\ i &= i(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t); \qquad \text{(II.4.116)}\\ \omega &= \omega(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t);\\ \Omega &= \Omega(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t);\\ M &= M(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0, t). \end{aligned}$$

С другой стороны, любая измеренная величина U_{jk}, связывающая положения ИСЗ k и станции наблюдения j, есть функция текущих координат, скорости ИСЗ и времени t:

$$U_{jk} = U_{jk}(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k). \qquad (II.4.117)$$

Раскладывая (II.4.117) в ряд Тейлора и переходя к уравнениям поправок, с учетом (II.4.116) получим:

$$\sqrt{P_{U_{jk}}} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial U_{jk}}{\partial \Im_i^0} \Delta\Im_i^0 + \left(U_{jk}^0 - U_{jk}^{\text{изм}}\right) = v_{jk}\sqrt{P_{U_{jk}}}, \qquad (II.4.118)$$

где $\Im_i$ — любой из шести элементов; $\Delta\Im_i^0$ — поправка к i-му элементу орбиты; v_{jk} — поправка измеренного значения U_{jk}; U_{jk}^0 — приближенное значение U_{jk}; $U_{jk}^{\text{изм}}$ — измеренное значение U_{jk}, $P_{U_{jk}}$ — вес U_{jk}.

Производные от измеренных величин по начальным значениям элементов $\partial U_{jk}/\partial\Im_i^0$ будут:

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial \Im_i^0} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial U_{jk}}{\partial \Im_i} \frac{\partial \Im_i}{\partial \Im_0^0}. \qquad (II.4.119)$$

Из (II.4.119) следует, что возникает необходимость в вычислении производных $\partial\Im_i/\partial\Im_i^0$ от текущих значений элементов по начальным. Матрицу производных от текущих элементов по начальным можно приближенно, с учетом только вековых возмущений первого порядка от сжатия, вычислить по формулам:

$$\frac{\partial(a,\ e,\ i,\ \omega,\ M,\ \Omega)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0,\ \omega_0,\ M_0,\ \Omega_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(a,\ e,\ i)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0)} & \dfrac{\partial(a,\ e,\ i)}{\partial(M_0,\ \omega_0,\ \Omega_0)} \\ \dfrac{\partial(M,\ \omega,\ \Omega)}{\partial(a_0,\ e_0,\ i_0)} & \dfrac{\partial(M,\ \omega,\ \Omega)}{\partial(M_0,\ \omega_0,\ \Omega_0)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline K & E \end{array}\right|, \qquad (II.4.120)$$

где

$$K = \begin{vmatrix} -\dfrac{(3-7\gamma)}{2a_0} n & -3n\gamma \dfrac{\cos E_0}{1 - e_0 \cos E_0} & 6n\gamma \dfrac{\operatorname{ctg} i_0 \sin^2 \Phi_0}{1 - 3\sin^2 \Phi_0} \\ -\dfrac{7}{2a_0}\dot{\omega} & \dfrac{4e_0}{1-e_0^2}\dot{\omega} & 5\dot{\Omega}\sin i_0 \\ -\dfrac{7}{2a_0}\dot{\Omega} & \dfrac{4e_0}{1-e_0^2}\dot{\Omega} & -\dot{\Omega}\operatorname{tg} i_0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (t - t_0). \qquad (II.4.121)$$

В формуле (II.4.121)

$$\gamma = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^3 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 (1 - 3\sin^2 \Phi_0);$$

$$M = M_0 + \bar{n}\,(t - t_0);$$

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}\,(t - t_0);$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\,(t - t_0);$$

$$a = a_0;\quad e = e_0;\quad i = i_0;\quad \bar{n} = n\,(1 - \gamma),$$

$\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ вычисляются соответственно по формулам (II.4.90) и (II.4.91).

Система (II.4.118) решается последовательными приближениями по способу наименьших квадратов до выполнения условия

$$\left|U_{jk}^{0(N)} - U_{jk}^{0(N-1)}\right| \leqslant \varepsilon,$$

где N — номер приближения; ε — заданная точность вычислений. Приближенные значения U_{jk}^0 получают следующим образом.

С принятыми приближенными начальными условиями $\Im_i^0$ $(i = 6)$ интегрируют систему дифференциальных уравнений движения (II.4.76) для момента t_j измерения величины U_{jk}, в результате чего получают приближенные элементы $\bar{\Im}_i^0$ $(i = 6)$ для момента t_j, точно соответствующие принятым $\Im_i^0$. По значениям $\bar{\Im}_i^0$ вычисляют координаты и компоненты скорости ИСЗ и далее величины U_{jk}^0.

В результате всех вычислений получают поправки к элементам орбиты по формуле

$$\Im_i = \bar{\Im}_i^0 + \sum_1^N \Delta\Im_i^0. \qquad (II.4.122)$$

II.4.15. Движение спутника относительно вращающейся Земли

Формулы для вычисления координат подспутниковых точек следующие:

$$\varphi = \arcsin(\sin u \sin i);$$

$$\lambda = \Omega_0 + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} u \cos i) - S + \Delta\Omega \frac{t}{T}; \qquad (II.4.123)$$

$$S = S_0 + \omega_\oplus (t - t_{S_0}),$$

где Ω — начальное значение долготы восходящего узла; S — гринвичское звездное время; $\omega_\oplus = 7{,}2911 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли; $\Delta\Omega$ — прецессия орбиты за один оборот; t — время, прошедшее от некоторого начального момента, для которого задано значение Ω_0.

Семейство точек, координаты которых определяются по формулам (II.4.123), образует проекцию траектории спутника на поверхность Земли (трассу полета). Величины, входящие в формулы (II.1.123), вычисляют по формулам, приведенным ниже:

Круговая орбита, $e = 0$

$$u = 2\pi \frac{t - t_\Omega}{T}$$

$$\Delta\Omega = -\frac{2\pi}{\rho^2}\frac{\varepsilon}{\mu}\cos i = -A\frac{\cos i}{\rho^2}$$

$$\rho = \sqrt[3]{\mu\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

$$\varepsilon = 2{,}634 \cdot 10^{10}\ \text{км}^5/\text{с}^2$$

$$\mu = 3{,}986000 \cdot 10^5\ \text{км}^3/\text{с}^2$$

$$A = 4{,}15196 \cdot 10^5\ \text{км}^2$$

Эллиптическая орбита, $0 < e < 1$

$$u = \omega + v$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \frac{t - t\omega_0}{T}$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{p^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\mu}(5\cos^2 i - 1)$$

$$t = \tau + \frac{E - e\sin E}{n}$$

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}$$

$$e = \frac{r_a - r_\pi}{r_a + r_\pi}$$

$$\Delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\mu}\cos i = -A\frac{\cos i}{p^2}$$

$$p = a(1 - e^2) = \rho(1 + e\cos v)$$

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos v} = a(1 - e\cos E)$$

После того как по формуле (II.4.123) подсчитано значение λ_{I}, для каждого n-го витка имеем:

$$\lambda_n = \lambda_{\text{I}} - (n-1)\left(qT - d\frac{\cos i}{a^2}\right), \qquad \text{(II.4.124)}$$

где $q = 15{,}0411$ градус/ч, $d = -2{,}378 \cdot 10^7$ градус·км^2.

II.4.16. Определение условий видимости

Условия видимости ИСЗ. Для расчета условий видимости (рис. 63) можно применить формулы:

$$h = R_0\left[\frac{\cos\gamma}{\cos(\gamma + \beta)} - 1\right]; \qquad \text{(II.4.125)}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{R_0}{R_0 + h}\cos\gamma\right) - \gamma; \qquad \text{(II.4.126)}$$

$$h = R_0\left[\frac{\sin(\alpha' + \beta)}{\sin\alpha'} - 1\right]; \qquad \text{(II.4.127)}$$

$$\beta = \arcsin\left[\left(\frac{h}{R_0} + 1\right)\sin\alpha'\right] - \alpha'; \qquad \text{(II.4.128)}$$

$$\beta = 180° - \alpha' - \delta'; \qquad \text{(II.4.129)}$$

$$\delta' = \arcsin\left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)\sin\alpha'; \qquad \text{(II.4.130)}$$

$D \approx h\operatorname{tg}\alpha' = \pm 0{,}02D$ (для $h < 1000$ км, $\alpha' < 25°$).

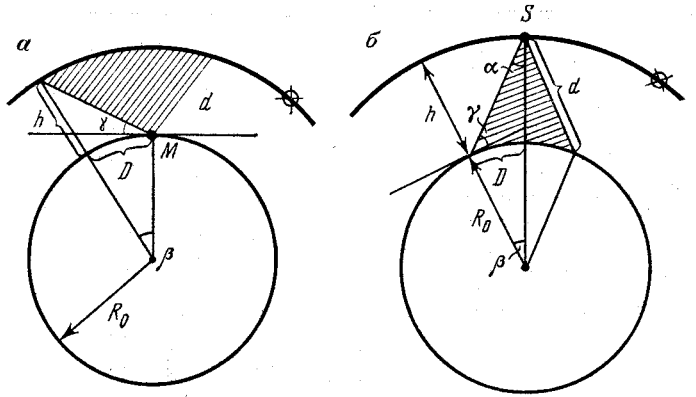


Рис. 63. Определение условий видимости ИСЗ:
а — зона видимости пункта *M*, *б* — зона видимости ИСЗ

Если имеется ограничение в работе аппаратуры по наклонной дальности d, то

$$\beta_{d_{\max}} = \arcsin\left(\frac{d}{R_0 + h}\cos\gamma_{d_{\min}}\right); \qquad \text{(II.4.131)}$$

$$h_{d_{\max}} = \left(R_0^2 + d^2 + 2R_0 d\sin\gamma_{d_{\max}}\right)^{1/2} - R_0. \qquad \text{(II.4.132)}$$

Видимость поверхности планеты со спутника. Пусть требуется определить участок орбиты спутника планеты, при движении на котором угол между планетоцентрическими направлениями спутник — Солнце не превышает заданной величины ψ. Такого рода задачу приходится, например, решать при фотографировании поверхности планеты с борта КА.

Граничные значения эксцентрической аномалии в этом случае определяются из уравнения

$$E = \tilde{\gamma} \pm \arccos\left[\frac{\beta e + \cos\psi}{\sqrt{(\beta + e\cos\psi)^2 + (1 - e^2)\xi^2}}\right], \qquad \text{(II.4.133)}$$

где

$$\operatorname{tg}\tilde{\gamma} = \frac{\xi\sqrt{1 - e^2}}{\beta + e\cos\psi};$$

$$\beta = \frac{X_\odot P_x + Y_\odot P_y + Z_\odot P_z}{\sqrt{X_\odot^2 + Y_\odot^2 + Z_\odot^2}};$$

$$\xi = \frac{X_\odot Q_x + Y_\odot Q_y + Z_\odot Q_z}{\sqrt{X_\odot^2 + Y_\odot^2 + Z_\odot^2}}.$$

Координаты Солнца могут быть взяты из Астрономического ежегодника, P_x, P_y, D_z, Q_x, Q_y, Q_z вычисляют по формулам (II.4.35).

Уравнение (II.4.133) имеет решение для всех $\psi \leqslant \pi/2$, если

$$\frac{\beta e + \cos\psi}{\sqrt{(\beta + e\cos\psi)^2 + (1 - e^2)\xi^2}} \leqslant 1. \qquad \text{(II.4.134)}$$

Моменты, соответствующие граничным значениям эксцентрической аномалии, равны

$$t_i = \frac{E_i - e \sin E_i}{n} + \tau. \qquad \text{(II.4.135)}$$

Пребывание спутника в тени Земли. Наблюдения пассивных ИСЗ возможны только в том случае, когда они освещаются Солнцем. В связи с этим из рассмотрения следует исключить часть орбиты, находящуюся в тени Земли. Это имеет также значение при анализе условий, благоприятных для зарядки солнечных батарей. Подобная задача возникает также при учете влияния светового давления на движение ИСЗ.

Уравнение тени:

$$S^* = A_0 \cos^4 v + A_1 \cos^3 v + A_2 \cos^2 v + A_3 \cos v + A_4; \qquad \text{(II.4.136)}$$

$$A_0 = \left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^4 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2) e^2 + (\beta^2 + \xi^2)^2; \qquad \text{(II.4.137)}$$

$$A_1 = 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^3 - 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2) e; \qquad \text{(II.4.138)}$$

$$A_2 = 6\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e^2 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (\xi^2 - \beta^2) -$$

$$- 2\left(\frac{R}{p}\right)^2 (1 - \xi^2) e^2 + 2(\xi^2 - \beta^2)(1 - \xi^2) - 4\beta^2\xi^2; \qquad \text{(II.4.139)}$$

$$A_3 = 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^4 e - 4\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (1 - \xi^2) e; \qquad \text{(II.4.140)}$$

$$A_4 = \left(\frac{R_0}{p}\right)^4 - 2\left(\frac{R_0}{p}\right)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \xi^2)^2. \qquad \text{(II.4.141)}$$

При соблюдении условия

$$\beta \cos v + \xi \sin v = 0 \qquad \text{(II.4.142)}$$

спутник будет всегда освещен Солнцем. При входе в тень S^* меняет знак минус на плюс, при выходе из тени — плюс на минус. Приведенные формулы не учитывают сжатия Земли и ее движение по орбите. Моменты входа в тень и выхода из нее вычисляются по формуле (II.4.135).

Время пребывания в тени Земли

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{fM_\oplus}} [E_2 - E_1 + e(\sin E_1 - \sin E_2)], \qquad \text{(II.4.143)}$$

причем

$$\sin E = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \sin v}{1 + e \cos v}; \quad \cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v}.$$

В. НАБЛЮДЕНИЯ ИСЗ

II.4.17. Методы наблюдений ИСЗ

Методы наблюдений ИСЗ можно подразделить на оптические и радиоэлектронные. К оптическим методам относятся визуальные, фотографические, фотоэлектрические и лазерные наблюдения. К радиоэлектронным относятся интерференционные, доплеровские и дальномерные методы. Кроме того, существуют комбинированные методы радиоэлектронных наблюдений.

Визуальные наблюдения не обеспечивают точности, достаточной для использования результатов этих наблюдений в геодезических целях.

В 60-х годах широкое распространение имели фотографические наблюдения ИСЗ, так как в то время ни один другой метод не мог с ними конкурировать по точности. В дальнейшем на первое место выдвинулись доплеровские и лазерные наблюдения. На основе этих наблюдений решают не только геодезические задачи, но также проблемы геодинамики и астрометрии. Точность лазерных и доплеровских наблюдений непрерывно повышается. Вместе с тем фотографические наблюдения продолжают использоваться при решении геометрических и динамических задач космической геодезии. Их особая ценность состоит в том, что они обеспечивают ориентирование космических геодезических построений.

Фотографические наблюдения документальны, позволяют, в случае необходимости, многократно повторять измерения. Положения ИСЗ на снимке определяются путем привязки к опорным звездам в системе некоторого фундаментального каталога.

Масштаб фотографического изображения (в″/мм)

$$m = 206\,265 \frac{1}{F}, \qquad \text{(II.4.144)}$$

размеры поля зрения (в градусах)

$$2\sigma = 57{,}3 \frac{a}{F}, \qquad \text{(II.4.145)}$$

где a — сторона снимка.

Зависимость между угловым расстоянием σ от звезды (или спутника) до проекции оптического центра на небесную сферу и линейным расстоянием s от изображения звезды до оптического центра снимка выражается законом тангенса (в идеальном случае):

$$s = F \operatorname{tg} \sigma. \qquad \text{(II.4.146)}$$

Закон тангенса выполняется только приближенно из-за влияния ошибок объектива, дифференциальной рефракции, дифференциальной аберрации, атмосферной дисперсии, внешней среды, уравнения яркости. С учетом влияния дисторсии вместо формулы (II.4.146) имеем

$$s = F \operatorname{tg} \sigma + \nu_1 \operatorname{tg}^3 \sigma + \nu_2 \operatorname{tg}^5 \sigma + \ldots, \qquad \text{(II.4.147)}$$

где ν_i — коэффициенты дисторсии.

II.4.18. Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ

Камеры, используемые для наблюдений спутников (табл. 41), можно разделить на две группы. Камеры одной из этих групп не отслеживают движение спутника. Они могут иметь азимутальную или экваториальную монтировку. Вторую группу образуют следящие камеры. Эти камеры имеют трехосную или четырехосную монтировку. Как правило, неследящие камеры более портативные и дешевые.

Следует отметить, что с принципиальной точки зрения отслеживание движения ИСЗ и тем самым интегрирование световой энергии в определенной точке фотографической пластинки (пленки) может осуществляться в разных камерах одним из следующих методов: 1) отслеживание спутника по малому кругу путем перемещения камеры (четырехосная монтировка); 2) отслеживание спутника по большому

ТАБЛИЦА 41

Название камеры	Страна-изготовитель	Монтировка	Фокусное расстояние, см	Действующее отверстие объектива, см	Поле зрения, градус	Фотоматериал и размеры снимка, мм	Масштаб в центре снимка, угл. с/мм	Достигнутая точность, угл. с
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Неследящие камеры								
MOTS-40	США	Двухосная	101,6	20,3	10×10	Пластинка 203×254	202	2
PC-1000	США	»	~100	~21	10×10	Пластинка 215×190	206	1—2
IGN-1964	Франция	»	30	6,7	35×35	Пластинка	685	2—4
Wild BC-4	Швейцария	»	45	11,5	25×25	Пластинка	460	
			30,4	11,5	35×35	Пластинка 215×190	675	2
ВМК А 30/23	ФРГ	»	46,3	23	30×30	Пластинка	445	
Хьюита	Англия	»	91,5	14,8	14×14	Пластинка	225	1
Познань-2	ПНР	»	100	~14	8×6		206	
Следящие								
АФУ-75	СССР	Четырехосная	75	21	15×10	Пленка	275	~1
ВАУ	СССР	Трехосная	70	50	30×5	Пленка	294	~1
Baker-Nunn	США	Трехосная	53,5	53,5	35×5	Пленка 56×300	385	2
SBG	ГДР	Четырехосная	76	42,5	6×6	Пластинка	260	1—2
Antares	Франция	Трехосная	90	30	11×11	Пластинка	229	2

кругу путем перемещения камеры (трехосная монтировка); 3) отслеживание путем использования плоскопараллельной пластинки; 4) отслеживание путем перемещения кассеты или пленки.

Совершенно очевидно, что следящие камеры позволяют фотографировать более слабые спутники, а также получать большее количество снимков за одно прохождение.

Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ снабжены специальными затворами, при помощи которых задается необходимая продолжительность экспозиции, многие из них имеют обтюраторы для прерывания следов спутника и звезд на фотопленке (фотопластинке) с целью привязки наблюдений к шкале времени.

Турбулентные явления в атмосфере вряд ли позволят получить из фотографических наблюдений направления с точностью, превышающей 0,4—0,5″. По этой причине фотографические наблюдения не могут конкурировать по точности с доплеровскими и лазерными наблюдениями.

II.4.19. Порядок вычисления топоцентрических координат ИСЗ по результатам фотографических наблюдений

1. Отождествление звезд на снимке выполняется с помощью звездных атласов, например Бечваржа.

2. Из звездного каталога выписываются координаты опорных звезд α_i и δ_i. Используются каталоги FK-4, AGK-3, звездные каталоги SAO, GC и др.

3. Координаты α_i, δ_i приводятся от эпохи каталога на момент наблюдений и исправляются поправками за годичную аберрацию и рефракцию.

4. Координаты оптического центра снимка A_0 и D_0 определяют, используя координаты опорных звезд и оценивая по ним положение геометрического центра. Взаимное положение оптического и геометрического центров должно быть известно из специальных исследований.

5. С помощью координатной измерительной машины измеряют на снимке прямоугольные координаты звезд x_i, y_i и спутника x_c, y_c и исправляют их за ошибки прибора.

6. Переходят от экваториальных координат звезд к их идеальным координатам ξ_i, η_i:

$$\xi_i = \frac{\cos q_i \operatorname{tg}(\alpha_i - A_0)}{\cos(q_i - D_0)}; \qquad \text{(II.4.148)}$$

$$\eta_i = \operatorname{tg}(q_i - D_0), \qquad \text{(II.4.149)}$$

где

$$\operatorname{ctg} q_i = \operatorname{ctg} \delta_i \cos(\alpha_i - A_0). \qquad \text{(II.4.150)}$$

7. Составляют для звезд уравнения вида (способ Тернера)

$$\begin{aligned} \xi_i - x_i &= ax_i + by_i + c; \\ \eta_i - y_i &= dx_i + ey_i + f, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.151)}$$

где a, b, c, d, e, f — постоянные снимка, которые необходимо найти из решения уравнений (II.4.151) или составленных на их основе нормальных уравнений при числе звезд более трех. Если точность, получаемая из решения уравнений (II.4.151), недостаточна, то учитываются члены второго порядка (обобщенный способ Тернера):

$$\begin{aligned} \xi_i - x_i &= ax_i + by_i + c + a'x_i^2 + b'x_iy_i + c'y_i^2; \\ \eta_i - y_i &= dx_i + ey_i + f + d'x_i^2 + e'x_iy_i + f'y_i^2. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.152)}$$

8. Учет дисторсии производится с помощью следующих формул:

$$\Delta x = -c\,(x - x_0)\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2];$$
$$\Delta y = -c\,(y - y_0)\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \qquad \text{(II.4.153)}$$

где x_0, y_0 — координаты оптического центра снимка; x, y — координаты звезд (спутника); $c = \nu_1 F^{-3}$; ν_1 — коэффициент дисторсии.

9. Составляют уравнения для спутника:

$$\xi_c = x_c + ax_c + by_c + c;$$
$$\eta_c = y_c + dx_c + ey_c + f, \qquad \text{(II.4.154)}$$

решая их, можно найти его идеальные координаты, так как постоянные a, b, c, d, e, f определены раньше.

10. Вычисляют топоцентрические экваториальные координаты спутника:

$$\operatorname{ctg}\delta_c \sin(\alpha_c - A_0) = \frac{\xi_c \sec D_0}{\eta_c + \operatorname{tg} D_0};$$
$$\operatorname{ctg}\delta_c \cos(\alpha_c - A_0) = \frac{1 - \eta_c \operatorname{tg} D_0}{\eta_c + \operatorname{tg} D_0}. \qquad \text{(II.4.155)}$$

Обычно при обработке фотографических наблюдений ИСЗ в качестве опорных используется от 8 до 14 звезд.

Для обработки фотографических наблюдений ИСЗ применяется также фотограмметрический способ (при широких полях изображения). При этом используется значительное количество опорных звезд (около 100), большое количество изображений спутника, одновременно определяются элементы внешнего и внутреннего ориентирования камеры и некоторые дополнительные параметры (поправка к принятому значению фокусного расстояния, масштабные коэффициенты шкал измерительного прибора μ_x, μ_y, коэффициенты радиальной C_i и тангенциальной K_i дисторсии и др.).

Связь между измеренными и идеальными координатами в фотограмметрическом способе выражается уравнениями:

$$\frac{x}{F_0} = \xi(A,\ D,\ \varkappa) + \{a + \mu_0\xi + \Delta\mu\xi + (C_1 r^2 + C_2 r^4 + \cdots)\,\xi + K_1 r^2 + \cdots\}; \qquad \text{(II.4.156)}$$

$$\frac{y}{F_0} = \eta(A,\ D,\ \varkappa) + \{b + \mu_0\eta + \Delta\mu\eta + i\xi + (C_1 r^2 + C_2 r^4 + \cdots)\,\eta + K_2 r^2 + \cdots\}, \qquad \text{(II.4.157)}$$

где a, b — координаты оптического центра в системе измеренных координат; i — угол между осью x координатной системы измерительного прибора и осью x', которая перпендикулярна к оси y координатной системы измерительного прибора; A, D, $\varkappa$ — элементы внешнего ориентирования; $\mu_0 = \Delta F/F_0 + C_0 + (\mu_x + \mu_y)/2$, $\Delta\mu = (\mu_x - \mu_y)/2$.

Линеаризация уравнений (II.4.156), (II.4.157) приводит к уравнениям поправок, в которых неизвестными будут ΔA, ΔD, $\Delta\varkappa$, a, b, μ_0, $\Delta\mu$, i, C_1, C_2, ..., K_1, K_2 ..., а свободные члены

$$l_\xi = \xi_0 - x/F_0; \quad l_\eta = \eta_0 - y/F_0. \qquad \text{(II.4.158)}$$

Измерения астрофотографий выполняются с помощью координатно-измерительных машин типа КИМ-3, СИП-5, УИМ-21, Ascorecord и т. д. Координаты на пластинках измеряют с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой 1,0—1,5 мкм, а на пленке — 2,5—3,0 мкм.

II.4.20. Влияние аберрации и рефракции

Учет влияния аберрации. Поправки в координаты спутника в угл. с за аберрацию (спутниковую) вычисляют по формулам:

$$\Delta\alpha = \frac{V\cos\theta\cos\Phi}{c\cos\delta}\,206\,265; \qquad \text{(II.4.159)}$$

$$\Delta\delta = \frac{V\cos\theta\sin\Phi}{c}\,206\,265; \qquad \text{(II.4.160)}$$

$$\Delta z = \frac{V\cos\theta\cos(Q+q)}{c}\,206\,265; \qquad \text{(II.4.161)}$$

$$\Delta A = \frac{V\cos\theta\sin(Q+q)}{c\sin z}\,206\,265. \qquad \text{(II.4.162)}$$

В формулах (II.4.159)—(II.4.162) V — скорость движения ИСЗ по отношению к наблюдателю; c — скорость света. Углы Φ и θ изображены на рис. 64.

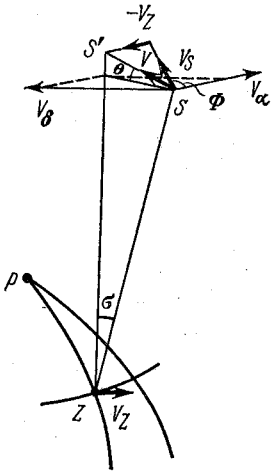


Рис. 64. Влияние на координаты ИСЗ спутниковой аберрации

Спутниковая рефракция

$$r_c = r_* - \Delta r, \qquad \text{(II.4.163)}$$

где r_* — астрономическая рефракция; Δr — рефракционный параллакс;

$$\Delta r = k_3 \frac{1}{s}\operatorname{tg} z \sec z\,[1 + k_4(2\sec^2 z + \operatorname{tg}^2 z)\,(1 - e^{-0{,}1385h})], \qquad \text{(II.4.164)}$$

здесь s — расстояние до спутника; $k_3 = 435{,}0\ ''/\text{км}$, $k_4 = -0{,}00113''/\text{км}$, e — основание натуральных логарифмов, h — высота спутника над станцией.

Если $h \geqslant 1000$ км, $z \leqslant 45°$, то

$$\Delta r \cong 206\,265\frac{2{,}33}{h}\operatorname{tg} z. \qquad \text{(II.4.165)}$$

Поправки в координаты спутника за рефракционный параллакс вычисляют по формулам:

$$\Delta r_\alpha = -\Delta r \sec\delta' \sin q, \qquad \text{(II.4.166)}$$
$$\Delta r_\delta = -\Delta r \cos q. \qquad \text{(II.4.167)}$$

II.4.21. Радиоэлектронные методы наблюдений ИСЗ

Радиоэлектронные методы, используемые для наблюдений спутников, подразделяют на интерференционные, доплеровские и дальномерные. В радиоинтерферометре измеряется разность фаз сигналов от спутника, которые принимаются на Земле в один и тот же момент двумя разнесенными антеннами. В доплеровском методе измеряют разность частоты, принимаемой на станции, и стандартной частоты. При измерении расстояний сигнал, посылаемый станцией, моду-

лируется по фазе. Сигнал принимается импульсным приемопередатчиком спутника, который ретранслирует его как фазовую модуляцию с измененной несущей частотой. Наземные станции принимают сигнал. На них измеряют фазовый сдвиг модуляции фазометром и далее пересчитывают его в расстояние.

Для решения задач космической геодезии применяется преимущественно эффект Доплера, поскольку соответствующая аппаратура является наиболее простой и обеспечивающей более высокую точность, чем метод радиоинтерферометра или непосредственное измерение расстояний. Доплеровская установка состоит из приемника транслируемой спутником частоты, высокостабильного наземного генератора частоты и регистрирующих устройств.

Принятая приемником частота сравнивается с частотой наземного генератора и из их разности выделяется доплеровский сдвиг частот Δf за достаточно малый интервал времени $\Delta\tau$. Сдвиг частоты пропорционален изменению расстояния до ИСЗ за интервал времени $\Delta\tau$:

$$\Delta r' = c\,\Delta f/f, \qquad \text{(II.4.168)}$$

где c — скорость распространения радиоволн; f — частота, относительно которой измеряется доплеровский сдвиг Δf.

Таким образом, доплеровские системы позволяют получить разность расстояний до ИСЗ.

Если значение доплеровского сдвига отнесено к среднему моменту, то доплеровская система дает возможность определить радиальную составляющую топоцентрической скорости ИСЗ ($\dot{r}'$)

$$\dot{r}' = \frac{c}{f\,\Delta\tau}\,\Delta f. \qquad \text{(II.4.169)}$$

Точность измерений доплеровскими системами зависит от полноты учета условий распространения радиоволн, стабильности частот генераторов и точности счетчиков. В настоящее время точность определения $\dot{r}'$ составляет 0,01 м/с.

II.4.22. Лазерные наблюдения ИСЗ

Лазерные установки используются для измерения расстояний до ИСЗ, а также для освещения ИСЗ при его фотографировании на фоне звездного неба, в последнем случае мощность излучения должна быть намного выше.

Лазерные установки для наблюдений ИСЗ состоят из лазерного передатчика (применяются, например, рубиновые лазеры с $\lambda = 0{,}694$ мкм), приемного устройства, платформы, системы измерения и регистрации результатов. Процесс измерений заключается в фиксации времени прохождения светового импульса до ИСЗ и обратно.

В момент выхода лазерного импульса с передатчика начинает работать счетчик циклов частоты 100 МГц или 1 ГГц, который выключается в момент поступления в приемник отраженного импульса, что дает возможность определить интервал времени $\Delta\tau$ прохождения светового импульса от установки до ИСЗ и обратно. Зная скорость распространения света c, можно рассчитать расстояние до ИСЗ (r'):

$$r' = c\Delta\tau/2. \qquad \text{(II.4.170)}$$

Дальность действия лазерной дальномерной системы пропорциональна четвертой степени излучаемой энергии, обратно пропорциональна квадратному корню из ширины луча и прямо пропорциональна квадратному корню из диаметра апертуры приемника.

Расходимость (ширина) лазерного луча устанавливается в зависимости от точности эфемерид и точности наведения лазера, и в настоящее время лазерные установки имеют расхождение луча от 0,5 до 20′. Выходная мощность лазера колеблется в пределах от 10 до 50 Мвт, длительность импульса — от 10 до 60 нс и энергия в импульсе — от 0,5 до 7,5 Дж.

Точность измерения расстояний лазерными системами определяется длительностью и крутизной фронта возвращенного сигнала, разрешающей способностью счетчика для регистрации интервалов времени, а также точностью учета изменения скорости света в атмосфере.

При повышении мощности и сокращении длительности импульса достигается соответствие посланного и возвращенного импульсов, что может обеспечить измерение расстояний с точностью до 0,6 м.

Ошибка лазерного метода определения расстояний до ИСЗ 0,6—0,7 м может быть достигнута при точном учете температуры и давления, так как в этом случае влияние атмосферы приводит к ошибке, не превышающей 0,2 м.

II.4.23. Предварительная обработка радиоэлектронных и лазерных наблюдений

Со счетчиков доплеровской аппаратуры получают числовые характеристики, соответствующие доплеровскому сдвигу частоты за определенный интервал времени. Сдвиг частоты пропорционален разности расстояний до спутника в начале интервала времени и в его конце.

Предварительная обработка доплеровских измерений сводится к вычислению по снятым со счетчиков значениям числовых характеристик n разности расстояний $\Delta r' = r'_1 - r'_2$ за соответствующий мерный интервал $\Delta\tau$ или вычислению радиальной скорости $\dot{r}'$, которая получается делением разности дальностей на счетный интервал $\Delta\tau$. Поскольку изменение радиальной скорости за интервал $\Delta\tau$, вообще говоря, нелинейно, полученное таким образом значение не будет соответствовать середине интервала и его нужно редуцировать к моменту $t_0 + \tau/2$.

Значения $\Delta r'$ и $\dot{r}'$ исправляются поправками за рефракцию радиолуча в ионосфере, тропосфере и за релятивистский эффект. Поправками за рефракцию в тропосфере и релятивистским эффектом обычно пренебрегают, а для исключения ионосферной рефракции прием сигналов осуществляется на двух когерентных частотах.

В приемной аппаратуре принятые частоты выравниваются, и на регистрирующее устройство подается смешанная частота, свободная от влияния ионосферной рефракции.

Помимо указанных поправок в результаты доплеровских измерений вводится поправка ΔF за счет так называемой ошибки «частотной подставки», возникающей вследствие нестабильности работы генераторов.

Непосредственным результатом лазерных измерений является значение расстояния r' до ИСЗ, отнесенное к некоторым стандартным значениям температуры T_0 и давления атмосферы P_0, поэтому в измеренные расстояния вводится поправка δr (за отклонения $\Delta T = T - T_0$ и $\Delta P = P - P_0$ реальных значений температуры T и давления P от стандартных) по формуле

$$\delta r = \frac{a + b\,\Delta P/\Delta T + cH}{\cos z + 0{,}001\,\mathrm{tg}\,z}, \qquad \text{(II.4.171)}$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты; T, P — температура и давление, определенные в момент измерений с точностью до 0,1°, 26,6 Па

(0,2 мм рт. ст.); z — зенитное расстояние ИСЗ; H — высота пункта над уровнем моря. Кроме того, в измеренную дальность вводятся поправки за аппаратурные задержки.

II.4.24. Геодезические искусственные спутники Земли (ГИСЗ) и требования к параметрам их орбит

Для геодезических целей в принципе могут использоваться различные ИСЗ. Однако наиболее ценные для геодезии и смежных с ней отраслей знаний данные могут быть получены в результате наблюдений специальных геодезических спутников.

Спутник может быть использован для целей геодезии, если он отвечает определенным требованиям. Такой спутник должен иметь:

1) правильную форму, лучше близкую к сферической; 2) поверхность, характеризующуюся большим коэффициентом отражения (для пассивных ИСЗ); 3) возможно большее отношение массы к площади поперечного сечения; 4) ограниченные определенными пределами параметры орбиты; 5) специальное бортовое оборудование (для активных ИСЗ).

Исключение составляют спутники-баллоны, для которых характерна малая величина отношения массы к поверхности и которые могут использоваться только при синхронных или квазисинхронных наблюдениях, когда не требуется знать точно геоцентрические координаты спутника.

Используемые для целей геодезии спутники должны иметь орбиты с эксцентриситетом 0,02—0,05 и, как правило, не более 0,1. Высота перигея орбиты должна заключаться между 1000—4000 км. Она не должна быть менее 500—800 км, так как в этом случае возникают существенные трудности при учете сопротивления атмосферы; кроме того, для обеспечения одной и той же территории при малой высоте спутника требуется большее число станций наблюдений. Наконец, чем меньше высота спутника, тем больше его видимая скорость, что осложняет производство наблюдений.

Недопустимо и значительное увеличение высоты перигея, так как при этом действие отдельных гармоник гравитационного поля Земли на движение ИСЗ начинает сглаживаться и спутник становится мало пригодным для динамических исследований, усиливается гравитационное действие Луны и Солнца и осложняется учет этих влияний.

При решении геометрических задач для обеспечения большей территории целесообразно использовать спутники с большими наклонениями (60—80°). Решение динамических задач требует использования ИСЗ с разными параметрами орбит и в первую очередь с разными высотами и наклонениями.

На борту геодезического спутника может находиться следующее оборудование: импульсные источники света (оптические маяки или лампы-вспышки), обеспечивающие освечивание на уровне 3500—15 000 кд·с, радиотехническое оборудование для доплеровских наблюдений, для измерения наклонных дальностей, для применения интерференционного метода, уголковые отражатели (трипельпризмы) для использования лазеров, радиовысотомер, кварцевые или атомные часы, специальная бортовая ЭЦВМ, фотокамеры для съемки земной поверхности или поверхности планеты и для съемки звездного неба.

Для обеспечения обзора поверхности всей Земли должно соблюдаться условие

$$\frac{\pi}{2} - \frac{l}{R_0}(1-k') \leqslant i \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{l}{R_0}(1-k'), \quad \text{(II.4.172)}$$

где R_0 — средний радиус Земли; $2l$ — ширина зоны обзора бортовой аппаратуры, причем

$$l = \frac{\pi R_0}{90^\circ}\left[\arcsin\left(\frac{\rho}{R_0}\sin\alpha\right) - \alpha\right]; \qquad \alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{R_0}{\rho}\cos h\right). \quad \text{(II.4.173)}$$

В приведенных формулах α — половина угла поля зрения со спутника, ρ — геоцентрический радиус-вектор спутника, k' — коэффициент, выражающий заданный процент перекрытия.

Для обеспечения наблюдений пунктов с заданной широтой следует выполнить условие

$$\pi - \varphi + \frac{l}{R_0}(1-k') \geqslant i \geqslant \varphi - \frac{l}{R_0}(1-k'). \quad \text{(II.4.174)}$$

Появление спутника над пунктом с заданной широтой в одно и то же время возможно при соблюдении равенства (без учета возмущений)

$$i = \arccos\frac{2\pi T}{T_\Gamma c}, \quad \text{(II.4.175)}$$

где T_Γ — продолжительность тропического года (365, 2422 средних солнечных суток);

$$c = \frac{-(2\pi)^{7/3}\varepsilon}{(1-e^2)\,T\sqrt[3]{T}\,(fM_\oplus)^{5/3}}; \qquad \varepsilon = fM_\oplus R_0^2\left(\alpha - \frac{\omega_\oplus^2 R_0}{2\gamma_e}\right). \quad \text{(II.4.176)}$$

Обеспечение последовательного перекрытия полос обзора за заданное число суток достигается при условии

$$\omega_\oplus T + \frac{(2\pi)^{7/3}\varepsilon\cos i}{(fM_\oplus)^{5/3}(1-e^2)^2 T^{4/3}} = \frac{2\pi k_c}{1+(n_c-1)k_c}, \quad \text{(II.4.177)}$$

где n_c — целое число витков в течение звездных суток; k_c — число суток, через которое обеспечивается совпадение полос обзора для одного ИСЗ, $k_c = \eta/l$, η — смещение проекции орбиты вследствие вращения Земли за один оборот спутника.

Долгота n-го витка при $e \leqslant 0{,}06$ вычисляется по формуле (II.4.142).

Значение периода T, при котором спутник пройдет через заданную долготу λ_n, равно

$$T = \frac{1}{\omega_\oplus}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n + 360^\circ N_c}{n-1} + d_1\frac{\cos i}{a^2}\right). \quad \text{(II.4.178)}$$

Число витков n, которое должен совершить спутник при заданном T, чтобы попасть в район заданной долготы,

$$n = \frac{\lambda_1 - \lambda_n + 360^\circ N_c}{\omega_\oplus T - d_1\dfrac{\cos i}{a^2}}. \quad \text{(II.4.179)}$$

Если n — нецелое число, а n^* — ближайшее целое, то

$$\lambda_n - \lambda_n^* = (n-n^*)\left(\omega_\oplus T - d_1\frac{\cos i}{a^2}\right). \quad \text{(II.4.180)}$$

В приведенных формулах N_c — сутки полета, n — номер витка, скорость вращения Земли $\omega_\oplus = 0{,}25068447$ градус/мин, $d_1 = -2{,}3784766 \cdot 10^7$ градус·км^2.

Г. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

II.4.25. Космические геодезические сети

К о́ с м и ч е с к а я т р и а н г у л я ц и я — геометрическое построение, основанное на определении взаимного положения пунктов по синхронно наблюденным на них мгновенным положениям ИСЗ. Таким образом, при создании космической триангуляции спутник является промежуточной высокой визирной целью.

При создании космической триангуляции наблюдения пассивных ИСЗ ведутся синхронно, однако нет необходимости в строгой одновременности фотографирования, так как достаточно организовать перекрытие по времени на двух или более станциях, участвующих в наблюдениях.

В результате фотографирования пассивных ИСЗ получаются снимки, содержащие по десяти и более точечных изображений спутника в перекрывающемся интервале времени τ. Каждому изображению спутника соответствует зарегистрированное время T_i. Далее последовательно определяют периоды перекрытий и средний момент перекрытия T_0. Такие наблюдения называются к в а з и с и н х р о н н ы м и. Введение поправки за спутниковую аберрацию эквивалентно введению поправки в T_0, поэтому на каждом пункте вводится своя поправка в T_0 за аберрационное время

$$\Delta T_0 = -D/c, \tag{II.4.181}$$

где D — расстояние до ИСЗ; c — скорость света.

По моментам T_i и измеренным на снимках прямоугольным координатам x_i и y_i точечных изображений ИСЗ вычисляются координаты «фиктивной вспышки» (момента синхронизации), причем выполняют интерполирование по методу наименьших квадратов с использованием полиномов третьей степени:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3; \\ y &= b_0 + b_1 T + b_2 T^2 + b_3 T^3. \end{aligned} \tag{II.4.182}$$

После определения коэффициентов a_i и b_i ($i = 1, 2, 3$) средний момент T_0 подставляют в (II.4.182) и находят координаты x_0 и y_0 «фиктивной вспышки» в момент синхронизации.

Синхронность наблюдений активных спутников обеспечивается фотографированием одних и тех же вспышек с разных пунктов.

II.4.26. Особенности построения космической триангуляции

В зависимости от назначения сетей космической триангуляции возможны три типа их построения:

1) построение отдельных фигур или засечек для определения уединенных пунктов (например, при привязке местных геодезических систем, разделенных морями, к единой (материковой) геодезической сети);

2) построение рядов для передачи системы координат на большие расстояния и для связи удаленных геодезических систем (например, европейской и австралийской триангуляций).

3) развитие сплошных сетей для обеспечения обширных территорий единой системой координат и создания сети пунктов с заданной плотностью.

Построение сетей космической триангуляции обладает двумя особенностями. Первая из них — все измерения в сетях космической триангуляции являются односторонними, поскольку с борта ИСЗ измерений не производится; вторая — положения ИСЗ получаются с гораздо меньшим весом, чем положения пунктов, поскольку каждое положение ИСЗ наблюдается лишь с нескольких (иногда двух) пунктов и притом однократно. Для определения положений пунктов в процессе длительных наблюдений накапливается большое количество избыточных измерений.

II.4.27. Основные элементы космической триангуляции

Выражая основное векторное уравнение космической геодезии (II.4.1) в проекциях на оси гринвичской системы координат, получим (при $\Delta\overline{R} = 0$):

$$\begin{aligned} X_k - X_i = \Delta X_{ik} &= r'_{ik} \cos\delta'_{ik} \cos\gamma'_{ik}; \\ Y_k - Y_i = \Delta Y_{ik} &= r'_{ik} \cos\delta'_{ik} \sin\gamma'_{ik}; \\ Z_k - Z_i = \Delta Z_{ik} &= r'_{ik} \sin\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{II.4.183}$$

где X_k, Y_k, Z_k — координаты пункта наблюдений; X_i, Y_i, Z_i — координаты ИСЗ; r'_{ik}, δ'_{ik}, γ'_{ik} — топоцентрические координаты ИСЗ, полученные по результатам наблюдений на пункте.

Из (II.4.183) следуют формулы для выражения измеренных величин r'_{ik}, δ'_{ik} и γ'_{ik} через неизвестные ΔX_{ik}, ΔY_{ik}, ΔZ_{ik}:

$$\begin{aligned} \gamma'_{ik} &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta Y_{ik}}{\Delta X_{ik}}; \\ \delta'_{ik} &= \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta Z_{ik}}{\sqrt{\Delta X_{ik}^2 + \Delta Y_{ik}^2}}; \\ r'_{ik} &= \sqrt{\Delta X_{ik}^2 + \Delta Y_{ik}^2 + \Delta Z_{ik}^2}. \end{aligned} \tag{II.4.184}$$

В случае применения радиотехнических систем, основанных на использовании эффекта Доплера, измеряются разности расстояний $\Delta r'_{ik_{1-2}}$ от пункта наблюдений до ИСЗ в двух (k_1, k_2) положениях:

$$\Delta r'_{ik_{1-2}} = \sqrt{\Delta X_{ik_1}^2 + \Delta Y_{ik_1}^2 + \Delta Z_{ik_1}^2} - \sqrt{\Delta X_{ik_2}^2 + \Delta Y_{ik_2}^2 + \Delta Z_{ik_2}^2}. \tag{II.4.185}$$

Основными элементами космической триангуляции являются: а) вектор, соединяющий пункт наблюдений и мгновенное положение ИСЗ; б) вектор, соединяющий два пункта наблюдений; в) плоскость, проходящая через два пункта наблюдений и мгновенное положение ИСЗ, называемая п л о с к о с т ь ю с и н х р о н и з а ц и и.

Если на пунктах производятся только фотографические наблюдения, то по ним можно определить лишь ориентировку указанных эле-

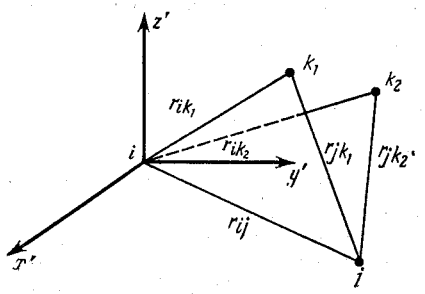


Рис. 65. Определение направления хорды, соединяющей пункты наблюдений i и j, из фотографических наблюдений ИСЗ

ментов в пространстве. Направление с пункта наблюдений на положение спутника определяется по результатам фотографических наблюдений δ'_{ik} и γ'_{ik} или по координатам орта вектора $\bar{r}'_{ik}$ (рис. 65):

$$\begin{aligned} l_{ik} &= \cos\delta'_{ik}\cos\gamma'_{ik};\\ m_{ik} &= \cos\delta'_{ik}\sin\gamma'_{ik};\\ n_{ik} &= \sin\delta'_{ik}. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.186)}$$

Если с пунктов i и j синхронно фотографируется ИСЗ, находящийся в точке k, то определяется плоскость синхронизации ijk, уравнение которой в векторной форме имеет вид

$$(\overline{R}_i - \overline{R}_j)\,\bar{r}^0_{ik}\bar{r}^0_{jk} = 0, \qquad \text{(II.4.187)}$$

где $\overline{R}_i$ и $\overline{R}_j$ — геоцентрические векторы пунктов наблюдений, а $\bar{r}^0_{ik}$ и $\bar{r}^0_{jk}$ — орты топоцентрических векторов соответственно с пункта i и пункта j.

Уравнение (II.4.187) в координатной форме имеет вид

$$A_k\,\Delta X_{ij} + B_k\,\Delta Y_{ij} + C_k\,\Delta Z_{ij} = 0, \qquad \text{(II.4.188)}$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= m_{ik}n_{jk} - m_{jk}n_{ik};\\ B_k &= l_{jk}n_{ik} - l_{ik}n_{jk};\\ C_k &= m_{jk}l_{ik} - m_{ik}l_{jk}. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.189)}$$

Направляющие косинусы орта $\bar{r}^0$, перпендикулярного к плоскости синхронизации, получаются в виде

$$l = A_k/\sin\beta_k;\ m = B_k/\sin\beta_k;\ n = C_k/\sin\beta_k, \qquad \text{(II.4.190)}$$

где β — угол засечки ИСЗ с пунктов i и j, причем

$$\beta_k = \arccos\left(l_{ik}l_{jk} + m_{ik}m_{jk} + n_{ik}n_{jk}\right). \qquad \text{(II.4.191)}$$

Если с пунктов i и j синхронно наблюдались два положения ИСЗ ($k = 1, 2$), то определяются две плоскости синхронизации (см. рис. 65) ijk_1 и ijk_2, пересекающиеся по хорде $\bar{r}_{ij}$, соединяющей пункты i и j.

При этом направление хорды $\bar{r}_{ij}$ определится как векторное произведение ортов $\bar{r}^0_1$ и $\bar{r}^0_2$, нормальных к плоскостям синхронизации,

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}^0_1 \times \bar{r}^0_2, \qquad \text{(II.4.192)}$$

а направляющие косинусы хорды $\bar{r}_{ij}$ получатся из выражений:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= Q\,(B_1C_2 - C_1B_2);\\ M_{ij} &= Q\,(C_1A_2 - C_2A_1);\\ N_{ij} &= Q\,(A_1B_2 - A_2B_1), \end{aligned} \qquad \text{(II.4.193)}$$

где

$$Q = \frac{1}{\sin\psi\sin\beta_1\sin\beta_2},$$

здесь ψ — угол между плоскостями синхронизации.

Направление хорды можно также задать двумя углами (по аналогии с δ и γ), один из которых характеризует наклон хорды к плоскости экватора (угол Φ), другой — есть угол между проекцией хорды на плоскость экватора и осью OX (угол Λ):

$$\Lambda_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{L}\right)_{ij}; \qquad \text{(II.4.194)}$$

$$\Phi_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{\sqrt{M^2 + L^2}}\right)_{ij}. \qquad \text{(II.4.195)}$$

II.4.28. Виды условий, возникающих в сетях космической триангуляции

В космической триангуляции направления между пунктами получаются независимо друг от друга в единой звездной системе координат, поэтому в сетях космической триангуляции не возникает условий сумм и азимутов, но, как и в обычной триангуляции, в них могут быть полюсные, базисные и координатные условия.

Помимо указанных возникают специфические условия, присущие только пространственным сетям, — компланарности трех векторов, пучка плоскостей и связки плоскостей.

Условие компланарности трех топоцентрических векторов $\bar{r}'_1$, $\bar{r}'_2$, $\bar{r}'_3$

$$\bar{r}'_1\bar{r}'_2\bar{r}'_3 = 0 \qquad \text{(II.4.196)}$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} l_{1.2} & m_{1.2} & n_{1.2}\\ l_{1.3} & m_{1.3} & n_{1.3}\\ l_{2.3} & m_{2.3} & n_{2.3} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II.4.197)}$$

Это условие является основным в космической триангуляции и возникает вследствие синхронности наблюдений одного положения ИСЗ с двух пунктов.

Условие пучка плоскостей. Это условие заключается в том, что, строго говоря, все плоскости синхронизации для двух пунктов должны пересекаться по одной хорде. Две плоскости синхронизации должны пересекаться по хорде, соединяющей пункты наблюдения, каждая новая плоскость является избыточной и приводит к возникновению одного условия.

Если три плоскости заданы нормальными векторами $\overline{N}_1\,(A_1, B_1, C_1)$, $\overline{N}_2\,(A_2, B_2, C_2)$, $\overline{N}_3\,(A_3, B_3, C_3)$, где A, B, C — коэффициенты уравнений плоскостей, то смешанное произведение этих векторов

$$V = \overline{N}_1\overline{N}_2\overline{N}_3 \qquad \text{(II.4.198)}$$

выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_3$. Если плоскости образуют пучок, то параллелепипед вырождается в прямую и в этом случае $V = 0$. Таким образом, условие пучка трех плоскостей в координатной форме будет иметь вид

$$V = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(II.4.199)}$$

Условие связки плоскостей. Пересечение трех плоскостей определит точку в пространстве, любая дополнительная плоскость связки должна проходить через эту же точку, что приводит к условию связки плоскостей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(II.4.200)}$$

где A, B, C, D — соответственно коэффициенты и свободные члены уравнений плоскостей, образующих связку.

Дальнейшее увеличение фотографических синхронных наблюдений ИСЗ с пунктов i и j приводит к уточнению углов Ф и Λ, определяющих ориентацию хорды в пространстве.

II.4.29. Уравнивание космической триангуляции

Уравнивание космической триангуляции можно выполнять параметрическим, коррелатным способом и коррелатным способом с дополнительными неизвестными.

Коррелатный способ в данном случае является достаточно сложным и не находит практического применения, но введение дополнительных неизвестных может упростить составление условных уравнений.

Если каждое положение ИСЗ наблюдается только с двух пунктов, то все измеренные величины можно разделить на группы, каждая из которых относится к соответствующей хорде. Тогда уравнивание можно выполнить в два этапа. На первом этапе определяются значения неизвестных, характеризующие положение и ориентировку каждой из хорд. Далее, полагая в качестве измеренных величин ориентирующие углы хорд и их длины, полученные на первом этапе, уравнивают сети, составленные из хорд. При выполнении в сети только фотографических наблюдений этот метод получил название метода замыкающих направлений.

Наиболее общим и строгим является способ параметрического уравнивания, в котором определяются поправки к координатам пунктов наблюдения и мгновенным координтам ИСЗ, соответствующим синхронному моменту. При этом число нормальных уравнений будет $3(s + p)$, где s — число положений ИСЗ, p — число определяемых пунктов, причем, как правило, s существенно больше p.

Выражая результаты фотографических наблюдений δ'_{ik} и γ'_{ik} как функции координат пункта i и координат спутника k и линеаризируя эти функции, получим уравнения поправок в следующем виде:

$$v_{\gamma_{ik}} = a\xi_k + b\eta_k - a\xi_i - b\eta_i + l_{\gamma_{ik}}; \qquad \text{(II.4.201)}$$

$$v_{\delta_{ik}} = -c\xi_i - d\eta_i - e\zeta_i + c\xi_k + d\eta_k + e\xi_k + l_{\delta_{ik}}, \qquad \text{(II.4.202)}$$

где ξ_i, η_i, ζ_i — поправки к приближенным координатам пункта; ξ_k, η_k, ζ_k — поправки к приближенным координатам спутника.

Коэффициенты уравнений (II.4.201) и (II.4.202) определяются формулами:

$$a = -\frac{\sin\gamma'_{ik}}{r'^0_{ik}\cos\delta'_{ik}}; \quad d = -\frac{\sin\gamma'_{ik}\sin\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}};$$

$$b = \frac{\cos\gamma'_{ik}}{r'^0_{ik}\cos\delta'_{ik}}; \quad e = \frac{\cos\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}}; \qquad \text{(II.4.203)}$$

$$c = -\frac{\cos\gamma'_{ik}\sin\delta'_{ik}}{r'^0_{ik}},$$

а свободные члены

$$l_{\gamma_{ik}} = \gamma'^0_{ik} - \gamma'^{\text{изм}}_{ik}; \; l_{\delta_{ik}} = \delta'^0_{ik} - \delta'^{\text{изм}}_{ik}, \qquad \text{(II.4.204)}$$

где γ'^0_{ik} и δ'^0_{ik} — приближенные значения углов, точно соответствующие приближенным координатам пункта i и спутника k. Величины γ'^0_{ik} и δ'^0_{ik} вычисляются по формулам (II.4.184).

Веса измеренных величин определяются из выражений

$$p_\delta = \frac{c}{m''^2_\delta}; \qquad \text{(II.4.205)}$$

$$p_\gamma = \frac{c}{m''^2_\delta \sec^2\delta'},$$

если измерения в сети выполнялись однотипными установками, то $p_\delta = 1$ и $p_\gamma = \cos^2\delta'$.

В случае если лазерными или радиотехническими средствами измеряется расстояние r'_{ik}, то возникает уравнение поправок

$$v_{r_{ik}} = l_{ik}\xi_k + m_{ik}\eta_k + n_{ik}\zeta_k - l_{ik}\xi_i - m_{ik}\eta_i - n_{ik}\zeta_i + l_{r_{ik}}, \qquad \text{(II.4.206)}$$

где

$$l_{ik} = \frac{X'_k - X'_i}{r'_{ik}};$$

$$m_{ik} = \frac{Y'_k - Y'_i}{r'_{ik}}; \qquad \text{(II.4.207)}$$

$$n_{ik} = \frac{Z'_k - Z'_i}{r'_{ik}};$$

$$l_{r_{ik}} = r'^0_{ik} - r'^{\text{изм}}_{ik} =$$

$$= \sqrt{(X'^0_k - X'^0_i)^2 + (Y'^0_k - Y'^0_i)^2 + (Z'^0_k - Z'^0_i)^2} - r'^{\text{изм}}_{ik} \qquad \text{(II.4.208)}$$

и вес

$$p_r = m_\delta^2 r'^2 / m_r^2. \qquad \text{(II. 4.209)}$$

Для измеренных доплеровскими системами разностей расстояний $\Delta r = r'_{ik} - r'_{il}$ уравнение поправок будет иметь вид

$$v_{\Delta r} = -F\xi_i - G\eta_i - H\zeta_i + l_{ik}\xi_k + m_{ik}\eta_k + n_{ik}\zeta_k - l_{il}\xi_l - m_{il}\eta_l - n_{il}\zeta_l + l_{\Delta r}, \qquad \text{(II. 4.210)}$$

где

$$F = -l_{ik} + l_{il};$$
$$G = -m_{ik} + m_{il}; \qquad \text{(II. 4.211)}$$
$$H = -n_{ik} + n_{il};$$

вес

$$p_{\Delta r} = c/m_{\Delta r}^2. \qquad \text{(II. 4.212)}$$

При $c = m_\delta^2$

$$p_{\Delta r} = m_\delta^2/m_{\Delta r}^2. \qquad \text{(II. 4.213)}$$

II.4.30. Установление масштаба в космической триангуляции

При отсутствии линейных измерений в сетях, создаваемых путем исключительно фотографических наблюдений, в построения включают космические базисы, представляющие собой длины некоторых хорд, соединяющих пункты космической триангуляции. Эти длины получаются из комплекса высокоточных линейных и угловых измерений, выполненных на поверхности Земли, в сочетании с астрономическими и гравиметрическими определениями.

В этом случае в уравнивание также вводят уравнения поправок космических базисов; их вид аналогичен (II.4.206), но неизвестными будут поправки к координатам обоих пунктов наблюдения. Вес базисного уравнения поправок выводится из оценки точности соответствующих геодезических работ, выполненных при создании базиса.

Возможны также случаи, когда в качестве измеренных элементов в уравнивание вводятся углы Λ_{ij} и Φ_{ij}, определяющие направление хорды ij и полученные из обычной триангуляции. Тогда для углов Λ и Φ составляются уравнения поправок точно такие же, как и для углов γ'_{ik} и δ'_{ik}.

Для установления масштаба космических геодезических построений используются измеренные радиоэлектронными или лазерными методами расстояния пункт—спутник.

II.4.31. Орбитальный метод построения космических сетей

В основе орбитального метода лежит уравнение (II.4.8). Таким образом, орбитальный метод построения сетей заключается в одновременном определении элементов орбиты E_i, положения пункта $\overline{R}_k$ и поправок за перенос начала системы координат в центр масс Земли по совокупности измерений U_{ik}, выполняемых на пунктах наблюдений и связывающих мгновенное положение ИСЗ i с положением пункта наблюдений k.

Основные измерения на пунктах включают определения топоцентрических экваториальных координат α' и δ', расстояний r_{ik} и радиальных скоростей $\dot{r}_{ik}$. Линеаризация уравнений, связывающих измеренные

величины α', δ', $\dot{r}'$, $\dot{r}'$ с координатами ИСЗ и пункта наблюдений, приводит к уравнениям поправок:

$$v_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_k} \cdot \frac{\partial (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_k}{\partial (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_0} \cdot d \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}_0 -$$

$$- \frac{\partial U_{ik}}{\partial (X, Y, Z)_i} \cdot d \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i + L_{ik} = QR \cdot d \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} - S \cdot d \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_i + L_{ik}. \qquad \text{(II. 4.214)}$$

Матрица R производных от текущих значений координат и скорости по начальным условиям может быть вычислена численными методами.

Система уравнений вида (II.4.214) решается последовательными приближениями под условием $[pvv] = \min$, веса p уравнений поправок устанавливаются в соответствии с точностью измерений.

Для вычисления свободных членов L_{ik} в каждом приближении численно или аналитически интегрируется система дифференциальных уравнений движения в оскулирующих элементах (II.4.76) или в прямоугольных координатах с возможным в данное время учетом всех действующих на ИСЗ сил. По полученным в результате интегрирования значениям координат и скоростей ИСЗ вычисляются приближенные, но точно соответствующие принятым начальным условиям значения величин U_{ik}^0, после чего получают свободные члены

$$L_{ik} = U_{ik}^0 - U_{ik}^{\text{изм}}. \qquad \text{(II. 4.215)}$$

В случае когда необходимо отнести координаты к центру масс Земли, в уравнения (II.4.215) вводят соответствующие неизвестные δx, δy, δz, представляющие собой координаты центра референц-эллипсоида в абсолютной системе координат с началом в центре масс Земли.

Орбитальный метод может быть применен для определения параметров общего земного эллипсоида, установления связи между отдельными геодезическими системами, определения положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли.

Д. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

II.4.32. Сущность динамического метода

Геометрические методы космической геодезии позволяют определить относительное положение пунктов на поверхности Земли. Применяя динамические методы, получаем возможность определить координаты пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли, параметры ее гравитационного поля и уточнить значения элементов орбит спутников. Динамические методы дают информацию, необходи-

мую для изучения геодинамических явлений, получения геофизических выводов.

Основным уравнением динамического метода является уравнение (II.4.7). Возможно представление основного уравнения динамического метода в другой форме:

$$\bar{a} = \frac{\bar{x} - R_z(-S)P^{-1}\bar{u}}{|\bar{x} - R_z(-S)P^{-1}\bar{u}|}, \qquad \text{(II. 4.216)}$$

где u — координаты станции наблюдения в системе, жестко связанной с Землей и отнесенной к среднему полюсу; $\bar{x}$ — мгновенное положение спутника; R_z и P — матрицы вращения, причем

$$R_z = \begin{vmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \\ -x & y & 1 \end{vmatrix};$$

$\bar{a}$ — единичный вектор, полученный из наблюдений; x, y — координаты мгновенного полюса.

Положения спутника $\bar{x}$ являются функциями оскулирующих элементов орбиты

$$\bar{x} = \bar{x}(a,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ M). \qquad \text{(II. 4.217)}$$

Если учтено влияние всех факторов, кроме возмущений, обусловленных гравитационным полем Земли, и если для момента t_0 имеем a_0, e_0, ω_0, i_0, Ω_0, M_0, то вместо (II.4.217) получим

$$\bar{x} = \bar{x}(a_0,\ e_0,\ \omega_0,\ i_0,\ \Omega_0\ M_0,\ C_{nm},\ S_{nm}). \qquad \text{(II. 4.218)}$$

Принимая во внимание $\bar{u} = \bar{u}(X, Y, Z)$ и учитывая также (II.4.218), убеждаемся, что использование в качестве исходных уравнений вида (II.4.216) позволяет определить координаты пунктов, параметры гравитационного поля и элементы орбит спутников. В силу различного характера возмущений в элементах орбиты от зональной и долготной частей геопотенциала зональные гармоники часто определяют отдельно от тессеральных и секториальных.

II.4.33. Определение зональных гармоник

Для определения зональных гармоник гравитационного поля Земли используются вековые и долгопериодические возмущения в элементах орбиты спутника. Поскольку интегрирование при этом выполняется для значительных отрезков времени (месяц и более), пренебрегают действием тессеральных и секториальных гармоник, вызывающих короткопериодические возмущения. Подлежит учету влияние только отдельных тессеральных и секториальных гармоник, вызывающих так называемый резонансный эффект. При определении зональных гармоник можно обойтись приближенными значениями координат пунктов.

Исходным является представление гравитационного потенциала Земли в виде

$$V = \frac{fM_\oplus}{\rho}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^n P_n(\sin\Phi)\right]. \qquad \text{(II. 4.219)}$$

Полученные по результатам наблюдений возмущения элементов орбиты освобождают от влияния, обусловленного притяжением Солнца и Луны, сопротивлением атмосферы, световым давлением и резонансными эффектами. Должны также учитываться возмущения второго порядка, обусловленные J_2^2.

Четные зональные гармоники вызывают вековые возмущения в элементах Ω, ω и M. На практике для определения J_{2n}, как правило, используют вековые изменения $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$.

Гармоники с нечетными коэффициентами J_{2n+1} приводят к долгопериодическим возмущениям в Ω, ω, i, e; эти возмущения имеют период $2\pi/\omega_\oplus$.

Последовательность обработки при определении зональных гармоник заключается в следующем.

Для орбитальных дуг временной протяженностью 2—5 суток определяют из наблюдений средние элементы орбиты. Из средних элементов исключают значительные короткопериодические возмущения, используя приближенные значения гармонических коэффициентов $J_2^{(0)}$, $J_3^{(0)}$, ... Элементы орбиты представляют в виде соотношений:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \delta\Omega + \dot{\Omega}(T - T_0) + A_\Omega \cos\omega; \\ \omega &= \omega_0 + \delta\omega + \dot{\omega}(T - T_0) + A_\omega \cos\omega; \\ i &= i_0 + \delta i + A_i \sin\omega; \\ e &= e_0 + \delta e + A_e \sin\omega, \end{aligned} \qquad \text{(II. 4.220)}$$

где члены $\delta\Omega$, $\delta\omega$, δi, δe учитывают возмущения, вызванные сопротивлением атмосферы, световым давлением и притяжением Солнца и Луны. Из величины $\dot{\Omega}$ исключают также возмущения второго порядка, обусловленные J_2^2.

Величины $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ и A_Ω, A_ω, A_i выражают в виде линейных функций поправок к зональным гармоническим коэффициентам:

$$\begin{aligned} a_2\delta J_2 + a_4\delta J_n + \ldots + a_{2n}\delta J_{2n} &= \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_0 = l_\Omega; \\ a_3\delta J_3 + a_5\delta J_5 + \ldots + a_{2n+1}\delta J_{2n+1} &= A_e - A_{e_0} = l_e. \end{aligned} \qquad \text{(II. 4.221)}$$

Аналогично получают уравнение для $\dot{\omega}$ и для A_Ω, A_ω, A_i. Величины $\dot{\Omega}_0$ ... и A_{e_0} ... вычисляют по приближенным значениям гармонических коэффициентов $J_2^{(0)}$, $J_3^{(0)}$ ..., формулы для коэффициентов a_2, a_3, ... имеют вид:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2\pi n}{p^2}\left(\frac{3}{2}\cos i\right); \\ a_4 &= \frac{2\pi n}{p^4}\left[-\frac{15}{32}(2 + 3e^2)(3 - 7\cos^2 i)\cos i\right]; \\ a_6 &= \frac{2\pi n}{p^6}\left[-\frac{105}{1024}(5 - 30\cos^2 i + 33\cos^4 i)\times\right. \\ &\qquad \left.\times (8 + 40e^2 + 15e^4)\cos i\right]; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(II. 4.222)} \\ a_3 &= -\frac{\sin i}{2pJ_2}\eta^2; \end{aligned}$$

$$a_5 = -\frac{5\sin i \cdot D}{32p^3 J_2}\eta^2 (1 - 14\cos^2 i + 24\cos^4 i)(4 + 3e^2);$$

$$a_7 = -\frac{35\sin i \cdot D}{2048p^5 J_2}\eta^2 (5 - 135\cos^2 i + 49\cos^4 i - 429\cos^6 i) \times$$

$$\times (8 + 20e^2 + 5e^4).$$

где n — среднее движение ($n = dM/dt$); $\eta^2 = 1 - e^2$; $D = (1 - 5\cos^2 i)^{-1}$.

Уравнения вида (II.4.221) являются уравнениями поправок, которые решаются по методу наименьших квадратов. Веса уравнений определяются в зависимости от точности определения величин $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, A_Ω, A_ω, A_i, A_e и исходя из возможного влияния гармонических коэффициентов высших порядков, которые отбрасываются при ограничении рядов.

Поскольку в формулы (II.4.222) для коэффициентов входят тригонометрические функции наклонения $\cos i$ и $\sin i$, для уверенного определения зональных коэффициентов необходимо иметь набор орбитальных дуг с различными наклонениями и эксцентриситетами.

II.4.34. Определение тессеральных и секториальных гармоник

Точное определение тессеральных и секториальных гармонических коэффициентов по наблюдениям ИСЗ — задача более сложная, чем определение зональных коэффициентов, поскольку тессеральные и секториальные гармоники вызывают лишь короткопериодические возмущения элементов орбит. Периоды этих возмущений обычно составляют доли суток $24^h/m$ (здесь m — второй индекс гармонического коэффициента), а амплитуды не превышают 150 м. Тессеральные и секториальные гармоники, как отмечалось выше, определяют отдельно от зональных.

Малые амплитуды этих возмущений приводят к тому, что при определении тессеральных и секториальных коэффициентов необходимо иметь частую и равномерно распределенную вдоль орбиты систему наблюдений. Кроме того, между координатами станций наблюдений и тессеральными гармониками имеется корреляция, пренебрегать которой нельзя.

Таким образом, необходимо совместное определение тессеральных и секториальных коэффициентов и координат станций. В общем случае задача решается с использованием соотношений (II.4.7) динамического метода.

На практике задачу решают в два этапа. На первом этапе по всей совокупности измерений на орбитальной дуге, охватывающей промежуток времени от 1 до 4 недель, производится дифференциальное уточнение орбиты. После завершения уточнения для каждого наблюдения получают текущие значения a_i, i_i, ω_i, e_i, Ω_i, M_i средних орбитальных элементов в некоторый момент звездного гринвичского времени S и остаточных разностей наблюдений dV_i и dW_i в направлении вдоль и поперек орбиты. Выделяемые таким образом остаточные разности зависят от ошибок координат станций, принятых коэффициентов тессеральных и секториальных гармоник и ошибок в определении времени.

На втором этапе составляют уравнения ошибок, связывающие остаточные разности, искомые коэффициенты $\overline{C}_{nm}$ и $\overline{S}_{nm}$ и координаты станций, из решения которых по методу наименьших квадратов полу-

n	m	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-9	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-10	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-9	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-10	n	m	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-9	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-10	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-9	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^9$ GEM-10
2	1	0	+1	−4	−2	6	1	−75	−73	+16	+23
2	2	+2434	+2434	−1398	−1399	6	2	+48	+49	−349	−354
3	1	+2028	+2029	+252	+252	6	3	+59	+57	+1	+3
3	2	+892	+893	−622	−623	6	4	−105	−101	−461	−462
3	3	+703	+700	+1411	+1412	6	5	−256	−258	−539	−537
4	1	−533	−535	−465	−469	6	6	+2	+3	−242	−242
4	2	+353	+352	+663	+664	7	1	+267	+270	+96	+102
4	3	+989	+988	−203	−202	7	2	+328	+324	+105	+108
4	4	−197	−195	+299	+299	7	3	+240	+231	−218	−216
5	1	−49	−51	−92	−94	7	4	−286	−285	−127	−130
5	2	+650	+651	−325	−328	7	5	+17	+15	+44	+43
5	3	−470	−467	−208	−203	7	6	−363	−362	+132	+131
5	4	−291	−288	+50	+50	7	7	−9	−7	+27	+17
5	5	+161	+156	−662	−660						

чают поправки к принятой модели гравитационного поля. Через $\overline{C}_{nm}$ и $\overline{S}_{nm}$ обозначены коэффициенты разложения долготной части геопотенциала по нормированным сферическим функциям, причем

$$\overline{C}_{nm} = fMR_0^n C_{nm}; \quad \overline{S}_{nm} = fMR_0^n S_{nm}.$$

Ниже приведены значения зональных гармонических коэффициентов (нормированных) $\overline{C}_n \cdot 10^9$, входящих в модели 1977 г. GEM-9 и GEM-10:

n	GEM-9	GEM-10
2	−484166	−484165
3	+958	+958
4	+541	+541
5	+68	+69
6	−151	−151
7	+93	+93
8	+51	+50
9	+27	+28
10	+53	+53

Значения незональных гармонических коэффициентов (нормированных) $\overline{C}_{nm}\cdot 10^9$ и $\overline{S}_{nm}\cdot 10^9$ для указанных моделей приведены в табл. 42.

II.4.35. Формулы вычисления гравитационного потенциала для разных моделей Земли

1. Земля имеет форму шара с симметричным распределением плотностей

$$V_0 = \mu/\rho; \quad \mu = fM_\oplus. \tag{II. 4.223}$$

$$V_{II} = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi)\right];$$

$$C_{20} = -\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}q\right); \qquad q = \frac{\omega_\oplus^2 R_0^3}{\mu}, \tag{II. 4.224}$$

2. Земля имеет форму эллипсоида вращения
где α — полярное сжатие Земли; $\omega_\oplus$ — угловая скорость вращения Земли.

3. Земля имеет форму эллипсоида вращения (дальнейшее уточнение V_{II})

$$V_{III} = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + C_{40}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^4 P_4(\sin\Phi)\right]; \tag{II. 4.225}$$

$$C_{20} = -\frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{9}{14}\alpha q\right);$$

$$C_{40} = \frac{8}{35}\left(\frac{7}{2}\alpha^2 - \frac{5}{2}\alpha q\right).$$

4. Земля имеет форму трехосного эллипсоида

$$V_{IV} = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 (C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\sin 2\lambda) P_{22}(\sin\Phi)\right]. \tag{II. 4.226}$$

5. Земля имеет форму сфероида, несимметричного относительно плоскости экватора,

$$V_V = \frac{\mu}{\rho}\left[1 + C_{20}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 P_2(\sin\Phi) + C_{30}\left(\frac{R_0}{\rho}\right)^3 P_3(\sin\Phi)\right]. \tag{II. 4.227}$$

6. Земля имеет форму трехосного эллипсоида, несимметричного относительно плоскости экватора

$$V_{VI} = \frac{\mu}{\rho}\left\{1 + \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^2 [C_{20}P_{20}(\sin\Phi) + (C_{22}\cos 2\lambda + \right.$$

$$+ S_{22}\sin 2\lambda) P_{22}(\sin\Phi)] + \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^3 C_{30}P_{30}(\sin\Phi) +$$

$$\left. + \left(\frac{R_0}{\rho}\right)^4 C_{40}P_{40}(\sin\Phi)\right\}^*. \tag{II. 4.228}$$

* Формулы (II. 4.224) — (II.4.228) хотя и являются приближенными, пригодны для решения многих практических и научных задач. Строгие формулы приведены в [7].

II.4.36. Связь между гармоническими коэффициентами потенциала и моментами инерции Земли

Гравитационный потенциал можно представить с помощью формулы

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_e^{n+1}}{r^{n+1}} Y_n(\mu, \lambda'), \tag{II. 4.229}$$

где $Y_n(\mu, \lambda')$ — поверхностная сферическая гармоника n-го порядка,

$$Y_n(\mu, \lambda') = \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda' + b_{nm}\sin m\lambda') P_{nm}(\mu); \tag{II.4. 230}$$

a_e — экваториальный радиус Земли.

Между коэффициентами a_{nm}, b_{nm} и физическими константами Земли существует следующая связь:

$$a_{00} = \frac{fM}{a_e};$$

$a_{10} = a_{11} = b_{11} = 0$ (если начало координат совмещено с центром масс Земли);

$$a_{20} = -\frac{f}{a_e^3}\left[C - \frac{1}{2}(A + B)\right];$$

$$a_{21} = \frac{f}{a_e^3}E; \qquad b_{21} = \frac{f}{a_e^3}D; \tag{II. 4.231}$$

$$a_{22} = \frac{f}{a_e^3}\frac{B - A}{4}; \qquad b_{22} = \frac{f}{a_e^3}\frac{F}{2}.$$

В (II.4.231) A, B, C — главные центральные моменты инерции Земли; D, E, F — центробежные моменты инерции.

Коэффициенты a_{nm} и b_{nm} связаны с C_{nm} и S_{nm} соотношениями:

$$C_{nm} = (a_{nm}\cos m\lambda_0 - b_{nm}\sin m\lambda_0)/a_{00};$$
$$S_{nm} = (a_{nm}\sin m\lambda_0 - b_{nm}\cos m\lambda_0)/a_{00}. \tag{II. 4.232}$$

Если бы главная ось инерции, относительно которой момент инерции минимален, проходила через точку пересечения экватора с гринвичским меридианом, то получили бы:

$$C_{nm} = a_{nm}/a_{00}; \quad S_{nm} = b_{nm}/a_{00}. \tag{II. 4.233}$$

С учетом приведенных формул, а также имея в виду выражение для динамического сжатия Земли

$$H = \frac{2C - (A + B)}{2C}, \tag{II. 4.234}$$

получаем

$$J_2 = \frac{C}{a_e^2 M_\oplus}H. \tag{II. 4.235}$$

II.4.37. Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ)

Метод предложен в 1965 г. советскими радиоастрономами Л. И. Матвеенко, Н. С. Кардашевым и Г. Б. Шоломницким. В дальнейшем в развитии метода принимали участие многие специалисты. Особо следует отметить важное значение работ В. С. Троицкого и И. Д. Жонголовича.

Суть метода РСДБ заключается в том, что два радиотелескопа, расположенных на двух пунктах, удаленных друг от друга на значительное расстояние, регистрируют одновременно излучение весьма удаленного естественного радиоисточника. Анализ магнитофонных записей радиосигналов на пунктах наблюдений позволяет определить «временну́ю задержку» и частоту интерференции.

В случае использования в качестве измеренной величины временно́й задержки τ используется следующая основная формула РСБД:

$$c\tau = A\cos\omega t - B\sin\omega t + C + c\nu\,(a + bt), \qquad \text{(II.4.236)}$$

где c — скорость света; $\omega = d\,(S-\alpha)/dt$ — мгновенная угловая скорость вращения Земли по отношению к «неподвижным» радиоисточникам; $\tau = \tau_н + \Delta\tau_A + \Delta\tau_{aber}$; $\nu = \tau/\tau_н$, $(|1-\nu| \sim 10^{-4})$; $\tau_н$ — измеренная величина временно́й задержки; $\Delta\tau_A$ — поправка за атмосферу; $\Delta\tau_{aber}$ — поправка за суточную и годичную аберрацию; a и b — числовые параметры, характеризующие ошибку синхронизации стандартов в момент t; $(\Delta\tau = \tau_н - (a + bt))$;

$$\begin{aligned} A &= D_E\cos\delta\cos\beta_0;\\ B &= D_p\cos\delta\sin\beta_0;\\ C &= D_p\sin\delta;\\ D_E &= D\cos\Phi;\\ D_p &= D\sin\Phi;\\ \beta_0 &= (S-\alpha-\Lambda)_0. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.237)}$$

Некоторые параметры, входящие в (II.4.237), показаны на рис. 66. На нем координатная ось OX расположена в плоскости первого геоцентрического меридиана, ось OZ направлена вдоль мгновенной оси вращения Земли, i — орт по направлению на радиоисточник, j — орт по направлению базы от T_1 к T_2.

Кроме того, в формуле (II.4.237) D_E и D_p — проекции базы D на экватор и полярную ось Земли.

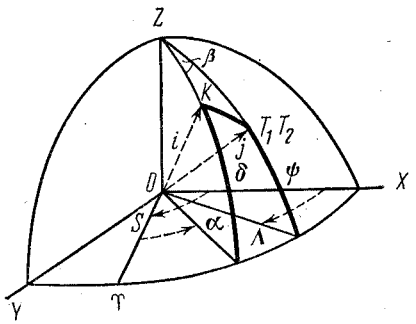


Рис. 66. Геометрические параметры, входящие в уравнение РСДБ с временной задержкой

В случае использования в качестве измеренной величины частоты интерференции основная формула РСДБ примет вид

$$\lambda_0 f = -(A\sin\omega t + B\cos\omega t)\,\omega + \lambda_0\nu\Delta f_г, \qquad \text{(II.4.238)}$$

где $f = f_н + \Delta f_A + \Delta f_{aber}$; $f_н$ — измеренное значение частоты интерференции; Δf_A и Δf_{aber} — поправки за атмосферу и аберрацию (суточную и годичную); $f_н = f_д + \Delta f_г$; $f_д$ — доплеровское смещение частоты; $\Delta f_г$ — неизвестная величина, обусловленная разностью частот гетеродинов в пунктах наблюдений; $\lambda_0 = cf_0^{-1}$ (f_0 — частота радиоизлучения, принимаемая на переднем конце базы).

Линеаризация уравнений (II.4.236) и (II.4.238) приводит к уравнениям поправок метода РСДБ. В обобщенном виде уравнение поправок имеет вид

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ \left(\frac{\partial F}{\partial\delta_i}\right)_0\Delta\delta_i + \left(\frac{\partial F}{\partial\beta_{0i}}\right)_0\Delta\beta_{0i} + \left(\frac{\partial F}{\partial\gamma_i}\right)_0\Delta\gamma_i +\\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial D_E}\right)_0\Delta D_E + \left(\frac{\partial F}{\partial D_p}\right)_0\Delta D_p + \left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)_0\Delta\omega +\\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_0\Delta a + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)_0\Delta b + \left(\frac{\partial F}{\partial f_г}\right)\Delta f_г, \end{aligned} \qquad \text{(II.4.239)}$$

причем $\gamma = D_E\cos\delta$.

Совместное использование (II.4.236) и (II.4.238) приводит к уравнениям поправок с девятью параметрами. В случае раздельного использования из (II.4.236) получаем уравнение попр вок для уточнения семи параметров δ_i, β_{0i}, D_p, ω, D_E, a, b; из (II.4.238) — соответственно четырех параметров β_{0i}, γ_i, ω, $f_г$.

Как следует из приведенных выше формул, методом РСДБ можно уточнять координаты радиоисточников (создавать на этой основе инерциальную систему координат), длину и направление хорд, соединяющих пункты; параметры вращения Земли; осуществлять синхронизацию часов, находящихся в удаленных друг от друга пунктах.

Потенциальная точность метода характеризуется ошибками 0,001—0,0001″ (направление), несколько сантиметров (длина хорды, координаты пункта, координаты полюса), 0,15 мс в сутки (вариации скорости вращения Земли).

Необходимые условия для реализации метода РСДБ:

1) наличие радиотелескопов, работающих в сантиметровом диапазоне, диаметром около 30 м и более, с полноповоротными антеннами; 2) наличие генераторов частоты со стабильностью 10^{-13}—10^{-14}; 3) наличие мощных магнитофонов для регистрации результатов наблюдений (объем информации достигает 10^9 единиц); 4) соответствующее машинное и математическое обеспечение; 5) наличие каталога радиоисточников.

II.4.38. Лазерная локация Луны

Измеряя с помощью лазерного дальномера расстояния до уголковых отражателей, находящихся на поверхности Луны, можно решать геодезические, астрономические и геодинамические задачи.

Исходное уравнение метода лазерной локации Луны (рис. 67) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho\cos\mu = &\left(r_☾^2 + R^2 - 2r_☾R\cos\gamma\right)^{1/2} - R_☾\cos\omega =\\ =&\left\{r_☾^2 + R^2 - 2r_☾R\left[\sin\Phi\sin\delta_☾ + \cos\Phi\cos\delta_☾\cos\left(S+\Lambda-\alpha_☾\right)\right]\right\}^{1/2} -\\ &- R_☾\left[\sin b\sin b_0 + \cos b\cos b_0\cos\left(l-l_0\right)\right]. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.240)}$$

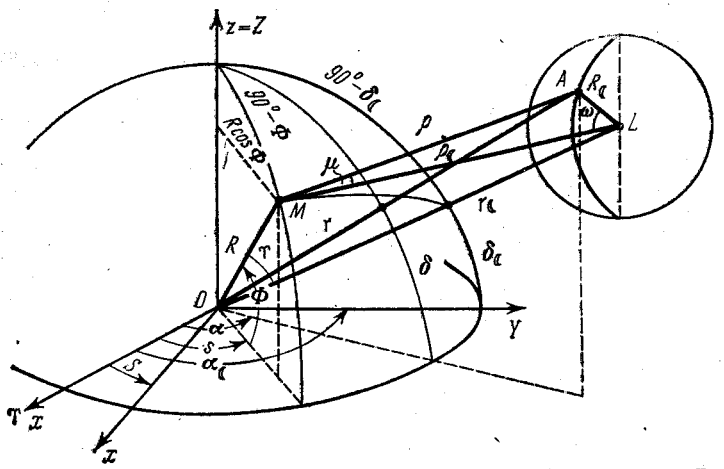


Рис. 67. Геометрические соотношения в методе лазерной локации Луны

Как видно из приведенного уравнения, в результате лазерной локации Луны можно уточнить координаты пункта наблюдений (R, Φ, Λ), теорию движения естественного спутника Земли ($r_{\text{☾}}$, $\alpha_{\text{☾}}$, $\delta_{\text{☾}}$), положение отражателей в селеноцентрической системе координат ($R_{\text{☾}}$, b, l) и параметры физической либрации (b_0, l_0).

Линеаризация (II.4.240) приводит к уравнению поправок

$$\left(\frac{r_{\text{☾}i}}{\rho_{\text{☾}i}} - \frac{R}{\rho_{\text{☾}i}}\cos\gamma_i\right)\frac{3422{,}7''}{\pi_{\text{☾}i}}\Delta r_{\text{☾}} - \cos\omega_i\Delta R_{\text{☾}} -$$

$$- \frac{3422{,}7''}{\pi_{\text{☾}i}} r_{\text{☾}i}\Pi_i\Delta e - \cos b\cos b_{0i}\sin(l - l_{0i})\Delta l +$$

$$+ [\sin b_{0i}\cos b - \cos b_{0i}\sin b\cos(l - l_{0i})]\Delta b -$$

$$- \left(\frac{R}{\rho_{\text{☾}i}} - \frac{r_{\text{☾}}}{\rho_{\text{☾}i}}\cos\gamma_i\right)\Delta R + \frac{r_{\text{☾}i}}{\rho_{\text{☾}i}} R(\cos\Phi_i\sin\delta_i -$$

$$- \sin\Phi_i\cos\delta_i\cos t_i)\Delta\Phi + \frac{r_{\text{☾}i}}{\rho_{\text{☾}i}} R(\sin\Phi_i\cos\delta_i -$$

$$- \cos\Phi_i\sin\delta_i\cos t_i)\Delta\delta - \frac{r_{\text{☾}i}}{\rho_{\text{☾}i}} R\cos\Phi_i\cos\delta_i\sin t_i\,\Delta t_i + L_i = v_i, \qquad \text{(II. 4.241)}$$

где $L_i = \rho_{\text{выч}i} - \rho_{\text{изм}i}$; Π_i — ряд, полученный в результате дифференцирования $d\sin\pi_{\text{☾}}/de$; $t_i = s_i - \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Коэффициенты при разных неизвестных в уравнениях вида (II.4.241) существенно меняются за разные промежутки времени, поэтому на практике группы параметров уточняются раздельно.

Так, например, для уточнения только координат пункта наблюдений за исходное уравнение вместо (II.4.240) следует взять

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2r(R\cos\Phi\cos\delta\cos t + R\sin\Phi\sin\delta). \qquad \text{(II.4.242)}$$

Лазерная локация Луны позволяет также уточнять параметры вращения Земли, параметры ее орбитального движения, изучать перемещения литосферных плит.

Измерения топоцентрических дальностей до Луны со средней квадратической ошибкой 0,5 м позволят за оптимальное время лоцирования определить * координаты пункта наблюдений с ошибкой 0,2—0,3 м, селенографические координаты отражателя — с ошибкой $m_b = m_l = 0{,}6''$, селеноцентрический радиус-вектор отражателя — с ошибкой 5 м, постоянную физической либрации Луны — с относительной ошибкой $1\cdot10^{-4}$, а наклон экватора Луны к эклиптике I — с ошибкой, равной $0{,}2''$. Для определения параметров физической либрации Луны на ней должно быть установлено 2—3 отражателя. Использование лазерных дальномеров третьего поколения позволит повысить точность определения упомянутых параметров по крайней мере на порядок.

II.4.39. Спутниковая альтиметрия

Измерения при помощи радиовысотомера расстояний до поверхности океана дают мощное средство для изучения фигуры геоида и топографии Мирового океана.

Реализация метода основывается на использовании уравнений поправок, связывающих определяемую высоту геоида N с измеренной высотой h спутника над уровнем моря (рис. 68):

$$-h + r - a_e + \frac{1}{2}a_e e^2\sin^2\Phi + \frac{1}{8}a_e e^4\sin^4\Phi +$$

$$+ \frac{1}{8}a_e e^4\frac{a_e}{r}\sin^2 2\Phi - N = v, \qquad \text{(II. 4.243)}$$

где a_e — большая полуось эллипсоида; e — эксцентриситет; r — геоцентрический радиус-вектор спутника. Неизвестными в (II.4.243) являются N и a_e.

Уравнения спутниковой альтиметрии могут быть представлены таким образом, что неизвестными в них будут поправки координат станций наблюдения и элементов орбиты. Возможно также введение в качестве неизвестных параметров гравитационного поля или аномалий силы тяжести.

С использованием радиовысотомерных данных ИСЗ GEOS-3 были получены модели гравитационного поля Земли GEM-10A, GEM-10B, GEM-10C. Последняя основывается

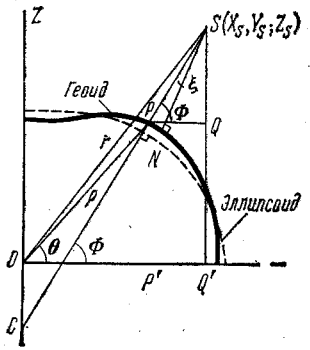


Рис. 68. Схема реализации метода спутниковой альтиметрии

* *Кокурин Ю. Л.* Лазерная локация Луны. — Труды Физич. ин-та им. П. Н. Лебедева АН СССР. М., 1976, т. 91, с. 60—225.

на средних высотах геоида для трапеций $1\times1°$ и содержит коэффициенты геопотенциала до $n = 180$.

Метод позволил выявить коротковолновые вариации высот геоида с длинами волн от нескольких десятков до нескольких сотен километров. Были получены детальные карты высот геоида. Спутник GEOS-3 позволил получить большой объем информации о топографии Мирового океана, скорости приводного ветра, уклонах поверхности морей. Исследовались возможности метода для изучения рельефа районов, покрытых льдом, поверхностей внутренних водоемов.

II.4.40. Измерения по линии спутник—спутник *

Метод позволяет изучать тонкую структуру гравитационного поля Земли.

В первом варианте измерения ведутся между двумя спутниками, движущимися по низкой орбите.

Второй вариант предусматривает наблюдение спутника на низкой орбите с высокого ИСЗ (например, стационарного).

Расчеты показывают, что при движении спутников на высоте 200 км и на расстоянии друг от друга также 200 км можно надежно определить аномалии силы тяжести для трапеций размером $2\times2°$, что соответствует разложению геопотенциала до $n = 90$. Относительные доплеровские измерения при этом должны выполняться ошибкой, меньшей 0,1 мм/с. Кроме относительных скоростей могут измеряться относительные расстояния и углы между направлениями на спутники с помощью бортового телескопа.

Экспериментальные наблюдения во втором варианте производились с использованием систем ATS-6/Nimbus-6, ATS-6/«Союз»—«Аполлон» и ATS-6/GEOS-3.

II.4.41. Метод спутниковой градиентометрии

Кроме метода спутниковой альтиметрии и использования наблюдений по линиям спутник—спутник, за рубежом ведется разработка метода спутниковой градиентометрии как весьма эффективного средства для изучения тонкой структуры гравитационного поля Земли.

Измеряемыми величинами в методе спутниковой градиентометрии являются вторые производные геопотенциала. При этом исходят из того, что градиенты геопотенциала более чувствительны к аномалиям силы тяжести, чем гармонические коэффициенты геопотенциала. Достоинства метода обусловлены также слабой зависимостью результатов измерений от влияния топографии, вертикальных ускорений. Методом спутниковой градиентометрии можно получить гармонические коэффициенты геопотенциала в разложении по сферическим функциям до $n = 100$. Особенно он эффективен для изучения весьма тонкой структуры геопотенциала, когда $n > 40$.

Необходимая точность измерения вторых производных геопотенциала должна составлять от 0,05 до 0,002Э (в зависимости от высоты полета и степени уточняемых гармоник).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М., Наука, 1977.
2. *Арнольд К.* Методы спутниковой геодезии. М., Недра, 1973.
3. *Использование* искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей/Е. Г. Бойко, Б. М. Кленицкий, И. М. Ландис, Г. А. Устинов. М., Недра, 1977.
4. *Каула У.* Спутниковая геодезия. Теоретические основы. М., Мир, 1970.
5. *Краснорылов И. И., Плахов Ю. В.* Основы космической геодезии. М., Недра, 1976.
6. *Лозинский А. М., Масевич А. Г.* Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли. «Научные информации Астросовета АН СССР», М., 1970, вып. 18.
7. *Машимов М. М.* Планетарные теории геодезии. М., Недра, 1982.
8. *Медведев П. П.* Исследование гравитационного поля и фигуры Земли новыми методами космической геодезии. Итоги науки и техники. Серия «Геодезия и аэросъемка», М., ВИНИТИ, 1980, т. 17.
9. *Медведев П. П.* Методы и результаты спутниковой геодезии. Итоги науки и техники. Серия «Геодезия и аэросъемка», М., ВИНИТИ, 1980, т. 16.
10. *Основы* спутниковой геодезии/Под ред. А. А. Изотова. М., Недра, 1974.
11. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия (теоретическая геодезия). М., Недра, 1978.
12. *Основы* теории полета космических аппаратов/Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихомирова. М., Машиностроение, 1972.
13. *Плахов Ю. В.* Применение теории возмущений в космической геодезии. М., Недра, 1983.
14. *Справочное* руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г. Н. Дубошина. М., Наука, 1976.
15. *Урмаев М. С.* Орбитальные методы космической геодезии. М., Недра, 1981.

* Использованы данные, приведенные в [8].

РАЗДЕЛ III
ОСНОВНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

III.1. ПЛАНОВЫЕ ОПОРНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ
З. С. Хаимов

III.1.1. Государственная геодезическая сеть СССР. Общие сведения. Классификация сетей

Геодезическая сеть представляет собой совокупность точек на земной поверхности, для которых определены плановое и высотное положение в избранной системе координат. Эти точки располагают на местности по заранее составленному плану, отмечают и закрепляют специальными опознавательными знаками. В зависимости от вида работ геодезические сети могут быть либо только плановыми, либо только высотными, либо теми и другими одновременно.

Геодезические сети, служащие для последующего развития от них различных геодезических построений при проведении съемочных работ или обоснования инженерных сооружений называются опорными геодезическими сетями.

Опорные геодезические сети, развиваемые в масштабе всего государства в общей референцной системе координат, называются государственными или основными опорными геодезическими сетями.

Основными методами создания плановых геодезических сетей являются триангуляция, полигонометрия, трилатерация. Однако для создания карт масштаба мельче 1 : 100 000, особенно в необжитых местах (Арктика, Антарктида и др.), можно применить астрономический метод или методы космической геодезии с использованием искусственных спутников Земли.

Для обеспечения съемок масштаба 1 : 25 000 и мельче успешно применяются радиогеодезические методы создания опорных сетей, а для различных специальных целей — методы космической геодезии (связи материков, островов и др.) и всевозможного вида засечки.

При развитии морских геодезических сетей наряду с оптическими и радиогеодезическими средствами широко применяются гидроакустические и спутниковые, а в качестве методов определения положения пунктов — различные засечки и проложение специальных съемочных маршрутов — галсов между опорными пунктами с известными координатами.

По Классификации геодезических сетей СССР 1962 г. («Геодезия и картография», 1962, № 4, с. 70—71) геодезические сети подразделяются на:

1) государственную геодезическую сеть;
2) геодезические сети местного значения (сети сгущения);
3) съемочные сети.

Государственная геодезическая сеть СССР служит для выполнения научных и научно-технических геодезических задач. Она является

главной геодезической основой топографических съемок всех масштабов и должна удовлетворять различным требованиям народного хозяйства и обороны страны.

Плановая государственная геодезическая сеть СССР подразделяется на сети триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1, 2, 3, 4 классов, различающиеся между собой точностью измерения углов и линий, длиной сторон и порядком их развития.

Густота пунктов государственной сети регламентируется соответствующими инструкциями и установлена в следующих размерах: для съемок в масштабе 1 : 25 000 и 1 : 10 000 — 1 пункт на 50—60 км²; для съемок в масштабе 1 : 5 000 — 1 пункт на 20—30 км²; для съемок в масштабе 1 : 2 000 и крупнее — 1 пункт на 5—15 км².

Норма плотности 1 пункт на 50—60 км², как правило, создается построением сетей 1, 2 и 3 классов. В труднодоступных районах указанная густота пунктов может быть уменьшена, но не более чем в 1,5 раза. Однако в особо тяжелых районах (болота Западной Сибири, горные массивы, покрытые вечными снегами) плотность пунктов устанавливается в каждом конкретном случае отдельно.

В городах с населением не менее 100 000 жителей и площадью не менее 50 км² 1 пункт должен приходиться в среднем на 5—15 км². В случаях, когда площадь геодезического обоснования не превышает 3000 км², плотность 1 пункт на 20—30 км² разрешается создавать только сетями 3 класса, а плотность 1 пункт на 5—15 км² — только сетями 4 класса с последующей привязкой к сетям высшего класса по мере развития последних. В подобных случаях в сетях 3 и 4 классов измеряют не менее двух базисных сторон с точностью не менее 1/200 000 и для ориентирования сети определяют астрономические азимуты.

Площадь P, обеспечиваемая одним пунктом сети, построенной из равносторонних треугольников, может быть приближенно выражена формулой Павлова В. Ф.

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 = 0{,}87 s^2.$$

Для упрощения подсчетов можно принимать $P \approx s^2$, где s — длина стороны сети (расстояние между смежными пунктами).

Плановая государственная геодезическая сеть СССР создается в соответствии с действующей ныне Инструкцией о построении государственной геодезической сети СССР (М., Недра, 1966), основанной на Основных положениях о построении государственной геодезической сети СССР (М., Геодезиздат, 1961). Точность этой сети позволяет уверенно использовать ее для обоснования съемок вплоть до масштабов 1 : 5000—1 : 2000 и крупнее. На значительную территорию СССР были созданы геодезические сети в соответствии с Основными положениями о построении государственной опорной геодезической сети СССР 1939 г., ориентированные по точности на масштаб съемок 1 : 25 000—1 : 10 000 и мельче. Они перекрывались новой сетью только в том случае, если их точность и плотность пунктов не удовлетворяли требованиям предстоящих работ. При этом густота пунктов доводилась до необходимой плотности вставкой дополнительных пунктов соответствующей точности. Основные характеристики сетей, построенных по Основным положениям 1939 г. и по Основным положениям 1961 г., приведены в табл. 43.

В зависимости от условий местности и экономической целесообразности применяется тот или иной метод создания государственной геодезической сети (триангуляция, полигонометрия, трилатерация или их сочетания).

ТАБЛИЦА 43

Показатели	По Основным положениям 1961 г.			По Основным положениям 1939 г.				
	1 кл.	2 кл.	3 кл.	4 кл.	1 кл.	2 кл. (основные ряды)	2 кл. (заполняющие сети)	3 кл.	4 кл.
Длина звена триангуляции, км	200	—	—	—	200—250	100—120	—	—	—
Средняя длина стороны треугольника, км	20—25	7—20	5—8 / 3—8 *	2—5	25—30	15—20	13	8	Засечка
Обратный вес звена триангуляции	Не более 100 единиц 6-го знака логарифма				Не более 120 единиц 6-го знака логарифма				
Относительная ошибка базисной (выходной) стороны	1/400 000	1/300 000	1/200 000	1/200 000	1/300 000	1/200 000	1/200 000	—	—
Примерная относительная ошибка стороны в слабом месте	1/150 000	1/300 000	1/120 000	1/70 000	1/100 000	1/60 000	1/35 000	1/15 000	—
Относительная ошибка измерения сторон в полигонометрии	1/300 000	1/250 000	1/200 000	1/150 000	—	—	—	—	—
Наименьшее значение угла треугольника, градус	40	20	20	20	40	30	20	15	20
Допустимая невязка треугольника, угл. с	3	4	6	8	3	5	9	15	35
Средняя квадратическая ошибка угла (по невязкам треугольников), угл. с	0,7 / 0,4 *	1	1,5	2	0,7—0,9	1,2—1,5	2,0—2,5	4—5	
Средняя квадратическая ошибка астроопределений:									
а) широты	0,3″	0,3″	—	—	0,2—0,4″	0,4″			
б) долготы	0,03^s	0,03^s			0,03^s	0,05^s			
в) азимута	0,5″	0,5″			0,5″	1,0″			

* Данные знаменателя приведены для полигонометрии.

Оценка точности измерения угла выполняется по внутренней сходимости.

Триангуляция 1 класса в нашей стране строится в виде астрономо-геодезической сети 1 класса, которая совместно со сплошной гравиметрической съемкой призвана обеспечить решение основных научных задач, связанных с определением формы и размеров Земли, с изучением вековых движений и деформаций земной коры. Триангуляция 1 класса обеспечивает развитие единой системы координат на всю территорию страны и является главной основой развития геодезических сетей последующих классов.

Сеть 1 класса образует систему полигонов из звеньев триангуляции, каждое из которых не должно превышать 200 км. Периметр полигона 800—1000 км. Звенья (ряды) триангуляции по возможности располагаются вдоль меридианов и параллелей.

Типовой фигурой, из которой построены звенья триангуляции, является треугольник, близкий к равностороннему. Использованы также комбинации треугольников, геодезических четырехугольников и центральных систем. В месте пересечения звеньев (на их концах) измеряют базисные стороны или, в случае невозможности непосредственных измерений сторон, строят базисные сети для определения длины выходной стороны, заменяющей базисную сторону. Измеряют базис длиной не менее 6 км с точностью 1/1 000 000. На обоих концах базисных сторон (выходных сторон) определяют пункты Лапласа (астрономические определения широт, долгот и азимутов).

В отдельных районах, если это целесообразно, взамен полигонов, образованных звеньями триангуляции 1 класса, может строиться сплошная сеть триангуляции 1 класса. Базисные стороны и пункты Лапласа определяют в них примерно через 10 сторон.

Взамен звеньев триангуляции могут строиться звенья полигонометрии 1 класса, которые должны быть вытянутыми (максимальное удаление отдельных пунктов от замыкающей не должно превышать 20 км, а направления сторон уклоняться от направления замыкающей не более

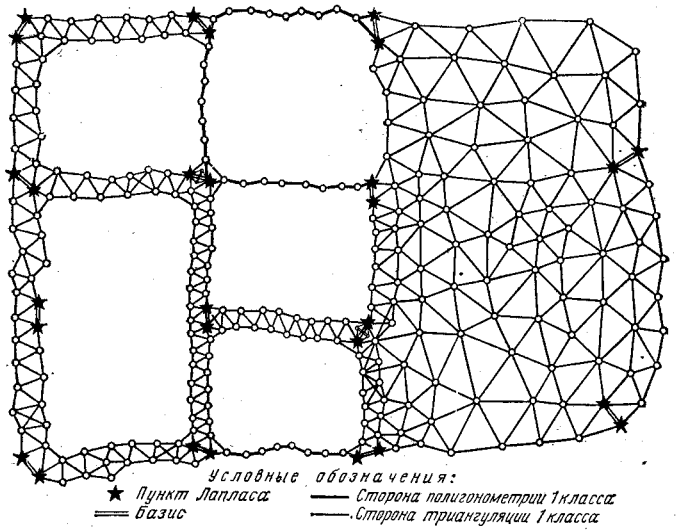


Рис. 69. Схема астрономо-геодезической сети 1 класса

чем на 20°) и состоять не больше чем из 10 сторон длиной 20—25 км. Представление о схеме построения астрономо-геодезической сети СССР дает рис. 69.

Для определения высот базисов и линий полигонометрии над поверхностью эллипсоида, а также с целью изучения фигуры Земли и ее гравитационного поля по всем рядам астрономо-геодезической сети СССР проведено астрономо-гравиметрическое нивелирование. Кроме того, выделены ведущие ряды 1 класса, являющиеся основными линиями астрономо-гравиметрического нивелирования с более частым расположением астропунктов и особым гравиметрическим сгущением вокруг них. Перечень этих рядов и их расположение установлены Инструкцией о построении государственной геодезической сети СССР.

Координаты астрономо-геодезической сети СССР вычисляются в единой системе координат 1942 г., основой которой является референц-эллипсоид Красовского, а исходным пунктом — координаты центра Круглого зала Пулковской обсерватории.

Триангуляция 2 класса. Триангуляция 2 класса строится в виде сплошных сетей треугольников, заполняющих полигоны триангуляции 1 класса. Она является основной опорной сетью, служащей для развития сетей последующего сгущения и геодезического обоснования всех топографических съемок и изысканий инженерных сооружений. Благодаря своей жесткости и высокой точности сеть 2 класса, наряду с сетью 1 класса, может быть использована и для целей научного исследования. Треугольники сети 2 класса должны по возможности приближаться к равносторонним. В зависимости от физико-географических условий длины сторон сети триангуляции 2 класса могут колебаться в пределах от 7 до 20 км, причем в каждом отдельном случае выбор длин сторон должен быть экономически обоснован.

Сеть 2 класса надежно связывается с сетью 1 класса. Типовые схемы привязки триангуляции показаны на рис. 70. Базисные стороны располагаются не реже, чем через 25 треугольников, причем одна ба-

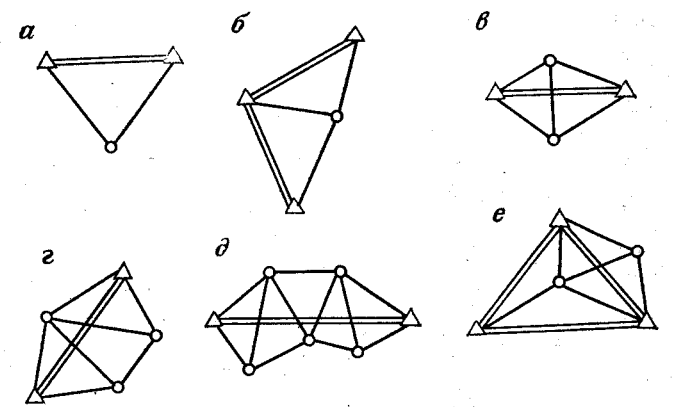


Рис. 70. Схема привязки пунктов 2 класса к пунктам 1 класса

а — треугольник; *б* — вставка в жесткий угол; *в* — геодезический четырехугольник; *г* — веер; *д* — цепочка треугольников; *е* — комбинация центральной системы с геодезическим четырехугольником

зисная сторона должна располагаться примерно в середине полигона 1 класса и на ее концах должны быть определены пункты Лапласа. Технические характеристики сети триангуляции 2 класса приведены в табл. 43.

Наиболее типичная схема построения сети триангуляции 2 класса внутри полигона 1 класса со сгущением ее пунктами 3 класса для обеспечения необходимой густоты пунктов (1 пункт на 50—60 км^2) представлена на рис. 71.

Взамен триангуляции 2 класса допускается построение сети методом полигонометрии, детальная схема которой должна разрабатываться в каждом конкретном случае.

Триангуляция 3 и 4 классов. Триангуляция 3 и 4 классов является дальнейшим сгущением государственной геодезической сети для целей крупномасштабного картографирования и обоснования строительства инженерных сооружений.

Триангуляция 3 и 4 классов строится в виде вставок жестких систем или отдельных пунктов в сети старших классов с обязательным измерением всех трех углов треугольников. Типовые схемы построения сетей 3 и 4 классов показаны на рис. 72.

Во всех случаях расстояние между пунктами смежных систем, не связанных измеренными направлениями, должно быть не меньше 4 км в сетях 3 класса и 3 км — в сетях 4 класса. Остальные характеристики этих сетей представлены в табл. 43.

Взамен триангуляции 3 и 4 классов может прокладываться сеть полигонометрии соответствующего класса. Полигонометрические ходы прокладывают в виде систем или одиночных ходов, опирающихся на пункты высшего класса, причем в ходах между узловыми пунктами и узловыми и исходными пунктами должно быть не более двух точек поворота. Наименьшая сторона полигонометрии 3 класса допускается длиной в 3 км, а 4 класса — 2 км. Во всех случаях, когда расстояние между пунктами двух ходов полигонометрии 3 класса меньше 4 км, а для 4 класса меньше 3 км, между ними прокладываются «перемычки».

Для пунктов сетей всех классов должны быть определены высоты геометрическим или тригонометрическим нивелированием.

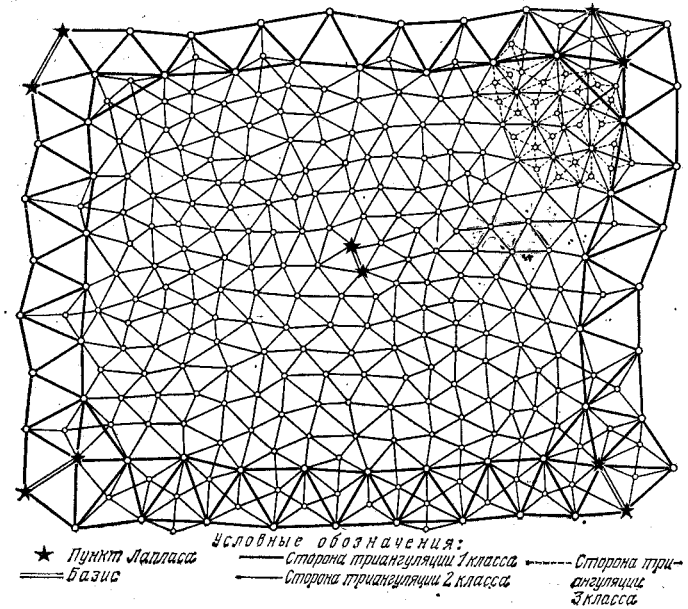


Рис. 71. Схема построения геодезической сети 2 и 3 классов методом триангуляции

На всех пунктах государственной геодезической сети устанавливаются по 2 ориентирных пункта на расстоянии от 500 до 1000 м (в лесу не ближе 250 м). В отдельных случаях в качестве одного из ориентирных пунктов может быть принят хорошо видимый с Земли до основания геодезический знак или постоянный местный предмет (башня, колокольня, мечеть, фабричная труба и т. д.), расположенные не более 2—3 км от данного пункта.

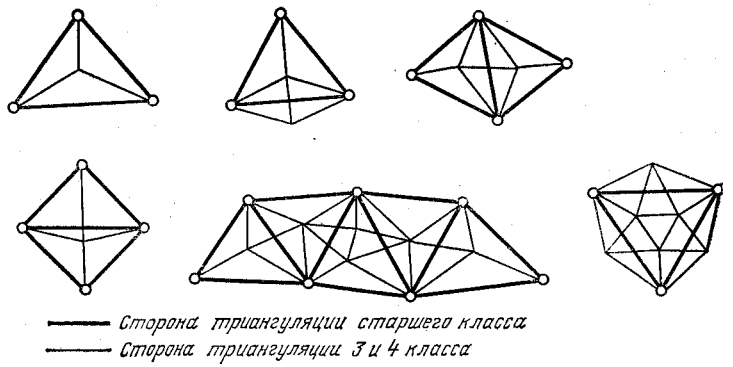


Рис. 72. Схема построения геодезических сетей 3 и 4 классов методом триангуляции

Все пункты государственной геодезической сети, а также ориентирные пункты закрепляются на местности особо надежными и долговременными подземными сооружениями (центрами).

Помимо типовых схем и методов построения геодезических сетей, указанных выше, для обеспечения ряда инженерных работ, требующих наиболее высокой точности, разрешается строить сети специального назначения по специально разработанным программам.

III.1.2. Предвычисление и оценка точности триангуляции

Под оценкой точности понимают подсчет ожидаемых средних квадратических ошибок различных элементов проектируемых, а также фактически полученных ошибок построенных и уравненных геодезических сетей.

Обычно рассматривают ошибки длин и азимутов сторон, продольные и поперечные сдвиги диагоналей ряда геометрических фигур или «замыкающих» линий ходов, по которым судят о точности передачи координат.

Формулы для оценки точности различных элементов сети, являющихся функциями измеренных величин, находят по методу наименьших квадратов, откуда известно, что средняя квадратическая ошибка функции (m_F) уравненных величин выражается формулой

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}, \qquad \text{(III. 1.1)}$$

где μ — ошибка единицы веса; P_F — вес рассматриваемой функции. Величина m_F, полученная по формуле (III.1.1), является точечной оценкой стандарта соответствующей функции. По ней можно определить величину доверительного интервала, с заданной надежностью покрывающего действительное значение искомой функции: $[A \pm t m_F]$, где A — оценка математического ожидания функции измеренных величин, полученная из уравнивания. В сети, состоящей не менее чем из 15—20 пунктов, значение t с вероятностью 0,95 может быть принято равным 2, с вероятностью 0,99 — равным 2,5, с вероятностью 0,997 — равным 3. В сетях с меньшим числом пунктов величина t определяется по таблицам распределения Стьюдента.

Часто при определении ошибок рассматриваемой функции приходится учитывать еще ошибки исходных данных $m_{\text{исх}}$. В этом случае общая ошибка элемента сети m будет выражаться формулой

$$m = \sqrt{m_{\text{исх}}^2 + m_F^2}. \qquad \text{(III. 1.2)}$$

За ошибку единицы веса принимается ошибка измеренных величин. При угловых измерениях ею является средняя квадратическая ошибка измеренного угла или направления, при линейных измерениях — средняя квадратическая ошибка принятой единицы длины линии.

Ошибку единицы веса можно определить из уравнительных вычислений по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pvv]}{r}}, \qquad \text{(III. 1.3)}$$

где v — поправки в измеренные с весом p величины из уравнивания; r — число условных уравнений при уравнивании коррелатным спосо-

бом или число избыточных измерений при уравнивании параметрическим способом. До уравнивания ошибку единицы веса можно определить по невязкам замкнутых фигур, например в триангуляции — по формуле Ферреро

$$\mu = \sqrt{\frac{[WW]}{3n}}, \qquad \text{(III. 1.4)}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла; W — невязка треугольника; n — число треугольников.

Приближенное значение ошибки единицы веса обычно известно до уравнивания по аналогичным, исполненным ранее работам или задается заранее.

Если в сети измерены и направления (углы) и линии с весами, соответственно равными $p_N = c/m_N^2$ и $p_s = c/m_s^2$, где c — произвольная постоянная величина; m_N и m_s — средние квадратические ошибки измерения направлений и линий, то для установления соотношения между ними обычно принимают $p_N = 1$, тогда

$$p_s = m_N^2/m_s^2. \qquad \text{(III. 1.5)}$$

Обратные веса в формуле (III.1.1) получают из уравнивания. В связи с внедрением ЭВМ наиболее универсальным и точным способом их определения является составление матрицы весовых коэффициентов путем обращения матрицы коэффициентов нормальных уравнений, полученной на основе n уравнений поправок при параметрическом способе уравнивания,

$$N^{-1} = Q = \begin{pmatrix} Q_{11}, & Q_{12}, & \ldots, & Q_{1n} \\ Q_{21}, & Q_{22}, & \ldots, & Q_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ Q_{n1}, & Q_{n2}, & \ldots, & Q_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{(III. 1.6)}$$

где $N = A^TPA$ — матрица коэффициентов нормальных уравнений; A — матрица коэффициентов уравнений поправок; P — диагональная матрица весов измеренных величин.

Диагональные элементы матрицы Q являются обратными весами оценок соответствующих параметров, полученных из уравнивания геодезической сети. Обратный вес различных функций уравненных величин может быть получен по формуле

$$\frac{1}{P_F} = f^TQf, \qquad \text{(III. 1.7)}$$

где f — матрица-столбец коэффициентов весовой функции F (вектор частных производных оцениваемой функции по параметрам).

Наряду с этим способом в практике геодезических работ широко применяются приближенные формулы априорной оценки точности элементов геодезических сетей, выведенные различными учеными для типовых геодезических построений.

Выбор готовых формул по оценке точности различных элементов сети зависит от того, к каким измеренным величинам относится ошибка единицы веса и как она получена, а также от того, из каких геометрических фигур построена сеть и как будет проводиться ее уравнивание.

Ниже приведены наиболее простые и удобные для вычислений формулы для некоторых типовых построений.

Оценка точности элементов простой цепи треугольников, уравненной за условия фигур. Для цепи n треугольников, изображенной на

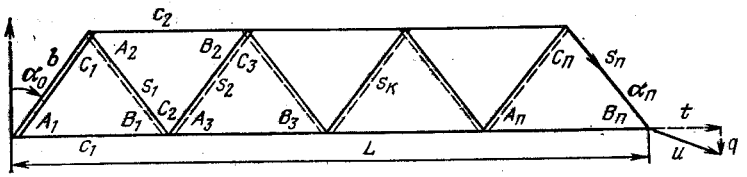


Рис. 73. Схема ряда треугольников триангуляции

рис. 73, A_i и B_i — связующие углы; C_i — промежуточные углы; s_i — связующие стороны; c_i — промежуточные стороны; b — базисная сторона (исходная).

Средние квадратические ошибки сторон. При уравнивании по углам относительная средняя квадратическая ошибка длины связующей стороны выражается формулой

$$\frac{m_{s_n}^2}{s_n^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \frac{2}{3} \sum_1^n (\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i), \qquad \text{(III. 1.8)}$$

где m_{s_n} — средняя квадратическая ошибка связующей стороны n-го треугольника; m_b — средняя квадратическая ошибка исходной стороны; μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла (угл. с); ρ — число секунд в радиане.

Выражение $\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}^2 A_i + \operatorname{ctg}^2 B_i + \operatorname{ctg} A_i \operatorname{ctg} B_i)$ называется ошибкой геометрической связи треугольника или обратным весом его.

При построении триангуляции наиболее выгодной формой треугольника принимается равносторонняя. Для нее $\operatorname{ctg} A_i = \operatorname{ctg} B_i = \operatorname{ctg} C_i = \operatorname{ctg} 60° = 1/\sqrt{3}$ и ошибка геометрической связи равна 2/3, а формула (III.1.8) принимает вид

$$\frac{m_{s_n}^2}{s_n^2} = \frac{m_b^2}{b^2} + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \frac{2}{3} n, \qquad \text{(III. 1.9)}$$

где n — число треугольников ряда от исходной до искомой стороны. Полагая, что ошибка исходной стороны очень мала в сравнении с ошибками развиваемой сети и ею можно пренебречь, получим

$$\frac{m_{s_n}}{s_n} = \frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{2}{3}n}. \qquad \text{(III. 1.10)}$$

Из этой формулы видно, что ошибка собственно «передачи» стороны по ряду триангуляции пропорциональна корню квадратному из числа треугольников ряда.

Для упрощения подсчетов по формуле (III.1.8) и при отсутствии вычислительных машин принято вместо котангенсов углов отыскивать приращения логарифмов синуса угла при изменении его на 1″ (δ), исходя из формулы

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\rho\delta_A}{M}.$$

В этом случае, а также учитывая известное соотношение

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_{\lg s}}{M \cdot 10^k}. \qquad \text{(III. 1.11)}$$

где $M = 0{,}43429$, переходят к определению ошибки логарифма стороны по формуле

$$m^2_{\lg s_n} = m^2_{\lg b} + \frac{2}{3}\mu^2 \sum_1^n \left(\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B\right) =$$

$$= m^2_{\lg b} + \frac{2}{3}\mu^2 \sum_1^n R, \qquad \text{(III. 1.12)}$$

где $m_{\lg s_n}$ и $m_{\lg b}$ — средние квадратические ошибки логарифмов конечной и исходной сторон триангуляции, выраженные в k-х единицах логарифма.

Величины $R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B$ табулированы (табл. 44) и очень просто выбираются по связующим углам A_i и B_i.

В случае измерения и уравнивания направлений может быть использована приближенная формула

$$m^2_{\lg s} = \frac{4}{3} m^2 \sum_1^n R = m^2 \frac{1}{p_s}, \qquad \text{(III. 1.13)}$$

где $1/p_s = (4/3) \sum_1^n R$, которая получается, если в формуле (III.1.12) не учитывать ошибку исходных данных, а ошибку угла μ заменить ошибкой направления m (выраженной в угл. с) по формуле $\mu = m\sqrt{2}$.

Для подсчета средних квадратических ошибок промежуточных сторон нужно в формулах (III.1.8), (III.1.12), (III.1.13) в последнем треугольнике ряда вместо $\operatorname{ctg} A_i$ или δ_{A_i} принимать $\operatorname{ctg} C_i$ или δ_{C_i}.

Если ряд состоит из геодезических четырехугольников или центральных систем, подсчет ошибки логарифма стороны можно п оизводить по формуле, предложенной В. А. Магницким,

$$m^2_{\lg s_n} = m^2_{\lg b} + \frac{4}{3} m^2 \frac{D - (C - C_0)}{D} \sum R, \qquad \text{(III. 1.14)}$$

где D — число направлений в фигуре без двух исходных (по исходной стороне); C — число независимых условий в фигуре; C_0 — число условий в фигуре с отброшенными избыточными диагоналями (при превращении ее в простую цепь треугольников).

В практике при подсчете обратного веса ряда триангуляции при измерении направлений обратные веса $1/p_s$ фигур принимают:

для треугольников

$$\frac{1}{p_s} = \frac{4}{3} R; \qquad \text{(III. 1.15)}$$

для геодезических четырехугольников и центральных систем

$$\frac{1}{p_s} = \frac{4}{3} \cdot \frac{D\,(C - C_0)}{D} R = 1{,}1R \approx R. \qquad \text{(III. 1.15')}$$

ТАБЛИЦА 44

Величины $R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B$

(в единицах шестого знака логарифма)

Градусы	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
20	245	189	153	130	113	100	91	74	61	51	43	33	23	16	11	8	5	4	2	1	0	0	0
22	232	177	142	119	103	91	81	67	56	47	40	33.	23	16	11	7	5	4	2	1	0	0	
24	221	167	134	111	95	83	74	61	51	43	40	33.	23	16	11	7	5	4	2	1	0	0	
26	213	160	126	104	89	77	68	61	56	51	43	33	23	16	11	7	5	4	2	1	0	0	
28	206	153	120	99	83	72	63	57	51	47	43	33	23	16	11	7	5	4	2	1	0	0	
30	199	148	115	94	79	68	59	53	48	43	40	33.	23	16	11	7	5	4	2	1	0	0	
35	188	137	106	85	71	60	52	46	41	37	33.	27	23	16	11	8	5	4	2	1	0	0	
40	179	129	99	79	65	54	47	41	36	32	29	23	19	13	9	7	5	4	2	1	0	0	
45	172	124	93	74	60	50	43	37	32	28	25	20	16	13	9	7	5	4	2	1	0	0	
50	167	119	89	70	57	47	39	34	29	26	23	18	14	11	9	7	5	4	2	1	0	0	
55	162	115	86	67	54	44	37	32	27	24	21	16	12	10	8	6	4	3	2	1	0	0	
60	159	112	83	64	51	42	35	30	25	22	19	14	11	9	7	5	4	3	2	1	0	0	
65	155	109	80	62	49	40	33	28	24	21	18	13	10	8	6	5	4	3	2	1	0	0	
70	152	106	78	60	48	38	32	27	23	19	17	12	9	7	5	4	3	2	1	1	0	0	
80	147	102	74	57	45	36	29	24	20	17	15	10	7	5	4	3	2	1	1	0	0	0	
90	143	98	71	54	42	33	27	22	19	16	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	
100	138	95	68	51	40	31	25	21	17	14	12	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	
110	134	91	65	49	38	30	24	19	16	13	11	7	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	
120	129	88	62	46	36	28	22	18	15	12	10	7	5	3	2	2	1	1	1	0	0	0	
130	125	84	59	44	34	26	21	17	14	12	10	7	5	4	3	2	1	1	1	0	0	0	
140	119	80	56	42	32	25	20	17	14	12	10	8	6	4	3	2	1	1	1	0	0	0	
150	112	75	54	40	32	26	21	18	16	15	13	10	8	6	4	3	2	2	1	1	0	0	
160	107	74	56	45	38	33	27	24	20	17	15	12	9	7	5	4	3	2	2	1	1	0	

Средние квадратические ошибки азимутов (дирекционных углов) сторон. Пунктирной линией (см. рис. 73) показана ходовая линия, по которой осуществляется передача азимутов сторон от исходного азимута α_0 к определяемому α_n.

При уравнивании ряда по углам ошибка передачи азимута на n треугольников определяется формулой

$$m_{\alpha_n} = \mu \sqrt{\frac{2}{3} n}, \qquad \text{(III. 1.16)}$$

а с учетом ошибки исходного азимута m_{α_0} — формулой

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{2}{3} \mu^2 n}, \qquad \text{(III. 1.17)}$$

где m_{α_n} — средняя квадратическая ошибка азимута искомой стороны (угл. с); μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла. Из формул (III.1.10) и (III.1.16) следует, что обратные веса сторон и азимутов в простой цепи равносторонних треугольников равны между собой:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{1}{p_\alpha} = \frac{2}{3} n. \qquad \text{(III. 1.18)}$$

При уравнивании цепи треугольников по направлениям могут быть использованы формулы проф. А. А. Изотова:

для связующей стороны

$$m_{\alpha_n}^2 = m_{\alpha_0}^2 + \frac{2n+5}{10} \mu^2; \qquad \text{(III. 1.19)}$$

для промежуточной стороны

$$m_{\alpha_n}^2 = m_{\alpha_0}^2 + \frac{2n}{10} \mu^2, \qquad \text{(III. 1.19')}$$

где μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Продольные и поперечные сдвиги ряда. В результате действия ошибок измерений конечная точка ряда триангуляции смещается вдоль своей оси на величину t (см. рис. 73), называемую продольным сдвигом ряда, и поперек оси на величину q, называемую поперечным сдвигом ряда.

Общий сдвиг конечной точки

$$u = \sqrt{t^2 + q^2}. \qquad \text{(III. 1.20)}$$

Он характеризует полную ошибку в положении точки. При уравнивании ряда триангуляции по углам среднее квадратическое значение продольного сдвига, обычно обозначаемого через m_L, равно

$$m_L = L \sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \frac{4k^2 \mp 3k + 5}{9k}}, \qquad \text{(III. 1.21)}$$

где L — диагональ ряда (расстояние между конечными пунктами ряда); k — число промежуточных сторон в диагонали ряда. Знак «минус» перед значением $3k$ принимается в том случае, когда ряд состоит из нечетного числа треугольников, а «плюс» — когда ряд состоит из четного числа треугольников.

При уравнивании ряда по направлениям или по углам в случае измерения направлений может быть применена формула проф. А. А. Изотова

$$\frac{m_L}{L} = \sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \left(\frac{4k^2 - 3k + 5}{9k} - \frac{10k^2 - 7k - 9}{300k^2}\right)}. \qquad \text{(III. 1.22)}$$

Влияние второго члена в круглых скобках повышает точность примерно на 4 %. Поэтому в большинстве случаев им можно пренебречь.

Для вычисления поперечного сдвига ряда m_q при уравнивании по направлениям:

при нечетном числе треугольников

$$m_q = \frac{L}{\rho} \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{2}{15} \mu^2 \frac{k^2 + k + 3}{k}}; \qquad \text{(III. 1.23)}$$

при четном числе треугольников

$$m_q = \frac{L}{\rho} \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{1}{15} \mu^2 \frac{2k^2 + 5k + 5}{k}}. \qquad \text{(III. 1.24)}$$

При уравнивании цепи по углам в случае измерения направлений значение второго члена после извлечения корня увеличивается на 15 %. В случае уравнивания звена между двумя базисами самым слабым местом будет k-я сторона в середине ряда. Ошибки этой стороны можно вычислять от обоих базисов и из них принимать среднее весовое значение по формуле

$$m_{s_k} = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}. \qquad \text{(III. 1.25)}$$

Оценка точности элементов ряда триангуляции, построенного из равносторонних треугольников и уравненного за условия фигур, базисов и азимутов по направлениям.

Средняя квадратическая ошибка логарифма сторон

$$m_{\lg s_n}^2 = \frac{m_{\lg b}^2}{2} + 0{,}4\mu^2 \left\{\frac{8(N-n)n}{N} - \frac{2N+11}{5N+12}\right\}, \qquad \text{(III. 1.26)}$$

где N — общее число треугольников ряда между базисами; n — число треугольников до определяемой стороны; μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла.

Практически можно пользоваться (без учета ошибок исходных сторон) формулой

$$m_{\lg s_n}^2 = 3\mu^2 \frac{(N-n)n}{N}. \qquad \text{(III. 1.27)}$$

Для перехода от ошибки логарифма сторон к относительным или абсолютным ошибкам сторон используют формулу (III.1.11).

Средние квадратические ошибки азимутов (дирекционных углов) сторон

$$m_{\alpha_n}^2 = \frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + \frac{\mu^2}{25}\left[(5n+12) - \frac{(5n+6)^2}{5N+12}\right]. \qquad \text{(III. 1.28)}$$

При уравнивании по углам пользуются формулой

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + \frac{2}{3}\mu^2\frac{(N-n)\,n}{N}}. \qquad \text{(III. 1.28')}$$

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов:

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2}\left[\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{2k^2-3k+10}{9k}\cdot\frac{\mu^2}{\rho^2}\right]; \qquad \text{(III. 1.29)}$$

$$m_q = \frac{L}{\rho\sqrt{2}}\sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{k^2+2k+12}{15k}\mu^2}. \qquad \text{(III. 1.30)}$$

Оценка точности ряда триангуляции, построенного из равносторонних треугольников и уравненного по углам за условия фигур, базисов, азимутов и координат. Для оценки точности элементов прямолинейного ряда триангуляции, проложенного между твердыми исходными пунктами без учета ошибок последних, можно воспользоваться формулами А. Т. Черкозьянова *.

Средняя квадратическая ошибка логарифма связующей стороны

$$m_{\lg s_n} = 1{,}7\mu\sqrt{\frac{n(N-n)}{N} - 3\frac{n^2(N-n)^2}{N(N^2+8)}}. \qquad \text{(III. 1.31)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута (дирекционного угла) стороны

$$m_{\alpha_n} = 0{,}8\mu\sqrt{\frac{n(N-n)}{N} - 3\frac{n^2(N-n)^2}{N(N^2+8)}}. \qquad \text{(III.1.32)}$$

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов в середине ряда триангуляции

$$m_{L/2} = \frac{L}{17}\cdot\frac{\mu}{\rho}\sqrt{\frac{N^2+N+75}{N-1}}. \qquad \text{(III.1.33)}$$

Оценка точности элементов сдвоенной цепи треугольников при уравнении по углам за условия фигур, полюсов и горизонта.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны.

На рис. 74 изображен ряд триангуляции, построенный из сдвоенной цепи треугольников, где b — исходная сторона; α_0 — азимут исходной стороны; s_n — определяемая сторона; α_n — азимут определяемой стороны; N' — число всех центральных систем, составляющих ряд; K — число центральных систем, отделяющих оцениваемую сторону от исходной; μ — средняя квадратическая ошибка измеренного угла (угл. с); n — число треугольников, необходимых для определения искомой стороны.

* *А. Т. Черкозьянов.* Оценка точности ряда треугольников между исходными сторонами триангуляции высшего класса, уравненного по углам за координатные условия. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, вып. 6, с. 75—90.

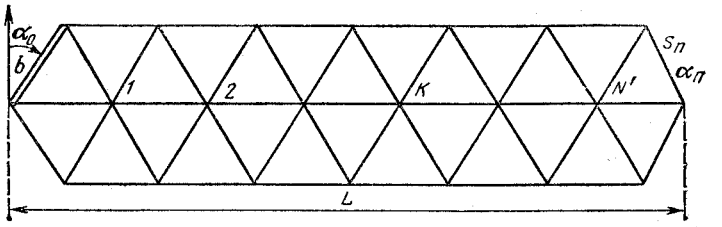


Рис. 74. Схема двойного ряда треугольников триангуляции

По формуле А. И. Дурнева

$$m_{\lg s_k} = \sqrt{m_{\lg b}^2 + (2K+3)\,\mu^2\delta_0^2}, \qquad \text{(III.1.34)}$$

где

$$\delta_0^2 = \frac{\sum_1^n R}{3n}; \qquad R = \delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A\delta_B.$$

Средняя квадратическая ошибка азимутов сторон (формула А. И. Дурнева)

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \frac{2}{3}\mu^2\left(\frac{4}{3}K+1\right)}. \qquad \text{(III.1.35)}$$

Оценка точности элементов сдвоенной цепи равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, полюсов, горизонтов, базисов и азимутов.

По формулам А. В. Заводовского * средняя квадратическая ошибка в логарифме выходной стороны K-й центральной системы

$$m_{\lg s_k}^2 = 3\mu^2\left\{K + 1{,}3 - \frac{(K+1)^2}{N'+1{,}4}\right\}. \qquad \text{(III.1.36)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута выходной стороны K-й центральной системы

$$m_\alpha^2 = \mu^2\left\{0{,}67K + 0{,}75 - \frac{(0{,}67K+0{,}60)^2}{0{,}67N'+1}\right\}. \qquad \text{(III.1.37)}$$

Среднее квадратическое значение продольного сдвига

$$m_L^2 = \frac{\mu^2L^2}{\rho^2}\left\{\frac{2k^2+1{,}24k+2{,}55}{9k} - \frac{k^2+0{,}83k+0{,}17}{6k+2{,}5} - \frac{50k+57}{100k^2}\right\}. \qquad \text{(III.1.38)}$$

* *А. В. Заводовский.* Оценка точности линейных триангуляций. — Научные записки Львовского политехнического института, 1954, вып. XVIII, № 2.

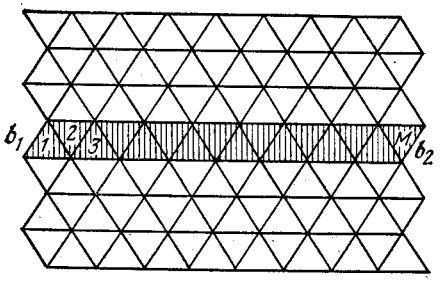


Рис. 75. Схема сплошной сети триангуляции

Среднее квадратическое значение поперечного сдвига*

$$m_q^2 = \frac{\mu^2 L^2}{\rho^2}\left\{\frac{(k+2)(k+1)}{12k} - \frac{36k^2+68k+66}{500k} + \frac{322}{250k^2}\right\}, \qquad \text{(III.1.38')}$$

где k — число промежуточных сторон; диагональ $L = sk$.

Для определения ошибок логарифма стороны и азимута могут быть применены также формулы К. Л. Проворова, которые приведены в его работе «О точности сплошных сетей триангуляции» (М., Геодезиздат, 1956):

$$m_{\alpha_n} = \mu\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+5/4)(N-n+5/4)-1}{N+11/6}};$$

$$m_{\lg s_n} = \frac{10^6 M}{\rho} m_{\alpha_n} = 2{,}1 m_{\alpha_n}; \qquad \text{(III.1.39)}$$

$$m_{\alpha_n} = \frac{\rho}{10^6 M} m_{\lg s_n} = 0{,}47 m_{\lg s_n},$$

где N — число треугольников между исходными сторонами; n — число треугольников до определяемой стороны; M — модуль неперовых логарифмов.

Как показывают расчеты, точность передачи длин сторон и азимутов в двойной цепи треугольников повышается по сравнению с простой цепью примерно на 30 %.

Оценка точности элементов сплошной сети триангуляции, построенной из равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов и полюсов (свободных сетей). Наиболее полные формулы ошибок различных элементов сплошных сетей даны К. Л. Проворовым в его работе «О построении сплошных сетей триангуляции» (М., Геодезиздат, 1957) для ряда триангуляции, выделенного из сети штриховкой (рис. 75) с N треугольниками между исходными сторонами (с исходными базисами и азимутами) и n треугольниками от исходной стороны до определяемой.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg s_n} = 0{,}63\mu\sqrt{n-1+10t_{(n)}}. \qquad \text{(III.1.40)}$$

* Формула для поперечного сдвига выведена при условии, что уравнивание проведено по направлениям.

ТАБЛИЦА 45

Величины $t_{(n)}$

n	$t_{(n)}$	n	$t_{(n)}$	n	$t_{(n)}$
1	0,457	8	0,060	15	0,006
2	0,375	9	0,043	16	0,004
3	0,291	10	0,031	17	0,003
4	0,219	11	0,022	18	0,002
5	0,161	12	0,016	19	0,002
6	0,117	13	0,011	20	0,001
7	0,084	14	0,008		

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны

$$m_{\alpha_n} = 0{,}3\mu\sqrt{n-1+10t_{(n)}}. \qquad \text{(III.1.41)}$$

В этих формулах $t_{(n)} = (1/2)^{n/2} - (1/2)^{n+1}$ для удобства подсчетов величины $t_{(n)}$ табулированы (табл. 45).

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов

$$m_L = m_q = \frac{L}{\rho} m_T, \qquad \text{(III.1.42)}$$

где L — диагональ выделенного из сети ряда треугольников; m_T — средняя квадратическая ошибка азимута диагонали (угл. с) избранного ряда, равная

$$m_T = \mu\sqrt{\frac{n^2-3n+50}{45n}}. \qquad \text{(III.1.43)}$$

Суммарная ошибка u положения пункта

$$u = \sqrt{m_L^2 + m_q^2}. \qquad \text{(III.1.44)}$$

Оценка точности сплошной сети триангуляции, построенной из равносторонних треугольников при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, базисов, азимутов.

Средняя квадратическая ошибка логарифма стороны

$$m_{\lg s_n} = \frac{\mu}{3}\sqrt{N-6{,}5+48t_{(N/2)}}, \qquad \text{(III. 1.45)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны

$$m_{\alpha_n} = 0{,}15\mu\sqrt{N-6{,}5+48t_{(N/2)}}, \qquad \text{(III.1.46)}$$

где $t_{(N/2)}$ выбирается из табл. 45 по числу треугольников от исходной стороны до середины ряда.

Средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов

$$m_L = m_q = \frac{L}{\rho} m_T, \qquad \text{(III.1.47)}$$

где

$$m_T = \mu \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 50}{45n} - \frac{n^2 - 5n + 80}{70N}}. \qquad \text{(III.1.48)}$$

Средняя квадратическая ошибка положения пункта

$$u = \frac{L\sqrt{2}}{\rho} m_T. \qquad \text{(III.1.49)}$$

Формулы (III.1.42) и (III.1.47) показывают, что продольные и поперечные сдвиги в сплошной сети триангуляции равны между собой.

Оценка точности элементов сплошной сети триангуляции, построенной из треугольников произвольной формы при уравнивании по углам за условия фигур, горизонтов, полюсов, базисов и азимутов. Для среднего квадратического значения продольных m_t и поперечных $m_{q'}$ сдвигов двух смежных пунктов сети К. Л. Проворовым предложены формулы:

$$m_t = \frac{s}{\rho} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\rho \frac{m_b}{b}\right)^2 + \mu^2 \left(\frac{\delta_0}{\delta_{60°}}\right)^2 \frac{N+15}{100}}; \qquad \text{(III.1.50)}$$

$$m_{q'} = \frac{s}{\rho} \sqrt{\frac{1}{2} m_{\alpha_0}^2 + \mu^2 \frac{N+15}{100}}; \qquad \text{(III.1.51)}$$

$$u = \sqrt{m_t^2 + m_{q'}^2}. \qquad \text{(III.1.52)}$$

В этих формулах m_b и m_{α_0} — средние квадратические ошибки исходных данных; s — длина стороны треугольника; $\delta_0 = [\delta]/3n$ — показатель формы сети, где δ — перемены логарифма синусов углов треугольников при изменении их на 1″. (У К. Л. Проворова $\delta_0 = 1{,}33$).

Приближенно для равносторонних треугольников и без учета ошибок исходных данных можно принимать, что

$$m_t = m_{q'} = \frac{s\mu}{10\rho} \sqrt{N + 15}. \qquad \text{(III.1.53)}$$

III.1.3. Предвычисление и оценка точности трилатерации

Зависимость между ошибками углов и ошибками сторон треугольника. Дифференциальная зависимость между ошибками углов и сторон (рис. 76) выражается формулой

$$dA = \frac{\rho}{h_a}(da - \cos C db - \cos B dc), \qquad \text{(III.1.54)}$$

где h_a — высота треугольника, опущенная из угла A на противоположную сторону a; dA, da, db, dc — дифференциалы угла и сторон.

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$m_A^2 = \frac{\rho^2}{h_a^2}\left(m_a^2 + \cos^2 C m_b^2 + \cos^2 B m_c^2\right), \qquad \text{(III.1.55)}$$

где m_A — средняя квадратическая ошибка определения угла (угл. с); m_a, m_b, m_c — средние квадратические ошибки измерения сторон.

Для равносторонних треугольников

$$m_A^2 = \frac{\rho^2}{3s^2}\left(4m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right). \qquad \text{(III.1.56)}$$

При равноточном измерении сторон

$$m_A = \frac{m_s}{s}\rho\sqrt{2} \qquad \text{(III.1.57)}$$

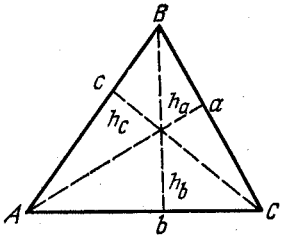


Рис. 76. Связь измеренных сторон и углов треугольника

и формула (III.1.55) будет иметь вид

$$m_A^2 = m_s^2 \frac{\rho^2}{h_a^2}(1 + \cos^2 B + \cos^2 C), \qquad \text{(III.1.58)}$$

где

$$\frac{\rho^2}{h_a^2}(1 + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

— ошибка геометрической связи треугольника.

Исходя из формулы (III.1.57), можно подсчитать необходимую точность измерения сторон при заданной ошибке измерения угла.

Наиболее простые формулы для ошибок различных элементов равностороннего ряда трилатерации выведены С. А. Бутлером *.

Оценка точности элементов равностороннего ряда трилатерации. Условные обозначения:

m_{α_0} — средняя квадратическая ошибка азимута исходной стороны (угл. с); m_{α_n} — средняя квадратическая ошибка азимута конечной стороны (угл. с); m_{α_k} — средняя квадратическая ошибка азимута K-го треугольника (угл. с); m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; s — длина стороны; n — число треугольников ряда; k — номер связующей стороны K-го треугольника; m_L — среднее квадратическое значение продольного сдвига; m_q — среднее квадратическое значение поперечного сдвига.

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны свободного ряда трилатерации (неуравненного)

$$m_{\alpha_n}^2 = m_{\alpha_0}^2 + \frac{4}{3}\frac{m_s^2}{s^2}\rho^2 n. \qquad \text{(III.1.59)}$$

Средняя квадратическая ошибка азимута связующей стороны при уравнивании за условие азимутов

$$m_{\alpha_k}^2 = \frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \rho^2 \frac{k}{n}(n - k). \qquad \text{(III.1.60)}$$

---

* *С. А. Бутлер.* Уравнивание тригонометрических сетей, определенных длинами сторон. — Геодезист, 1939, № 9, с. 22—35.

Среднее квадратическое значение продольного и поперечного сдвигов ряда трилатерации, уравненного за условие азимутов:

$$m_L = \frac{m_s}{2}\sqrt{\frac{n^2-1}{n}}; \qquad \text{(III.1.61)}$$

$$m_q = m_s\sqrt{\frac{n-1}{36}(n^2+n+48)}. \qquad \text{(III.1.62)}$$

Кроме этих формул могут быть применены формулы К. Л. Проворова для определения ошибки взаимного положения несмежных пунктов:

$$m_L = m_s\sqrt{\frac{n(2N-n+1)}{2(2N+1)}}; \qquad \text{(III.1.63)}$$

$$m_q = m_s\sqrt{\frac{n(4n^2-3n+26)}{36}-\frac{(2n^2-n-4)^2}{24(2N+1)}}, \qquad \text{(III. 1.64)}$$

где N — число треугольников между исходными сторонами; n — число треугольников до определяемого пункта.

Оценка точности ряда, построенного из правильных геодезических четырехугольников с измеренными сторонами, уравненного за условия фигур.

На рис. 77 показан ряд геодезических четырехугольников с измеренными сторонами, где a — исходная сторона; b — продольная сторона; $l = b/a$ — продвиг фигуры; n — число четырехугольников; m_a — средняя квадратическая ошибка исходной стороны; m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; m_α — средняя квадратическая ошибка азимута определяемой стороны; m_L и m_q — средние квадратические значения продольных и поперечных сдвигов ряда.

Средняя квадратическая ошибка передачи азимута. Если передача азимута осуществляется так, как это показано на рис. 77 пунктиром, то ошибка азимута выразится формулой

$$m_\alpha = \frac{m_a}{a}\rho\sqrt{2n}. \qquad \text{(III.1.65)}$$

Исследования И. А. Кутузова * показывают, что лучшей фигурой является четырехугольник, по форме близкий к квадрату или ромбу. Допустимо изменение формы четырехугольника до прямоугольника или параллелограмма с углом против малой диагонали не менее 60° и с продвигом l от 0,6 до 1,4.

* *А. И. Кутузов.* Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 2, с. 87—100.

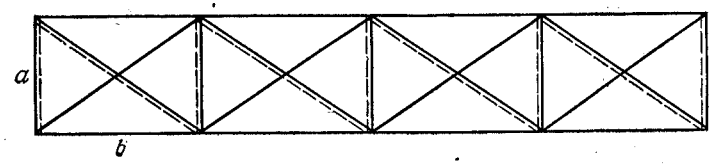


Рис. 77. Схема ряда геодезических четырехугольников

Среднее квадратическое значение продольного сдвига

$$m_L = m_s\sqrt{nA-B}, \qquad \text{(III.1.66)}$$

где

$$A = 1-\frac{l^2D}{(D+1)^2}; \qquad B = \frac{l^2}{4t}-\frac{l^2(D^2+1)^2}{D^3(D+1)^2};$$

$$D = 4t-\frac{16t^2+1}{64t^2}; \qquad t = 1+l^2; \qquad l = \frac{b}{a}.$$

Значения A и B в зависимости от продвига ряда представлены в табл. 46.

Среднее квадратическое значение поперечного сдвига

$$m_q = m_s\sqrt{An^3-Bn^2-Cn+E}, \qquad \text{(III.1.67)}$$

где

$$A = 2t-\frac{4}{3}\frac{\Delta^2D}{(D+1)^2}; \qquad B = \frac{D}{D^2-1}; \qquad \Delta = 2l^2+3;$$

$$C = 1-\frac{\Delta^2D}{3(D+1)^2}-\frac{2\Delta D^2(D+3)}{(D^2-1)(D+1)^2}+\frac{2D}{D^2-1};$$

$$E = 1-\frac{D}{D^2-1}+\frac{\Delta^2D(D^2-32D-69)-20D^2(D-1)}{(D^2-1)(D+1)^2}-$$

$$-\frac{\Delta^2[D(D^2-6D-10)-30(D^2+1)]}{D^4}.$$

Значения коэффициентов A, B, C и E для различных продвигов приведены в табл. 47.

Оценка точности сплошной сети трилатерации, построенной из равносторонних треугольников. Из сплошной сети трилатерации выделяется ряд треугольников, внутри которого находится оцениваемый элемент сети. При этом одна из координатных осей совпадает с направлением диагонали ряда, проходящей по промежуточным сторонам его. В начале ряда находится исходная сторона и азимут.

Средние квадратические ошибки элементов сети при уравнивании за условия центральных систем и азимутов. Наиболее просты формулы К. Л. Проворова *, которые дают хорошее приближение для элементов сети, удаленных от исходных данных не менее чем на два треугольника.

Средняя квадратическая ошибка азимута стороны треугольника

$$m_\alpha = \frac{6}{5}\cdot\frac{m_s}{s}\rho. \qquad \text{(III.1.68)}$$

Средние квадратические ошибки взаимного положения смежных пунктов:

продольного сдвига

$$m_t = \frac{5}{6}m_s;$$

* *К. Л. Проворов.* Точность элементов сети линейной триангуляции. — Труды НИИГАиК, т. XI, Новосибирск, 1958, с. 3—21.

$l = \frac{b}{a}$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
A	0,976	0,952	0,925	0,900	0,878
B	0,008	0,014	0,019	0,022	0,022

поперечного сдвига

$$m_{q'} = \frac{6}{5} m_s; \qquad \text{(III.1.69)}$$

общая ошибка

$$u = \sqrt{m_l^2 + m_{q'}^2} = \frac{10}{7} m_s.$$

Средние квадратические ошибки взаимного положения несмежных пунктов (продольные и поперечные сдвиги):

$$m_L = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(n+11)}{10(N+25)}}; \qquad \text{(III.1.70)}$$

$$m_q = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(5n^2+12n+8)}{30(N+25)}}; \qquad \text{(III.1.71)}$$

$$u = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(5n^2+15n+41)}{30(N+25)}}. \qquad \text{(III.1.72)}$$

Средние квадратические ошибки направления диагонали ряда

$$m_T = \frac{m_s}{L} \rho \sqrt{\frac{(N+15)(5n^2+12n+8)}{30(N+25)}}, \qquad \text{(III.1.73)}$$

где L — диагональ ряда; N — число треугольников между исходными азимутами сторон ряда; n — число треугольников до определяемого элемента.

Средняя квадратическая ошибка уравненного угла треугольника

$$m_{уг} = \frac{5}{4} \cdot \frac{m_s}{s} \rho. \qquad \text{(III.1.74)}$$

l	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
A	+0,1070	+0,2401	+0,4267	+0,6667	+0,9600
B	+0,239	+0,198	+0,160	+0,129	+0,105
C	−0,846	−0,855	−0,898	−0,979	−1,096
E	+2,84	+2,24	+1,76	+1,42	+1,18

1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0
0,858	0,842	0,829	0,818	0,786	0,771
0,022	0,021	0,019	0,018	0,010	0,007

Средняя квадратическая ошибка m_a любой уравненной стороны a треугольника

$$\frac{m_a}{a} = \frac{5}{6} \cdot \frac{m_s}{s}. \qquad \text{(III.1.75)}$$

Оценка точности рядов с измеренными углами и сторонами. В случае измерения в ряде треугольников с примерно одинаковой точностью как сторон, так и углов точность определения отдельных элементов ряда повышается. Ниже приводятся формулы К. А. Лапинга *:

а. В ряде измерены все углы и все стороны треугольников:

для связующих сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{6m_s^4}{9m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2};$$

для промежуточных сторон:

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{2m_s^4}{3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2}; \qquad \text{(III.1.76)}$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{4} m_s^2 + \frac{n}{8}\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2 - \frac{3\left(m_s^4 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2 m_s^2 + \frac{\mu^4}{4}\frac{s^4}{\rho^4}\right)(n-1)}{8\left(3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2\right)};$$

* *К. А. Лапинг.* О точности построения рядов с измеренными сторонами и углами. — Геодезия и картография, 1957, № 4, с. 17—19.
К. А. Лапинг. Точность определения длин сторон в рядах с измеренными углами и сторонами. — Геодезия и картография, 1959, № 2, с. 12—14.

ТАБЛИЦА 47

1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	4,0
+1,3067	+1,7067	+2,1600	+2,6667	+6,0000	+10,666
+0,086	+0,071	+0,059	+0,050	+0,026	+0,015
−1,246	−1,429	−1,643	−1,886	−3,526	−5,843
+1,02	+0,91	+0,83	+0,77	+0,62	+0,57

$$m_q^2 = \frac{3}{4}(n+1)\,m_s^2 + \frac{n(n^2-1)}{72}\cdot\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2 - \frac{108(n-1)m_s^4 - 34(n-1)\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2 m_s^2 + (n-1)^3\frac{s^4}{\rho^4}\mu^4}{96\left(3m_s^2 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2\right)},$$

где m_s' — средняя квадратическая ошибка уравненного значения стороны; m_s — средняя квадратическая ошибка измеренной стороны; m_L — среднее квадратическое значение продольного сдвига; m_q — среднее квадратическое значение поперечного сдвига.

б. В ряде измерены все углы треугольников и связующие стороны:

для связующих сторон:

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{6m_s^4}{9m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2};$$

для промежуточных сторон:

$$m_s'^2 = \frac{m_s^2}{3} + \frac{8n-9}{18n}\cdot\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2;$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{4}m_s^2 + \frac{n}{8}\cdot\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2; \qquad \text{(III.1.77)}$$

$$m_q^2 = \frac{3}{4}(n+1)\,m_s^2 + \frac{n(n^2-1)}{72}\cdot\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2.$$

в. В ряде измерены все углы и промежуточные стороны вдоль одной диагонали:

для связующих сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 + \frac{4n-3}{6n}\left(\frac{s}{\rho}\mu\right)^2 - \frac{2\left(3m_s^2 + 2\frac{s^2}{\rho^2}\mu^2\right)}{27\left(m_s^2 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2\right)};$$

для непосредственно измеренных промежуточных сторон

$$m_s'^2 = m_s^2 - \frac{2m_s^4}{3\left(m_s^2 + \frac{s^2}{\rho^2}\mu^2\right)}; \qquad \text{(III.1.78)}$$

для неизмерявшихся промежуточных сторон:

$$m_s'^2 = \frac{m_s^2}{3} + \frac{2(n-3)s^2}{3n\rho^2}\mu^2;$$

$$m_L^2 = \frac{n+1}{2}m_s^2 + \frac{n}{4}\left(\frac{s}{\rho}\mu\right)^2;$$

$$m_q^2 = \frac{n+1}{72}(n^2 - n + 18)\left(\frac{s}{\rho}\mu\right)^2.$$

Для определения продольных и поперечных сдвигов могут быть использованы приближенные формулы К. Л. Проворова *, которые до нескольких сантиметров (до 5 см) можно считать одинаковыми для звеньев линейной (трилатерации), угловой и линейно-угловой триангуляций, а также для достаточно прямолинейных звеньев полигонометрии.

Формулы выводились для ряда, состоявшего из равнобедренных треугольников со связующими углами B. При измерении и уравнивании направлений ощутимо изменяется только средняя квадратическая ошибка поперечного сдвига (до 30 %) в тех случаях, когда на пунктах измеряется более двух направлений.

Продольный сдвиг

а. При измерении трех сторон и трех углов треугольника или только трех сторон и промежуточных углов

$$m_L = m_s\sqrt{\frac{n}{5}}. \qquad \text{(III.1.79)}$$

б. При измерении в треугольнике всех углов и только связующих сторон или без измерения связующих углов и промежуточных сторон (в полигонометрии):

когда ошибка измерения сторон постоянна, т. е. $m_s = \text{const}$,

$$m_L = m_s \cos B\sqrt{n}; \qquad \text{(III.1.80)}$$

когда ошибка измерения сторон пропорциональна расстоянию, т. е. $m_s/s = \text{const}$,

$$m_L = \frac{m_s}{s}\frac{L}{\sqrt{n}}. \qquad \text{(III.1.81)}$$

в. При измерении только всех углов треугольника

$$m_L = \frac{\mu}{\rho}L\operatorname{ctg}B\sqrt{\frac{n}{6}}. \qquad \text{(III.1.82)}$$

Поперечный сдвиг

а. При измерении в треугольнике только всех углов, или при измерении всех сторон и углов, или при измерении всех углов и связующих сторон

$$m_q = \frac{\mu}{\rho}L\sqrt{\frac{n}{18}}. \qquad \text{(III.1.83)}$$

б. При измерении всех сторон и только промежуточных углов или при измерении только связующих сторон и промежуточных углов (полигонометрии)

$$m_q = \frac{\mu}{\rho}L\sqrt{\frac{n}{12}}. \qquad \text{(III.1.84)}$$

в. При измерении только всех сторон треугольника

$$m_q = \frac{m_s}{6}n\operatorname{ctg}B\sqrt{n(9+10\cos 2B)}. \qquad \text{(III.1.85)}$$

Оценка точности рядов трилатерации, построенных радиогеодезическими методами. Для рядов трилатерации, построенных из различных правильных геометрических фигур и сторонами, измеренными радиогеодезическими методами, при уравнивании за условия этих фигур и условие азимутов между конечными сторонами К. Л. Проворовым рекомендуются следующие формулы для подсчета продольного m_L и поперечного m_q сдвигов ряда.

* *К. Л. Проворов.* Сравнение точности угловой, линейной и линейно-угловой триангуляции. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, № 1, с. 57—64.

ТАБЛИЦА 48

l	a	b	l	a	b
0,5	0,79	19,07	2,0	0,07	3,19
1,0	0,23	6,54	2,5	0,04	2,76
1,5	0,11	4,09			

1. Для ряда, построенного из N равносторонних треугольников (при N четном):

$$m_L = 0{,}52 m_s \sqrt{N};$$
$$m_q = 0{,}17 m_s \sqrt{N\,(N^2 + 2{,}19N + 28{,}83)}. \qquad \text{(III.1.86)}$$

2. Для ряда, построенного из N геодезических четырехугольников прямоугольной формы с продвигом l от 0,5 до 2,5:

$$m_L = 0{,}70 m_s (1 - 0{,}1l)\sqrt{N};$$
$$m_q = 0{,}41 m_s \cdot l \sqrt{N\,(N^2 - aN + b)}, \qquad \text{(III.1.87)}$$

где коэффициенты a и b в зависимости от продвига l имеют значения, приведенные в табл. 48.

3. Для ряда, построенного из N' сопряженных центральных систем (сдвоенного ряда треугольников):

$$m_L = 0{,}61 m_s \sqrt{N' + 2};$$
$$m_q = 0{,}25 m_s \sqrt{N'\,(N'^2 + 7{,}11N' + 44{,}71)}. \qquad \text{(III.1.88)}$$

Исследования показали, что наиболее выгодным с точки зрения минимального объема измерений и наименьших ошибок является ряд из геодезических четырехугольников.

Оценка точности геодезических построений по формуле среднего отношения весов. В ряде случаев оценку точности элементов геодезических сетей с ошибкой до 20 % можно выполнить по формуле среднего отношения весов

$$P_{\text{уравн}} = \frac{N}{k} P_{\text{измер}}, \qquad \text{(III.1.89)}$$

где N — число всех измерений в сети; k — число необходимых измерений; $P_{\text{уравн}}$, $P_{\text{измер}}$ — веса уравненных и измеренных значений.

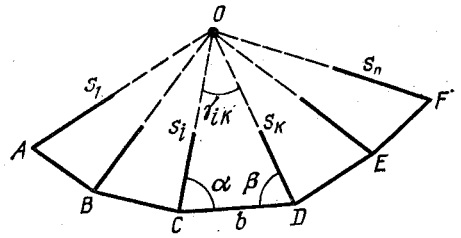
Оценка точности засечек. Всевозможные засечки — один из наиболее широко применяемых методов определения положения геодезических пунктов с ошибкой, выражаемой формулой

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2,$$

где M_x и M_y — средние квадратические ошибки абсцисс и ординат. Существует обширная литература по оценке точности засечек. Остановимся на формулах, приведенных в работе [1] без учета ошибок исходных данных.

1. Для ошибки положения пункта, определенного прямой многократной угловой засечкой с n исходных пунктов при равноточном измерении углов с ошибкой m, выраженной в угл. с, длинами сторон s_l ($l = 1, 2, \ldots, i, k \ldots n$) (рис. 78), углами засечки γ_{ik}:

Рис. 78. Многократная прямая засечка



$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 \frac{\left[\frac{1}{s_l^2}\right]}{\left[\frac{1}{s_i^2}\cdot\frac{1}{s_k^2}\sin^2\gamma_{ik}\right]}. \qquad \text{(III.1.90)}$$

В частности, при $n = 2$ формула (III.1.90) принимает вид

$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 \frac{s_1^2 + s_2^2}{\sin^2\gamma} \qquad \text{(III.1.91)}$$

или

$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 b^2 \frac{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{\sin^4\gamma}, \qquad \text{(III.1.92)}$$

а если $s_1 = s_2 = s$ (равнобедренном треугольнике), то будем иметь

$$M_{(\text{м})} = 1{,}41 \frac{m}{\rho}\cdot\frac{s}{\sin\gamma} \approx 0{,}007 m \frac{s}{\sin\gamma}, \qquad \text{(III.1.93)}$$

где s — сторона, выраженная в км.

При $n = 3$ получим

$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 \frac{s_1^2 s_2^2 + s_1^2 s_3^2 + s_2^2 s_3^2}{s_1^2\sin^2\gamma_1 + s_2^2\sin^2\gamma_2 + s_3^2\sin^2\gamma_3}, \qquad \text{(III.1.94)}$$

а если $s_1 = s_2 = s_3 = s$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 60°$ (вставке пункта в центр равностороннего треугольника, рис. 79), то

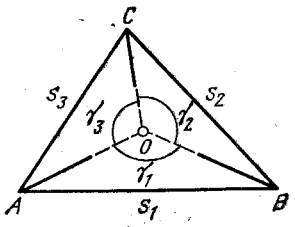
$$M = 1{,}15 \frac{m}{\rho} s \approx 0{,}006 ms. \qquad \text{(III.1.95)}$$

2. Для линейной засечки с n исходных пунктов при условии, что ошибки измеренных сторон не зависят от их длин,

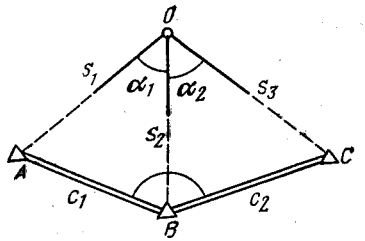
$$M^2 = \frac{n m_s^2}{[\sin^2\gamma_{ik}]}, \qquad \text{(III.1.96)}$$

в частности, при $n = 2$ получим

$$M = 1{,}41 \frac{m_s}{\sin\gamma}. \qquad \text{(III.1.97)}$$



Р и с. 79. Вставка пункта



Р и с. 80. Обратная засечка

Для случая, когда ошибки сторон пропорциональны их длинам,

$$M^2 = \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{\left[\frac{1}{s^2}\right]}{\left[\frac{1}{s_i^2}\cdot\frac{1}{s_k^2}\sin^2\gamma_{ik}\right]}; \qquad \text{(III.1.98)}$$

при $n = 2$ получим

$$M^2 = \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{s_1^2 + s_2^2}{\sin^2\gamma}. \qquad \text{(III.1.99)}$$

3. Для обратной засечки (задачи Потенота) по трем исходным точкам (рис. 80)

$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 \frac{\frac{s_1^2 s_2^2}{c_1^2} + \frac{s_2^2 s_3^2}{c_2^2}}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2 + B)}. \qquad \text{(III.1.100)}$$

4. Для пункта, определенного из треугольника с тремя измеренными углами (см. рис. 78),

$$M^2 = \left(\frac{m}{\rho}\right)^2 \frac{s_i^2 + s_k^2 + b^2}{3\sin^2\gamma}. \qquad \text{(III.1.101)}$$

5. Для пункта, определенного по методу фазового зонда (см. рис. 80),

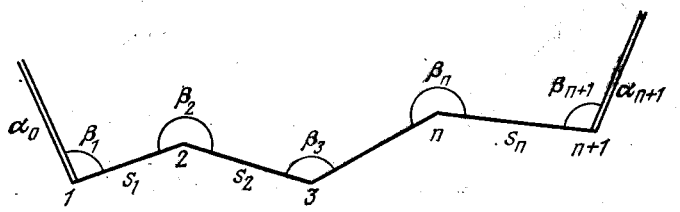
$$M^2 = \frac{m_r^2}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{\alpha_2}{2}\right), \qquad \text{(III.1.102)}$$

где m_r — средняя квадратическая ошибка разности расстояний от определяемой до двух исходных пунктов.

III.1.4. Предвычисление и оценка точности полигонометрии

Наиболее полные исследования по действию погрешностей в ходах точной полигонометрии проведены проф. В. В. Даниловым в работе «Точная полигонометрия» (М., Геодезиздат, 1953) и Б. А. Литвиновым в работе «Основные вопросы построения и уравнивания полигонометрических сетей» (М., Геодезиздат, 1962).

На рис. 81 изображено звено полигонометрии (полигонометрический ход), проложенное между двумя исходными азимутами (азимутами Лап-



Р и с. 81. Схема звена полигонометрии

ласа), в котором s_1, s_2, s_3, ..., s_n — главные стороны полигонометрического хода; β_1, β_2, β_3, ..., β_{n+1} — главные поворотные углы хода; n — число главных сторон (число сторон) хода, проложенного между двумя исходными азимутами.

В формулах для оценки точности полигонометрии приняты следующие обозначения:

k — число сторон до оцениваемого пункта;
K — число промежуточных азимутов Лапласа;
L — диагональ хода (длина замыкающей хода). Для равностороннего хода со сторонами s диагональ $L = ns$;
L_i — длина диагонали между смежными азимутами Лапласа;
m_β — средняя квадратическая ошибка измеренного угла, угл. с;
m_{α_0} — средняя квадратическая ошибка исходных азимутов (дирекционных углов), угл. с;
m_{α_n} — средняя квадратическая ошибка азимута (дирекционного угла) последней стороны хода, угл. с;
m_{α_k} — средняя квадратическая ошибка азимута (дирекционного угла) k-й промежуточной стороны, угл. с;
m_{T_0} — средняя квадратическая ошибка уравненного азимута или дирекционного угла общей замыкающей хода, угл. с;
m_s — средняя квадратическая ошибка измерения сторон хода;
σ — относительная систематическая ошибка измерения сторон хода;
m_L — среднее квадратическое значение продольного сдвига;
m_q — среднее квадратическое значение поперечного сдвига;
$t_L = m_L/L$ — относительное среднее квадратическое значение продольного сдвига хода;
$u_L = m_q/L$ — относительное среднее квадратическое значение поперечного сдвига хода;
M_L — полная относительная ошибка хода;
ξ, η — координаты главных поворотных пунктов хода, отнесенные к центру тяжести при условии, что ось η располагается параллельно общей замыкающей хода и считается положительной в направлении от начальной точки к конечной;
$\Delta\xi$, $\Delta\eta$ — приращения прямоугольных координат ξ и η;
Δx, Δy — приращения координат главных сторон хода, отнесенные к произвольной системе прямоугольных координат (дирекционные углы отсчитываются к востоку от положительного направления оси абсцисс);
m_x, m_y — средние квадратические ошибки координат конечной точки хода по осям x и y относительно начального пункта;
m — общая средняя квадратическая ошибка положения конечной точки хода относительно начального пункта;
ρ — число секунд в радиане.

1. Средние квадратические ошибки элементов равностороннего хода полигонометрии прямолинейной формы.

а. Для свободного вытянутого хода:

$$m_{\alpha_n} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_\beta^2 n};$$

$$t_L = \frac{m_L}{L} = \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{1}{n} + \sigma^2};$$

$$u_L = \frac{m_q}{L} = \frac{1}{\rho}\sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_\beta^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}; \quad \text{(III.1.103)}$$

$$m_{T_0} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_\beta^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}};$$

$$M_L = \sqrt{t_L^2 + u_L^2}.$$

б. Для несвободного хода, проложенного между двумя исходными азимутами Лапласа и уравненного за условия азимутов:

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{k(n+1-k)}{n+1}};$$

$$t_L = \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{1}{n} + \sigma^2};$$

$$u_L = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}; \quad \text{(III.1.104)}$$

$$m_{T_0} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}};$$

$$M_L = \sqrt{t_L^2 + u_L^2}.$$

в. Для несвободного хода между двумя азимутами Лапласа с промежуточными азимутами Лапласа, уравненного за условия азимутов (дирекционных углов):

$$t_L = \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{1}{n} + \sigma^2};$$

$$u_L = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2L^2}\sum_1^{K+1} L_i^2 + m_\beta^2 \frac{n+3}{48}}; \quad \text{(III.1.105)}$$

$$m_{T_0} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2L^2}\sum_1^{K+1} L_i^2 + m_\beta^2 \frac{n+3}{48}}.$$

2. Средние квадратические ошибки элементов полигонометрического хода произвольной формы.

а. Для несвободного хода, проложенного между двумя азимутами Лапласа и уравненного за условия азимутов:

$$m_{\alpha_k} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{k(n+1-k)}{n+1}};$$

$$t_L = \sqrt{\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot\frac{[\xi^2]}{L^2} + \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{[\Delta\eta^2]}{L^2} + \sigma^2};$$

$$u_L = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{[\eta^2]}{L^2} + \rho^2\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{[\Delta\xi^2]}{L^2}}; \quad \text{(III.1.106)}$$

$$m_{T_0} = \sqrt{\frac{m_\alpha^2}{2} + m_\beta^2 \frac{[\eta^2]}{L^2} + \rho^2\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{[\Delta\xi^2]}{L^2}}.$$

б. Для вытянутого хода:

$$t_L = \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \frac{[s^2]}{L^2} + \sigma^2};$$

$$u_L = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{[\eta^2]}{L^2}}; \quad \text{(III.1.107)}$$

$$m_{T_0} = \sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2} + m_\beta^2 \frac{[\eta^2]}{L^2}}.$$

в. Для несвободного хода, проложенного между двумя азимутами Лапласа с K промежуточными азимутами Лапласа, уравненного за условия азимутов:

$$t_L = \sqrt{\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot\frac{[\xi^2]}{L^2} + \left(\frac{m_s}{s}\right)^2 \left[\frac{[\Delta\eta^2]}{L^2} + \sigma^2\right];}$$

$$u_L = \frac{1}{L\rho}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2}\sum_1^{K+1} L_i^2 + m_\beta^2 [\eta^2] + \rho^2\left(\frac{m_s}{s}\right)[\Delta\xi^2]}; \quad \text{(III.1.108)}$$

$$m_{T_0} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{m_{\alpha_0}^2}{2}\sum_1^{K+1} L_i^2 + m_\beta^2 [\eta^2] + \rho^2\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 [\Delta\xi^2]}.$$

Здесь $\Delta\xi = s\sin(\alpha_k - T_0)$; $\Delta\eta = s\cos(\alpha_k - T_0)$; $L = [\Delta\eta]$; T_0 — дирекционный угол общей замыкающей хода.

III.1.5. Проектирование и рекогносцировка государственных геодезических сетей

Построение государственных геодезических сетей осуществляется по заранее разработанным и утвержденным в установленном порядке техническим проектам.

Проектированию геодезических работ обычно предшествует целый комплекс подготовительных мероприятий, имеющих целью обстоятельное изучение территории предстоящих работ как по литературным и

картографическим источникам, так и путем непосредственного обследования местности. Схематически этот комплекс мероприятий можно представить так:

1) получение технического предписания или производственного задания на проектирование работ от вышестоящей организации;
2) сбор и изучение необходимого материала;
3) геодезическое обследование района предстоящих работ;
4) составление предварительного технического проекта;
5) проведение рекогносцировки;
6) составление окончательного технического проекта.

В зависимости от конкретных условий и особенностей участка, поставленных задач и наличия технических средств, указанная схема может меняться. Так, например, при проведении работ в обжитых и хорошо изученных районах по соседству с участком, сходным по своим физико-географическим условиям, где недавно были выполнены аналогичные работы, геодезическое обследование может быть заменено изучением технических отчетов и других материалов. При проектировании работ по картам крупного масштаба (не мельче 1 : 25 000—1 : 10 000) рекогносцировка приведет лишь к незначительным уточнениям высот и мест расположения пунктов, поэтому надобность в составлении предварительного проекта отпадает, отпадает она и при комплексном ведении рекогносцировки и постройки знаков.

При планировании предстоящих работ и подготовительных мероприятий все подобные факты должны учитываться.

Рекогносцировка геодезических сетей. Основным назначением рекогносцировки является перенос проекта в натуру, уточнение камерального проекта путем изыскания на местности выгоднейшего варианта намеченной сети, а также окончательный выбор местоположения пунктов с установлением конструкции и высот сигналов и типов подземных центров.

Организация работ и проведение рекогносцировки зависит от конкретных условий и может выполняться как самостоятельно в составе специализированных рекогносцировочных бригад, так и в комплексе с постройкой знаков, что особенно выгодно в труднодоступных и малообжитых районах.

С целью улучшения формы фигур сети и снижения высот знаков рекогносцировщику разрешается изменять расположение отдельных пунктов и даже перепроектировать отдельные участки сети. О всех значительных изменениях проекта необходимо докладывать руководителям работ.

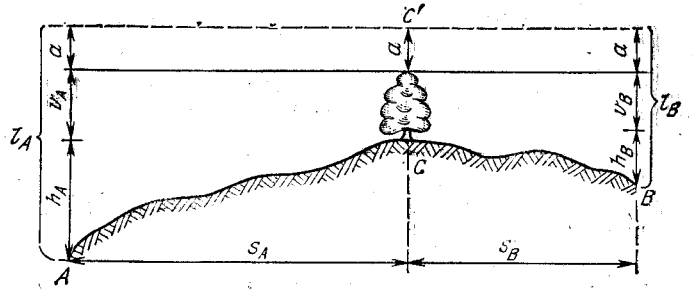
При выборе места для постройки геодезических знаков, при определении командных высот в залесенной местности и наиболее удобных путей для подхода к пунктам полезно использовать аэрофотоснимки масштабов 1 : 40 000—1 : 50 000. Комплекту снимков придаются репродукции накидного монтажа в масштабе 1 : 100 000.

Расчет высот знаков. Определение высот знаков является одной из важнейших задач рекогносцировки. Кроме того, высоты знаков рассчитываются при составлении графических проектов сети по карте.

Проще всего высоты знаков можно рассчитывать по формулам (рис. 82):

$$l_A = h_A + a + v_A,$$
$$l_B = h_B + a + v_B, \qquad \text{(III.1.109)}$$

где l_A и l_B — высоты первого и второго знаков; h_A и h_B — превышения препятствия над основаниями первого и второго знаков (препятствие



Р и с. 82. Определение высот геодезических знаков

минус основание знака); a — высота луча над препятствием; v — поправка в метрах за кривизну Земли и рефракцию

$$v = \frac{1-k}{2R} s^2, \qquad \text{(III.1.110)}$$

где k — коэффициент рефракции (обычно принимаемый равным 0,14—0,16); R — радиус Земли, км; s — расстояние от знака до препятствия, км.

Поправки v выбирают из специальных таблиц или приближенно вычисляют по формуле

$$v = \frac{s^2}{15}. \qquad \text{(III.1.111)}$$

Величины h либо определяют по карте

$$h_1 = H_C - H_A \quad \text{и} \quad h_2 = H_C - H_B,$$

где H — отметки пунктов и препятствия, снятые с карты, либо вычисляют по измеренным зенитным расстояниям z по формуле

$$h = s \operatorname{ctg} z + v + i - l, \qquad \text{(III.1.112)}$$

где i — высота прибора; l — высота наблюдаемой точки над землей, либо выбирают из специальных таблиц *.

К полученному превышению прибавляют высоту препятствия (строения, леса и др.).

Если в створе между пунктами расположено несколько препятствий, то необходимые высоты знаков подсчитываются для каждого препятствия отдельно и из них выбирают те, которые требуют максимального значения высот знаков.

Определив выгоднейшую высоту какого-либо знака (лучше всего дальнего от препятствия) или в случае наличия уже отстроенного знака определенной высоты необходимо откорректировать высоту второго пункта. Пусть, например, рассчитанную по формуле (III.1.109) высоту в пункте A (рис. 83) пришлось изменить на $\Delta h_A = l'_A - l_A$ (новое значение высоты минус прежде рассчитанное). Тогда, пользуясь «прави-

* *Г. В. Друтман, Н. А. Петров, И. А. Фельдман.* Справочное пособие по рекогносцировке пунктов триангуляции и полигонометрии. М., Геодезиздат, 1962.

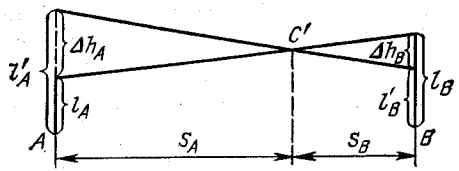


Рис. 83. Корректировка высот геодезических знаков

лом коромысла», можно определить изменение Δh_B рассчитанной по формуле высоты второго знака:

$$\Delta h_B = -h_A \frac{s_B}{s_A}.$$

Окончательное значение высоты знака в пункте B будет

$$l'_B = l_B - \Delta h_B.$$

Для контроля определяют высоту знака графически (часто ограничиваются только графическим определением высот знаков).

Для этого на листе миллиметровой (клетчатой) бумаги (см. рис. 82) проводят горизонтальную прямую и примерно в середине намечают точку C' (препятствие). Затем в определенном масштабе (например, принимая в 1 см 1 км для горизонтального масштаба и — в 1 см 10 м — для вертикального масштаба) по расстояниям s наносят точки расположения пунктов A' и B'. От полученных точек по вертикали вниз откладывают величину $a + v + h$ (если h имеет отрицательный знак, то его откладывают от точек $a + v$ по вертикали вверх) и получают основания знаков A и B. Измерив отрезок от основания знаков до горизонтальной прямой, определяют в соответствующем масштабе их высоту, обеспечивающую взаимную видимость пунктов. Если на одном из пунктов имеется уже отстроенный знак или по другим соображениям для него заранее была определена высота знака, то ее откладывают от основания знака по вертикали вверх, после чего приложив линейку к полученной точке и точке C', получают высоту второго знака.

Если первоначальная высота знака получается отрицательной (выше горизонтальной линии, проходящей через C') или при корректировании высот линия пересекает вертикаль ниже точки основания второго знака, то это означает наличие взаимной видимости между пунктами с земли.

Если отстроенных знаков на определяемых пунктах не имеется, то оптимальную высоту для каждой пары пунктов, обеспечивающую наименьшие затраты на постройку сигналов, можно подсчитать по формулам М. И. Коробочкина:

$$l'_1 = \frac{b}{s_1^2 + s_2^2} s_2; \qquad l'_2 = \frac{b}{s_1^2 + s_2^2} s_1, \qquad \text{(III.1.113)}$$

где

$$b = l_1 s_2 + l_2 s_1.$$

III.1.6. Постройка геодезических знаков

Геодезические знаки состоят из двух основных частей: подземной части — центра пункта и устанавливаемого над ним наружного сооружения — геодезического сигнала.

Геодезические сигналы служат для обеспечения возможности проведения угловых измерений, свето- и радиодальномерных измерений расстояний и имеют приспособление для постановки прибора, платформу для наблюдателя и визирное устройство.

Центры геодезических знаков закладывают в землю; они служат для обеспечения неизменного положения собственно геодезического пункта и его сохранности в течение продолжительного времени, а также для обозначения тех неподвижных точек, к которым приводятся все угловые и линейные измерения, координаты и отметки которых определяются.

Геодезические сигналы

В зависимости от конструкции, высоты и подставки для угломерного прибора, геодезические сигналы строят следующих типов: туры, пирамиды, простые сигналы и сложные сигналы.

Туры. В высокогорных и горных (не покрытых лесом) районах с открытым горизонтом и скальными грунтами устанавливаются туры, представляющие собой каменные, кирпичные, бетонные или железобетонные столбы, возводимые над маркой, заложенной в скалу. Размеры тура: сечение фундамента 0,7×0,7 м, выступающей над поверхностью земли части 0,5×0,5 м, высота 1,20 м.

В верхнюю грань тура также закладывают марку.

Визирные приспособления крепят либо на специальных деревянных или металлических пирамидах, устраиваемых над туром, либо непосредственно на марке тура. Туры могут заменяться деревянными или металлическими штативами, устанавливаемыми над маркой центра.

Простые пирамиды. Простые пирамиды строят в открытых, всхолмленных и горных безлесных районах, где видимость на смежные пункты открывается с земли и визирный луч проходит на установленной высоте над препятствием. Они бывают трехгранными и четырехгранными и разделяются на простые пирамиды, пирамиды со штативом и пирамиды с вехой. Общая высота (до верха визирной цели) простых пирамид и пирамид со штативом колеблется от 5 до 8 м.

Простые сигналы. Простые сигналы состоят из двух строго изолированных друг от друга пирамид: внутренней, являющейся подставкой для инструмента, и наружной, несущей платформу для наблюдателя и визирную цель. Простые сигналы строятся высотой от 4 до 10 м, а сторона основания равна 1/5 высоты до площадки наблюдателя плюс 2 м. Наружные пирамиды, как правило, четырехгранные, внутренние — трехгранные. Высота столика для инструмента над площадкой устанавливается в 1,20 м.

Сложные сигналы. Сигналы высотой от 11 до 40 м строятся в виде сложных трехгранных сигналов (до 1959 г. сигналы высотой свыше 13 м строились сложными, четырехгранными), а свыше 40 м — в виде сложных четырехгранных сигналов с промежуточными столбами.

Сложные сигналы представляют собой единую конструкцию, в которой внутренняя (инструментальная) пирамида, несущая столик для прибора, не изолирована от наружной, а опирается на основные столбы последней.

Основным типом предметной визирной цели являются малофазные визирные цилиндры В. Н. Шишкина, строящиеся в виде цилиндров с радиально направленными пластинами.

Для астрономических наблюдений устанавливаются специальные столбы из кирпича или камня, скрепленные цементом. В исключительных случаях ставят деревянные столбы.

Типы закладываемых центров зависят от физико-географических условий района работ, особенно от состава грунтов и глубины промерзания почвы. Они состоят из железобетонных монолитов, пилонов, свай или асбоцементных и металлических труб, заполненных бетонным раствором и надежно защищенных от действия коррозии. В верхнюю поверхность центров заделываются специальные чугунные марки с обозначенной точкой-отверстием или крестом. К этой точке приводятся все угловые и линейные измерения.

В применяемых в настоящее время конструкциях центров закладывается по одной марке. В центрах, заложенных до 1973 г., имеется 2 марки: одна в основании, другая в верхней части центра (до 1960 г. в центры заделывалось по 2—3 и более марок).

В соответствии с ныне действующей инструкцией по закладке центров и реперов государственной геодезической сети СССР 1—4 классов [3] на территории нашей страны выделены следующие основные физико-географические области, в пределах которых закладываются центры и реперы определенных типов:

1. Области сезонного промерзания грунтов, делящиеся на южную и северную зоны с границей между ними, проходящей по линии Ужгород—Харьков—Актюбинск—Караганда—Семипалатинск—оз. Зайсан.

2. Области многолетней мерзлоты, состоящие из южной, средней и северной зон. Граница между южной и средней зонами проходит примерно по линии Воркута—Новый Порт—Хантайка—Сунтар—Олекминск—Алдан—Аян. Северная зона определяется границей, проходящей вдоль линии с глубиной протаивания грунтов до 1,25 м.

3. Районы распространения подвижных песков (в основном в Средней Азии).

Кроме того, особые типы центров установлены для скальных пород и заболоченных грунтов.

Современные типы центров рассчитаны на механизацию земляных работ с использованием сваезабивных и самоходных буровых установок, на возможность централизованного изготовления их, на облегчение доступа к ним при привязке расположением верхних частей (марок) на уровне или выше земной поверхности и на обеспечение длительной сохранности знаков усилением элементов их внешнего оформления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Проворов К. Л., Носков Ф. П.* Радиогеодезия. М., Недра, 1973.
2. *Серапинас Б. Б.* Оценка точности опорных геодезических сетей. Итоги науки и техники. Геодезия и аэросъемка, М., ВИНИТИ, 1977, т. 12.
3. *Центры* и реперы государственной геодезической сети СССР. М., Недра, 1973.

III.2. ВЫСОКОТОЧНЫЕ УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Н. В. Яковлев

III.2.1. Высокоточные теодолиты

Краткие сведения о высокоточных теодолитах. К высокоточным относят теодолиты Т05, Т1, ОТ-02, ОТ-02М, которые хорошо себя зарекомендовали и широко применяются в геодезическом производстве. Теодолиты Т05 используются преимущественно в триангуляции и полигонометрии 1 класса; теодолиты Т1, ОТ-02, ОТ-02М — преиму-

Основные параметры	Теодолиты		
	Т05	Т1	ОТ-02М
Допустимое значение средней квадратической ошибки (угл. с) измерения угла одним приемом в лабораторных условиях, не более:			
горизонтального	0,5	1	—
вертикального	—	1,5	—
Зрительная труба (главная)			
диаметр свободного отверстия объектива, мм	64	60	60
фокусное расстояние, мм	500	350	348
угол поля зрения	40′	1°	1,3°
увеличение, крат	36; 50; 62	30; 40	24; 30
цена деления барабана окулярного микрометра, угл. с	1	1	—
наименьшее расстояние визирования, м	5	5	5
Горизонтальный круг			
диаметр кольца делений лимба, мм	180	135	135
цена наименьшего деления лимба, угл. мин	10	10	10
полные ошибки диаметров лимба, угл. с, не более	1,0	1,2	1,5
Вертикальный круг			
диаметр кольца делений лимба, мм	130	90	90
цена наименьшего деления лимба, угл. мин	10	10	20
полные ошибки диаметров лимба, угл. с, не более	2,0	2,5	2,5
Отсчетное устройство			
вид	Оптический микрометр		
цена деления, угл. с	1	1	1
Номинальная цена деления (угл. с) ампулы уровня на 2 мм			
накладного	4	5	—
при алидаде горизонтального круга	7	7	6—7
при алидаде вертикального круга	12	12	10—12
Масса теодолита, кг			
без упаковки	19	11	10,8
в упаковке	34	17 *	18,5 *
Масса штатива, кг	—	8	8

* С учетом массы центровочной плиты.

щественно при измерениях в геодезических сетях 2 класса. На геодинамических полигонах, в зависимости от расстояний между пунктами и требуемой точности измерений, находят применение все перечисленные выше теодолиты. Их основные технические характеристики даны в табл. 49.

Поверки и исследования высокоточных теодолитов

Геометрическая схема устройства высокоточного теодолита включает следующие основные части:

1) рабочую меру — лимбы горизонтального и вертикального кругов с делениями, нанесенными с высокой степенью точности;

2) осевую систему, т. е. систему приспособлений для ориентирования теодолита относительно отвесной линии в точке установки его; в нее входят вертикальная ось и точный уровень (накладной или при алидаде);

3) визирное устройство — зрительную трубу теодолита;

4) отсчетное устройство — оптический микрометр.

Каждый теодолит перед началом полевых работ должен быть тщательно выверен, отъюстирован и исследован.

В задачу поверок и юстировок входит выявление отступлений от геометрических и оптико-механических требований, положенных в основу конструкций теодолита, и наиболее полное устранение этих отклонений.

Исследования предусматривают определение неустранимых отклонений с целью введения соответствующих поправок, уменьшающих влияние этих отклонений на результаты измерений; определение постоянных теодолита (цены деления отсчетных устройств, окулярных микрометров, уровней и т. д.); испытание работы отдельных узлов теодолита; определение ошибок диаметров лимба; установление степени влияния внешних условий на отдельные узлы и на теодолит в целом и т. д.; установление пригодности теодолита (по результатам исследований) для производства работ данного класса точности.

Поверки высокоточных теодолитов. Поверки высокоточных теодолитов выполняют в определенной последовательности. Большую часть поверок выполняют в предположении, что вертикальная ось теодолита занимает отвесное положение и сохраняет его неизменным при вращении алидады. Поскольку ориентирование теодолита относительно отвесной линии осуществляется при помощи уровня, то и поверки начинают с поверки уровня, приведя предварительно, насколько это возможно при невыверенном уровне, вертикальную ось в отвесное положение.

1. *Ось накладного уровня должна находиться в одной плоскости с осью вращения трубы и быть ей параллельной.*

Для выполнения первой части поверки вращением алидады устанавливают уровень по направлению двух подъемных винтов теодолита и, действуя ими, приводят пузырек уровня точно на середину. Затем осторожно покачивают уровень в обе стороны на горизонтальной оси трубы и следят за пузырьком. Если пузырек при покачивании уровня не смещается, то первое условие выполнено. В противном случае уровень необходимо исправить боковыми юстировочными винтами при нем.

Вторую часть этой поверки (поверку равенства подставок уровня) выполняют следующим образом. Подъемными винтами приводят пузырек уровня на середину, фиксируют отсчеты по концам пузырька

(достаточно по одному) и затем переставляют уровень на оси трубы на 180°. Разность отсчетов по одному из концов пузырька даст двойную величину неравенства подставок уровня в делениях его. Исправления производят перемещением пузырька уровня на одну половину дуги отклонения вертикальными юстировочными винтами при уровне, а на вторую половину — подъемными винтами теодолита. Если пузырек после перекладывания уровня на оси на 180° смещается от исходного положения на величину не более двух делений, то уровень можно не исправлять, а пользоваться так называемым местом нульпункта уровня, т. е. средним из отсчетов по концам пузырька, взятым при двух положениях уровня. Практически можно ограничиться средним отсчетом только по одному из концов пузырька и пользоваться им при последующем горизонтировании прибора, фиксируя отклонение пузырька от этого среднего отсчета.

У теодолита без накладного уровня ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должна быть установлена перпендикулярно к вертикальной оси вращения теодолита.

Поверку выполняют путем поворота алидады точно на 180° с фиксированием отсчетов по концам пузырька уровня, причем делают ее на двух взаимно перпендикулярных установках алидады. Исправления производят путем перемещения пузырька уровня на одну половину дуги отклонения вертикальными юстировочными винтами при уровне, а на вторую половину — подъемными винтами теодолита.

2. *Вращение алидады должно быть правильным и плавным.*

Неравномерное, тугое или слишком свободное вращение алидады в первом приближении проверяют путем поворота ее точно через 360°. Смещение пузырька уровня не должно превышать 0,5 деления. Более детально правильность вращения алидады исследуют по специальной программе. Недопустимые колебания вертикальной оси устраняют только в заводских условиях.

3. *Ось вращения трубы должна быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения теодолита.*

Вращением алидады устанавливают накладной уровень по направлению двух подъемных винтов и, действуя ими, приводят пузырек уровня на середину (в нуль-пункт). Затем приподнимают уровень, поворачивают алидаду точно на 180° и опускают уровень на ось трубы*. Если пузырек уровня не сместится, то поверка выполнена. В противном случае для исправления перемещают пузырек уровня на одну половину дуги отклонения его от середины регулировочным винтом при лагерах оси вращения трубы, а на вторую половину — подъемными винтами теодолита. Неперпендикулярность горизонтальной и вертикальной осей в теодолитах, используемых в геодезических сетях 1—2 классов, не должна превышать 5″. При отсутствии у теодолита накладного уровня (ОТ-02) неперпендикулярность осей определяют по особой программе.

4. *Вращение зрительной трубы вокруг своей оси, осуществляемое при помощи наводящего винта трубы, должно быть правильным.*

Трубу теодолита наводят на нитяной отвес и вращают вокруг своей оси при помощи наводящего винта. Если при поворотах трубы в диапазоне изменения зенитных расстояний от 87 до 93° будут замечены отклонения визирной оси трубы от нити отвеса, то при произ-

* Если первая поверка выполнена точно, то алидаду можно вращать вместе с уровнем, не снимая его с горизонтальной оси; также можно поступать и при пользовании нуль-пунктом уровня.

водстве угловых измерений при данных зенитных расстояниях пользоваться наводящим винтом трубы не следует до устранения отмеченного недостатка. В этом случае трубу теодолита поворачивают рукой, не винтом.

5. *Отсчетное устройство должно быть выверено и отъюстировано:*

а) индекс оптического микрометра при установке диска секунд на нуль должен совпадать или почти совпадать с совмещенными изображениями диаметрально противоположных штрихов лимба;

б) освещенность поля зрения отсчетного микроскопа должна быть равномерной;

в) линия раздела между верхним и нижним изображениями шкалы штрихов лимба должна быть тонкой, прямой и без заметных утолщений;

г) не должно быть перекосов изображений штрихов лимба;

д) изображения штрихов лимба и диска секунд должны быть видны одновременно и резко, без перефокусировки окуляра;

е) рен оптического микрометра не должен превышать установленного допуска.

Р е н о м оптического микрометра называют разность номинальной величины полуделения лимба и его величины, определенной при помощи микрометра.

На стадии поверок рен определяют приближенно при четырех произвольных установках алидады горизонтального круга. На диске секунд микрометра устанавливают отсчет чуть меньше нуля и, вращая алидаду при помощи наводящего винта, совмещают диаметрально противоположные штрихи лимба. Затем совмещение штрихов выполняют заново, точно, при помощи микрометра и фиксируют отсчет a. Далее вращают барабан микрометра и в конце его шкалы берут отсчет b при совмещении штрихов лимба вблизи индекса. Рен вычисляют по формуле

$$r = (a - b)\,\mu + \frac{i}{2},$$

где μ — цена деления шкалы микрометра; i — цена наименьшего деления лимба. Из результатов четырех определений выводят среднее значение. Рен у высокоточных теодолитов не должен превышать для горизонтального круга 0,5″ и для вертикального круга 0,6″.

6. *Визирная ось трубы должна быть перпендикулярна к оси ее вращения.*

У высокоточных теодолитов двойная величина коллимационной ошибки зрительной трубы $2c = (КЛ — КП)/\sin z$ не должна превышать 20″. Исправление производят юстировочными винтами путем горизонтального перемещения сетки нитей окулярного микрометра.

7. *Нити биссектора окулярного микрометра трубы должны быть установлены вертикально.*

При тщательно отгоризонтированном теодолите наводят нить биссектора окулярного микрометра на удаленную точку и вращают рукой зрительную трубу в вертикальной плоскости. Нить биссектора при наклонах трубы должна оставаться на данной точке; в противном случае исправления выполняют поворотом сетки нитей микрометра при помощи юстировочных винтов.

8. *Место зенита вертикального круга должно быть близким к нулю* ($Mz \leqslant 10''$).

Место зенита Mz, зенитное расстояние z и вертикальный угол ν при использовании теодолитов ОТ-02, ОТ-02М вычисляют по формулам:

$$Mz = КЛ + КП - 180°;\ z = КП - КЛ + 90°;\ \nu = КЛ - КП.$$

При использовании теодолитов Т05 место нуля (М0), углы наклона (ν) и зенитные расстояния (z) вычисляют по формулам:

$$М0 = 1/2\,(Л + П \pm 180°);\ \nu = Л - М0;\ z = 90° - \nu.$$

Место зенита (место нуля) исправляют юстировочным винтом уровня при алидаде вертикального круга так, чтобы при наведении зрительной трубы на какую-либо удаленную точку и совмещении изображений концов пузырька уровня сумма отсчетов при двух положениях вертикального круга (КЛ + КП) у теодолитов Т05, ОТ-02, ОТ-02М была равна 180°, а у теодолитов Т1 равна 360°.

9. *Подъемные и наводящие винты должны иметь плавный ход без люфта и заедания.*

Ход подъемных винтов регулируют регулировочными винтами при них. Ход наводящих винтов регулируют пружинами в гильзах и гайками при этих винтах.

10. *Средние квадратические ошибки измерения горизонтальных и вертикальных углов в лабораторных условиях не должны превышать установленных допусков* (см. табл. 49).

Среднюю квадратическую ошибку угла для одного приема измерений вычисляют по формуле

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n - 1}}.$$

При этом выполняют не менее четырех серий измерений угла β, каждая из которых содержит по $n = 12$ приемов. Угол β должен быть в пределах $90 \pm 30°$; вертикальный угол между визирными целями, образующими угол β, должен быть не менее 20°.

Исследования высокоточных теодолитов. В период эксплуатации каждый теодолит периодически исследуют с целью уточнения постоянных и определения пригодности его для производства высокоточных угловых измерений.

Ц е н у д е л е н и я у р о в н я (накладного или при алидаде) необходимо знать для вычисления поправок в измеренные направления за наклон вертикальной оси теодолита. Уровень исследуют на экзаминаторе, измерительный винт которого имеет отсчетный диск с ценой деления $\mu = 1{,}0''$.

Поверяемый теодолит (уровень) устанавливают на столике экзаминатора так, чтобы ось уровня и ось штанги экзаминатора находились в одной или параллельных вертикальных плоскостях и чтобы штанга была горизонтальна или почти горизонтальна. При исследовании уровней, не имеющих шкалы, на ампулу наклеивают вспомогательную шкалу с делениями 1—2 мм. Длину пузырька накладного уровня регулируют так, чтобы она была равна 1/3 части шкалы между ее крайними штрихами. При исследовании пузырек уровня не доводят до краев шкалы, исключая 1—2 крайних штриха с обеих сторон. Перед началом исследований определяют сначала, через сколько делений k надо поворачивать измерительный винт экзаминатора, чтобы число перемещений пузырька уровня на всей рабочей части шкалы ампулы было не менее шести.

Программа определения цены деления уровня состоит из двух приемов, каждый прием — из двух полуприемов (прямого и обратного ходов по шесть перемещений пузырька в каждом). В первом полуприеме измерительный винт вращают по ходу часовой стрелки, а во втором — в обратном направлении. Между приемами алидаду теодолита (уровень) поворачивают на 180° относительно начального положения, а измерительный винт экзаминатора — на половину

его оборота. В каждом полуприеме измерительный винт поворачивают через k делений (наклоняют столик экзаминаторов на угол $\nu = k\mu$), а отсчеты по левому л и правому п концам пузырька уровня берут через 2 мин после его остановки.

Перед началом исследований измерительный винт экзаминатора в первом полуприеме устанавливают на ноль делений отсчетного диска, а пузырек уровня перемещают подъемными винтами экзаминатора в левое крайнее положение (л < п). Спустя 2 мин времени берут отсчеты л и п по концам пузырька уровня, вычисляют длину пузырька $\Delta = п - л$ и место положения его середины $(л + п)$ в полуделениях. Затем поворачивают измерительный винт по ходу часовой стрелки на k делений, через 2 мин снова берут отсчеты л, п, вычисляют разности и суммы $(п - л)$, $(л + п)$ и находят величину первого перемещения пузырька уровня в полуделениях $l'_1 = (л + п)_{j+1} - (л + п)_j$. Далее измерения и обработку их продолжают аналогичным образом, пока пузырек не дойдет до конца шкалы уровня (исключая 1—2 крайних штриха делений). В первом полуприеме получают шесть значений величины перемещений пузырька уровня l'_1, l'_2, ..., l'_6.

Переходя ко второму полуприему, измерительный винт экзаминатора сначала вращают примерно на 30—40° по ходу часовой стрелки, а затем поворачивают его в обратном направлении до тех пор, пока пузырек уровня не займет примерно то положение, которое было конечным в первом полуприеме.

Измерения и вычисления во втором полуприеме исполняют так же, как в первом, только измерительный винт вращают против хода часовой стрелки, а запись результатов измерений ведут снизу вверх. Из второго полуприема находят еще шесть значений l''_i. Для одних и тех же установок пузырька уровня вычисляют среднее из двух полуприемов

$$l_i = \frac{1}{2}(l'_i + l''_i).$$

В процессе измерений следят за тем, чтобы изменения длины пузырька уровня $(п - л)$ не превышали 0,3 деления, в противном случае весь прием измерений повторяют заново.

Из измерений во втором приеме получают такое же число перемещений пузырька уровня $l_i = (l'_i + l''_i)/2$, как и в первом.

Из значений l_i первого и второго приемов вычисляют среднее l_0 и его среднюю квадратическую ошибку в полуделениях:

$$l_0 = \frac{1}{n}\sum l_i; \qquad m_{l_0} = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{n(n-1)}}; \qquad \delta_i = l_i - l_0.$$

Цену деления уровня τ и среднюю квадратическую ошибку ее определения вычисляют (в угл. с) по формулам:

$$\tau = \frac{2\nu}{l_0} = \frac{2k\mu}{l_0}; \qquad m_\tau = \frac{m_{l_0}}{l_0}\tau,$$

где ν — угол наклона столика экзаминатора при повороте измерительного винта на k делений, угл. с; μ — цена деления диска винта, угл. с.

Средняя квадратическая ошибка определения цены деления уровня не должна превышать $m_\tau \leqslant \tau/40$ при $\tau = 4—6''$ и $m_\tau \leqslant \tau/30$ при $\tau = 10—60''$.

Цену деления окулярного микрометра зрительной трубы теодолитов Т05 и Т1 определяют из измерений направления на удаленную цель (или сетку коллиматора

в лаборатории) четырьмя приемами с перестановкой между ними и горизонтального круга, и оптического микрометра, и окулярного микрометра. Каждый прием измерений состоит из прямого и обратного ходов. При визировании на цель делают по три наведения окулярным микрометром (отсчеты M) и по два совмещения штрихов лимба при отсчетах A по горизонтальному кругу.

Из каждого приема находят цену деления окулярного микрометра

$$\mu_j = \frac{[\Delta A\, \Delta M]}{[\Delta M^2]},$$

где $\Delta A = A - A_0$; $\Delta M = M_0 - M$; M_0 и A_0 — среднее значение отсчетов по окулярному микрометру и по лимбу соответственно в j-м приеме. Из всех приемов выводят среднее значение μ. При углах наклона на визирную цель более 2° вычисленное значение μ умножают на косинус этого угла. Предельная погрешность определения μ должна быть не более 0,03″.

Правильность хода фокусирующей линзы зрительной трубы в горизонтальной и вертикальной плоскостях исследуют по изменениям коллимационной ошибки (Δc) и величины места зенита (ΔMz) или места нуля ($\Delta M0$) при последовательном наведении и фокусировании зрительной трубы на две близлежащие и одну удаленную визирные цели, используя формулы

$$\Delta c_j = c_j - c_\infty \quad \text{и} \quad \Delta Mz = Mz_j - Mz_\infty,$$

где индексы j относятся к расстояниям до близлежащих целей (s_j = = 5 и 10 м для теодолитов Т05, Т1, ОТ-02), а индекс ∞ — к расстояниям до «бесконечности» (для Т05 s_∞ = 500 м; для Т1, ОТ-02 s_∞ = = 350 м). Визирные цели должны находиться в плоскости горизонта (с отклонениями не более ±0,5°) и почти в створе (с отклонениями не более ±3°).

Измерения выполняют по следующей программе:

1) при КЛ последовательно наводят зрительную трубу на все три цели, фокусируя трубу на каждую цель поворотом кольца фокусирующей линзы по ходу часовой стрелки, и фиксируют отсчеты $л_1$ по лимбу после каждого наведения;

2) то же выполняют в обратной последовательности, поворачивая кольцо против хода часовой стрелки и фиксируя всякий раз отсчеты $л_2$ по кругам;

3) переводят трубу через зенит, выполняют операции, указанные в п. 2, берут отсчеты $п_2$ по лимбу при КП;

4) выполняют при КП операции, указанные в п. 1, фиксируют отсчеты $п_1$ по лимбу.

Описанные операции составляют одну серию определений значений c и Mz; таких серий выполняют две.

Расхождения отдельных значений для c и для Mz, относящихся к одним и тем же расстояниям, не должны превышать 1,5″ для теодолитов Т05, Т1, ОТ-02.

Рен оптического микрометра определяют отдельно для верхнего $r_в$ и нижнего $z_н$ изображений шкалы деления лимба и затем находят среднее значение r и разность Δr.

Рен микрометра для горизонтального и вертикального кругов может быть разным, поэтому его определяют для отсчетной системы как горизонтального, так и вертикального кругов раздельно. Рен отсчетной системы горизонтального круга определяют на разных

установках алидады, переставляя ее через $45° + i$, где i — цена наименьшего деления лимба. В прямом ходе начальная установка алидады 0°, в обратном $(360° - 22° 30') + 2i$. Всего выполняют по восемь установок алидады в прямом и обратном ходах. Рен отсчетной системы вертикального круга теодолита Т05 выполняют в диапазоне отсчетов 350° 00′ — 4° 10′ (прямой ход) и 7° 50′ — 353° 40′ (обратный ход); у теодолитов Т1, ОТ-02М в диапазоне 80° 00′—94° 10′ (прямой ход) и 97° 50′—83° 40′ (обратный ход); вертикальный круг переставляют через 2° 10′ (через $2° + i$).

Порядок измерений следующий. На шкале оптического микрометра устанавливают отсчет, близкий к нулю. Затем при помощи наводящего винта алидады совмещают по возможности более точно диаметрально противоположные штрихи A и $(A + 180°)$ верхнего и нижнего изображений шкалы делений лимба. После этой подготовительной операции при помощи оптического микрометра точно совмещают изображения штрихов лимба (по два раза подряд) и берут дважды отсчеты:

a — при совмещении штрихов A и $(A + 180°)$;

b — при совмещении штрихов $(A - i)$ и $(A + 180°)$;

c — при совмещении штрихов A и $(A + 180° - i)$, где i — цена наименьшего деления лимба. Отсчеты a берутся в начале, а отсчеты b и c — в конце шкалы микрометра, причем отсчет b берется при совмещении штрихов, расположенных справа от индекса, а отсчет c — слева от него.

Рен вычисляют по формулам:

$$r_в = (a - b)\,\mu + i/2; \quad r_н = (a - c)\,\mu + i/2; \quad r = \frac{1}{2}(r_в + r_н),$$

где a, b, c — отсчеты по шкале микрометра в делениях; μ — цена деления микрометра; i — цена наименьшего деления лимба, угл. с.

Среднее значение рена $r = (r_в + r_н)/2$ и разность $\Delta r = r_в - r_н$ не должны превышать у высокоточных теодолитов 0,5″. При $r > 0{,}5''$ и $\Delta r \leqslant 0{,}5''$ в результаты измерений горизонтальных направлений и зенитных расстояний вводят поправки за рен

$$\delta r = \frac{2r}{i}\, c,$$

где c — отсчет по микрометру; i — цена деления лимба, угл. мин.

При $r > 0{,}5''$ и $\Delta r > 0{,}5''$ необходимо отъюстировать отсчетную систему.

Среднюю квадратическую ошибку определения среднего значения рена вычисляют по формулам:

$$m_r = m_0 \sqrt{\frac{3}{2k}}; \qquad m_0 = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{2n}},$$

где m_0 — средняя квадратическая ошибка одного совмещения штрихов лимба; k — число всех установок алидады (круга) в прямом и обратном ходах, вместе взятых; v_i — разности отсчетов при двойном совмещении одних и тех же штрихов лимба; n — число этих разностей (для описанной методики определения рена отсчетной системы горизонтального круга $k = 16$, $n = 48$).

Ошибки m_r и m_0 не должны превышать у высокоточных теодолитов соответственно 0,1 и 0,3″ для горизонтального круга; для вертикального круга эти допуски удваиваются.

Систематические ошибки оптического микрометра определяют из обработки результатов измерений малых углов β, укладывающихся целое число раз в длине шкалы микрометра. Для теодолитов Т05, Т1, ОТ-02М берут три таких угла: $\beta_1 = 0{,}5'$; $\beta_2 = 1{,}0'$; $\beta_3 = 2{,}5'$. Каждый угол измеряют на всех интервалах шкалы микрометра, кратных его величине. Обработку результатов измерений и вычисление систематических ошибок микрометра выполняют по методу наименьших квадратов. Для теодолитов ОТ-02 и ОТ-02М определяют еще и «мертвый ход» оптического микрометра.

Под эксцентриситетом горизонтального круга подразумевают несовпадение центра вращения круга с центром кольца делений на нем. Хотя эксцентриситет круга и не оказывает никакого влияния на результаты измерений (на среднее по диаметрально противоположным штрихам лимба), тем не менее рекомендуется, чтобы он не превышал 20″.

Под эксцентриситетом алидады подразумевают несовпадение проекции оси вращения алидады на лимб с центром кольца делений на лимбе (при данной конкретной ориентировке круга относительно подставки теодолита). Однако с точки зрения условий изготовления теодолита, в механико-технологическом смысле, под эксцентриситетом алидады понимают несовпадение проекции оси вращения алидады на лимб с центром его вращения.

Перед началом исследований эксцентриситета алидады тщательно выверяют уровень (накладной или при алидаде) так, чтобы с ошибкой не более 0,5 деления ось уровня была перпендикулярна к оси вращения алидады. Эксцентриситет алидады определяют на двух следующих один за другим оборотах алидады по ходу часовой стрелки и на двух оборотах ее в обратном направлении. Алидаду переставляют через 30°, оставляя лимб неподвижным. На каждой установке алидады сначала совмещают изображения диаметрально противоположных штрихов лимба (отсчет A), а затем изображение штриха лимба с индексом (отсчет A'). Кроме того, берут отсчеты (л и п) по концам пузырька уровня (для исследования правильности вращения алидады по показаниям уровня). Для каждой установки алидады находят разности $v = 2(A - A')$, которые используют для вычисления элементов эксцентриситета алидады и для характеристики правильности ее вращения вокруг оси.

Элементы синусоиды

$$\bar{v}_\varphi = f \sin(\varphi - P) + d,$$

отражающей влияние эксцентриситета алидады на изменения разностей $v_\varphi = 2(A - A')$ при различных установках φ алидады, вычисляют по формулам:

$$\operatorname{tg} P = \frac{\sin P}{\cos P} = \frac{-[v \cos \varphi]}{[v \sin \varphi]};$$

$$f = -\frac{2[v \cos \varphi]}{n \sin P} = \frac{2[v \sin \varphi]}{n \cos P};$$

$$d = \frac{1}{n}\sum_1^n v,$$

где P — угол, ориентирующий линейный элемент e эксцентриситета алидады относительно нулевого штриха лимба; f — амплитуда синусоиды; d — постоянный параметр ее, характеризующий сдвиг оси симметрии синусоиды по оси ординат относительно ее начала, обу-

словленный смещением индекса оптического микрометра относительно его расчетного положения.

Зная радиус R кольца делений лимба и определив параметр f, найдем линейный элемент e эксцентриситета алидады и выражение его в угловой форме (угловой эксцентриситет ε):

$$e = \frac{fR}{2\rho}; \qquad \varepsilon = \frac{f}{2}; \qquad \rho = 206\,265''.$$

Для наглядной характеристики правильности вращения алидады вокруг ее оси строят график. По оси абсцисс откладывают установки алидады $\varphi = 0°, 30°, \ldots, 330°$, а по оси ординат измеренные величины $v_\varphi = 2(A - A')$ на следующих друг за другом двух прямых и двух обратных оборотах алидады. На график наносят также синусоиду $\tilde{v}_\varphi = f \sin(\varphi - P) + d$ и затем вычисляют разности $\delta = v - \tilde{v}_\varphi$. При правильном вращении алидады колебания величины $v = 2(A - A')$ не превышают $40''$, а максимальные значения разностей $\delta = v - \tilde{v}_\varphi$ не превосходят $15''$.

Правильность вращения алидады горизонтального круга исследуют еще и по показаниям уровня при вращении алидады на двух последовательных оборотах ее в прямом и обратном направлениях.

Эксцентриситет горизонтального круга теодолита определяют так же, как и эксцентриситет алидады с той лишь разницей, что при исследовании эксцентриситета горизонтального круга алидада остается неподвижной, а переставляют лимб через 30°, причем выполняют только по одному обороту круга в прямом и обратном направлениях. Элементы эксцентриситета лимба и параметры синусоиды вычисляют по тем же формулам, что и при исследовании эксцентриситета алидады.

Наклон (i) горизонтальной оси вращения зрительной трубы, обусловленный неперпендикулярностью горизонтальной и вертикальной осей теодолита, определяют из обработки измерений горизонтальных направлений на три визирные цели, находящиеся в створе (с отклонениями не более 1°) и имеющие углы наклона $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \geqslant +20°$, $\alpha_3 \geqslant -20°$.

Программа измерений состоит из шести приемов. В каждом приеме при одном положении вертикального круга (КЛ) наводят трубу последовательно на цель в горизонте, верхнюю, нижнюю и берут отсчеты по горизонтальному кругу. Затем переводят трубу через зенит и выполняют измерения при другом положении круга (КП) в обратной последовательности. Для каждой цели в каждом приеме вычисляют величину $c_i = (КЛ — КП)/2$ и находят их средние значения из шести приемов c_1, c_2 и c_3. С точностью до минуты измеряют углы наклона α_1, α_2, и α_3 на каждую визирную цель.

Угол i неперпендикулярности осей теодолита вычисляют по формуле

$$i = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2 - c_1 \sec\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} + \frac{c_3 - c_1 \sec\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_3}\right).$$

Среднюю квадратическую ошибку определения угла i находят по формуле

$$m_i = m_c \sec\alpha \sqrt{1 + \sin^2\alpha},$$

где $\alpha = (|\alpha_2| + |\alpha_3|)/2$; m_c — средняя квадратическая ошибка определения c из шести приемов,

$$m_c = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{3n(n-1)}},$$

где $v_i = c_i - c_0$ — отклонения от средних в каждой группе определения c, взятые по всем трем группам; n — число приемов ($n = 6$).

Ошибка m_i определения неперпендикулярности осей у высокоточных теодолитов должна быть не более $0{,}5''$.

Ошибки диаметров горизонтального круга высокоточного теодолита могут быть исследованы с целью:

а) введения поправок в каждый измеренный угол или направление; в этом случае разности поправок любой пары диаметров должны быть получены с одинаковыми весами, а сами поправки — для всех диаметров, причем с ошибками не более $0{,}1''$;

б) установления качества разделения круга и пригодности его для производства высокоточных угловых измерений; в настоящее время полные ошибки диаметров лимба определяют через 3°, при этом удовлетворительными считают лимбы, полные ошибки диаметров которых не превышают допусков, указанных в табл. 49;

в) установления характера изменения систематических ошибок делений лимба и использования выявленной закономерности их изменений для последующей разработки методов борьбы с влиянием этих ошибок в процессе угловых измерений на пункте;

г) контроля работы делительной машины.

В настоящее время поправки за ошибки диаметров круга не вводят в измеренные углы в триангуляции из-за сложности точного определения их величины и наличия сравнительно простых путей заметного ослабления влияния ошибок диаметров на конечные (уравненные) результаты измерений на станции. Тем не менее техника и качество разделения кругов высокоточных теодолитов нуждаются в дальнейшем совершенствовании и повышении точности нанесения делений.

III.2.2. Источники ошибок при высокоточных угловых измерениях

Личные ошибки. При визуальном методе высокоточных угловых измерений в триангуляции личные ошибки систематического характера возникают главным образом из-за ошибочной оценки положения оси симметрии наблюдаемых предметных целей (визирных цилиндров, штрихов лимба и т. п.). При наблюдениях на световые цели резко различной яркости влияние личных ошибок на измеренный угол может достигать $1{,}5''$ и более. Такие ошибки могут быть заметно уменьшены путем выравнивания яркости целей по всем наблюдаемым направлениям или путем применения окулярной поворотной призмы.

Для ослабления влияния ошибок, возникающих из-за различного освещения штрихов лимба, в высокоточных теодолитах применяют электрическое освещение кругов.

Приборные ошибки. При измерении горизонтальных углов в триангуляции предполагается, что вертикальная ось теодолита совпадает с направлением отвесной линии в данной точке, лимб и ось вращения трубы перпендикулярны к вертикальной оси теодолита, визирная ось трубы лежит в плоскости большого круга теодолита и ось вращения алидады проходит через центр лимба, а центр лимба совпадает с центром кольца делений на нем. Отступления от этой геометрической схемы теодолита порождают соответствующие ошибки. В эту групп ошибок входят ошибки, возникающие из-за:

1) неперпендикулярности визирной оси к оси вращения трубы (коллимационная ошибка);

2) наклона горизонтальной оси вращения трубы;

3) наклона вертикальной оси вращения теодолита;

4) наклона (негоризонтальности) плоскости лимба;
5) эксцентриситета алидады;
6) эксцентриситета лимба.

Рассмотрим влияние этих ошибок на результаты угловых измерений.

Коллимационная ошибка. Под коллимационной ошибкой зрительной трубы понимают малый угол c, образуемый визирной осью трубы с плоскостью большого круга теодолита. Влияние коллимационной ошибки на направление, измеренное при одном положении трубы (КП или КЛ), выражается формулами:

$$N = \text{КП} + \frac{c}{\sin z}; \qquad N \pm 180° = \text{КЛ} - \frac{c}{\sin z},$$

где N — истинное значение направления; КП и КЛ — измеренные значения направления; z — зенитное расстояние визирной цели. Влияние этой ошибки на угол, измеренный между направлениями на точки A и B при одном положении трубы, выражается формулами:

$$N_B - N_A = \text{КП}_B - \text{КП}_A + c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\};$$

$$N_B - N_A = \text{КЛ}_B - \text{КЛ}_A - c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\}.$$

Из приведенных формул следует, что значения направлений и углов, полученных как среднее из результатов измерений при двух положениях трубы (КП и КЛ), свободно от влияния коллимационной ошибки. При измерении направлений только при одном положении трубы (только при КП или только при КЛ) в угол войдет ошибка Δc

$$|\Delta c| = c\left\{\frac{1}{\sin z_B} - \frac{1}{\sin z_A}\right\}.$$

При $z_A = z_B$ величина $\Delta c = 0$. При $z_A \neq z_B = 90 \pm 2°$, как это иногда имеет место в триангуляции, и при $2c = 20''$ максимальное остаточное влияние коллимационной ошибки на угол, измеренный при одном положении трубы, составляет около $0{,}01''$.

Значение коллимационной ошибки c вычисляют по формуле

$$c = \frac{1}{2}(\text{КЛ} - \text{КП}) \sin z.$$

При $z = 90°$ получим $2c = \text{КЛ} - \text{КП}$. Значение двойной величины коллимационной ошибки не должно превышать $20''$.

Наклон горизонтальной оси вращения трубы может происходить либо от наклона вертикальной оси теодолита, либо от неравенства подставок трубы, включая и неравенство диаметров цапф. Предположим, что наклон горизонтальной оси на угол i обусловлен только неравенством подставок трубы, включая и неравенство диаметров цапф, и что влияние других ошибок равно нулю.

Влияние наклона i горизонтальной оси вращения трубы на направление, измеренное при одном положении трубы, выражается формулами:

$$N = \text{КП} + \frac{i}{\operatorname{tg} z}; \qquad N \pm 180° = \text{КЛ} - \frac{i}{\operatorname{tg} z},$$

где z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Влияние наклона оси трубы на угол между направлениями на точки A и B, измеренный также при одном положении трубы, выражается формулами:

$$N_B - N_A = \text{КП}_B - \text{КП}_A + i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\};$$

$$N_B - N_A = \text{КЛ}_B - \text{КЛ}_A - i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\}.$$

Из приведенных формул следует, что значение угла, полученное как среднее из результатов измерений при двух положениях трубы (КП и КЛ), свободно от влияния наклона оси трубы. При измерении направлений только при одном положении трубы (при КП или при КЛ) в угол войдет ошибка Δi

$$|\Delta i| = i\left\{\frac{1}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{1}{\operatorname{tg} z_A}\right\}.$$

При $z_A = z_B$ величина $\Delta i = 0$; при $i = 5''$, $z_B = 92°$, $z_A = 88°$, как это иногда имеет место в триангуляции, $\Delta i = 0{,}35''$. Как видно, измерения при наклонной линии визирования надо проводить с осторожностью и так, чтобы при данной установке теодолита одна половина измерений была выполнена при одном положении трубы, а другая — непременно при другом ее положении. При наблюдениях необходимо особенно тщательно нивелировать горизонтальную ось вращения трубы.

Наклон вертикальной оси теодолита на малый угол δ относительно отвесной линии в данной точке вызывает наклон оси вращения трубы на малый угол q

$$q = \delta \sin t,$$

где t — угол, ориентирующий зрительную трубу (визирную цель) относительно вертикальной плоскости, в которой лежит наклоненная на малый угол δ ось вращения теодолита.

Влияние наклона q на направление, измеренное при одним положении трубы (КП или КЛ) выражается формулами:

$$N = \text{КП} + \frac{q}{\operatorname{tg} z}; \qquad N \pm 180° = \text{КЛ} + \frac{q}{\operatorname{tg} z}.$$

Влияние наклона вертикальной оси на угол, измеренный между направлениями на точки A и B при одном положении трубы, выражается формулами:

$$N_B - N_A = \text{КП}_B - \text{КП}_A + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A};$$

$$N_B - N_A = \text{КЛ}_B - \text{КЛ}_A + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A}.$$

Влияние наклона q на угол, полученный как среднее из наблюдений при двух положениях трубы,

$$N_B - N_A = \frac{\text{КП}_B + \text{КЛ}_B}{2} - \frac{\text{КП}_A + \text{КЛ}_A}{2} + \frac{q_B}{\operatorname{tg} z_B} - \frac{q_A}{\operatorname{tg} z_A}.$$

Таким образом, влияние наклона q оси вращения трубы, являющегося следствием наклона вертикальной оси теодолита, не исключается из результатов измерений. При $q_{max} = 5''$, как это допускается в триангуляции 1—2 классов, и $z = 90° \pm 2°$ значение $q/\mathrm{tg}\, z = 0{,}17''$. При неблагоприятном стечении обстоятельств, например при $z_A = z_B$ и $q_A = -q_B$ или при других сочетаниях этих величин, влияние наклона вертикальной оси на измеренный угол может быть в 2 раза больше указанной величины. Поэтому при тщательно выверенном теодолите, когда наклон вертикальной оси $\delta = 5''$, его влиянием на измеренный угол можно пренебречь только в том случае, если зенитные расстояния наблюдаемых целей уклоняются от 90° не более чем на 1°. В остальных случаях, при $z = 90 \pm 1°$ и более, в измеренные направления необходимо вводить соответствующие поправки за наклон вертикальной оси теодолита. Это относится в особенности к горным районам работ и крупным городам, где колебания зенитных расстояний могут быть значительными.

Поправку Δ в направление за наклон вертикальной оси теодолита вычисляют по формуле

$$\Delta = b \operatorname{ctg} z \frac{\tau}{2},$$

где b — наклон горизонтальной оси трубы в полуделениях уровня, обусловленный влиянием наклона вертикальной оси; z — зенитное расстояние наблюдаемой цели; $\tau/2$ — цена полуделения уровня.

Наклон b вычисляют по формуле

$$b = \frac{1}{2}[{}_0(л + п) - (л + п)_0],$$

где $(л + п)_0$ — сумма отсчетов по левому и правому концам пузырька для случая, когда нуль шкалы уровня находится справа от направления теодолит — визирная цель, и ${}_0(л + п)$ — когда нуль слева (при другом круге).

Для контроля постоянства места нуль-пункта уровня вычисляют его значение в полуделениях

$$М = \frac{1}{2}[(л_1 + л_2) + (п_1 + п_2)],$$

где $л_1$ и $п_1$ — отсчеты уровня по левому и правому концам пузырька в первом полуприеме, а $л_2$ и $п_2$ — во втором.

Эти формулы справедливы для случая, когда нуль шкалы уровня находится на краю ампулы. В случае иной подписи делений на ампуле уровня наклон оси b вычисляют по другим формулам.

Влияние наклона (негоризонтальности) лимба на измеренное направление выражается формулой

$$(y - x) = \frac{\omega^2}{4\rho} \sin 2y,$$

где x — отсчет по горизонтально установленному лимбу при наведении трубы на предмет; y — отсчет при том же положении трубы, но при наклоне лимба на малый угол ω относительно горизонта. При $\omega = 60''$ и $\sin 2y = 1$ получим $y - x = 0{,}004''$. Неперпендикулярность лимба к вертикальной оси больше $2'$ не следует допускать, так как в этом случае будет наблюдаться расфокусировка изображений штрихов лимба.

Эксцентриситет алидады вызывает сдвиг нуль-пункта микрометра и изменение рена. Влияние эксцентриситета алидады на отсчеты по диаметрально противоположным штрихам $А$ и $Б$ выражается формулами:

$$M_A = M'_A + \varepsilon \sin(M'_A - P) + \Delta r;$$

$$M_Б = M'_Б - \varepsilon \sin(M'_A - P) - \Delta r,$$

где M_A, $M_Б$ — отсчеты, свободные от влияния эксцентриситета; M'_A, $M'_Б$ — фактические отсчеты; $\varepsilon = (e/R)\rho$ — угловой эксцентриситет алидады; e — линейный элемент эксцентриситета (расстояние между центром кольца делений лимба и проекций на лимб центра вращения алидады); P — угол, ориентирующий линейный элемент эксцентриситета относительно нулевого штриха на лимбе; R — радиус кольца делений лимба; Δr — изменение рена микрометра, обусловленное влиянием эксцентриситета алидады.

Погрешность Δr входит в отсчет по одному штриху лимба со знаком «плюс», а в отсчет по диаметрально противоположному штриху — со знаком «минус». Ошибка в отсчете, обусловленная изменением рена из-за эксцентриситета алидады, пренебрегаемо мала: даже при $\varepsilon = 60''$ она не более $0{,}05''$.

Из приведенных выражений для M_A и $M_Б$ следует, что при выводе среднего значения из отсчетов по двум диаметрально противоположным штрихам лимба влияние эксцентриситета на измеренное направление полностью исключается.

Эксцентриситет лимба при выводе среднего отсчета по диаметрально противоположным штрихам круга практически, как уже отмечалось, никакого влияния на измеряемое направление не оказывает, однако при изготовлении теодолита он должен быть доведен до минимума.

Ошибки делений и диаметров лимба. При разделении лимба положение каждого штриха с номером φ определяется с ошибкой $\Delta\varphi$. Среднее арифметическое из значений ошибок двух диаметрально противоположных штрихов лимба называют ошибкой диаметра. Ошибки диаметров подразделяют на случайные и систематические, а последние, в свою очередь, на длиннопериодические, по величине плавно изменяющиеся по всей окружности лимба, и на короткопериодические (внутриградусные) с периодом изменения около 15—30′. Полная ошибка x_φ диаметра φ состоит из систематической x_σ и случайной x_η ошибок, т. е.

$$x_\varphi = x_\sigma + x_\eta.$$

У современных высокоточных теодолитов полные ошибки диаметров обычно не превышают $1{,}2''$, короткопериодические — $1''$, а случайные — $0{,}3''$.

Систематические ошибки x_σ диаметров лимба аппроксимируют рядом Фурье, ограничиваясь четырьмя его гармониками, $x_\sigma = a_2 \sin 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi + a_6 \sin 6\varphi + a_8 \sin 8\varphi + b_2 \cos 2\varphi + b_4 \cos 4\varphi + b_6 \cos 6\varphi + b_8 \cos 8\varphi$.

Коэффициенты a_j, b_j вычисляют по формулам:

$$a_j = \frac{2}{n}[x_{\varphi i} \sin 2j\varphi]_{\varphi=0}^{n};$$

$$b_j = \frac{2}{n}[x_{\varphi i} \cos 2j\varphi]_{\varphi=0}^{n},$$

где x_φ — полные ошибки диаметров лимба; i — порядковый номер полной ошибки диаметра ($i = 1, 2, \ldots, n$); j — порядковый номер коэффициентов ряда Фурье ($j = 2, 4, 6, 8, \ldots, k$); n — число полных ошибок диаметров.

Случайные ошибки диаметров вычисляют как разности: $x_\eta = x_\varphi - x_\sigma$.

У современных высокоточных теодолитов остаточное влияние систематических ошибок диаметров лимба на среднее значение направления, измеренного 12 приемами при симметричных перестановках лимба между приемами, не превышает 0,1″.

Короткопериодические ошибки диаметров лимба исследуют путем измерения малых углов, равных 10; 20 и 30′.

Влияние ошибок визирования и отсчета на измеренный угол уменьшается многократными наблюдениями, а также соответствующим методом измерений.

У современных высокоточных теодолитов средняя квадратическая ошибка совмещения изображений штрихов горизонтального круга не превышает 0,3″. Средняя квадратическая ошибка наведения биссектора окулярного микрометра на визирный цилиндр удаленного сигнала в первом приближении может быть оценена по формуле

$$m \approx \omega/3v,$$

где $\omega = 60''$ — разрешающая способность глаза; v — увеличение трубы теодолита.

Различного рода инструментальные ошибки, появление которых связано с вращением алидады и с плавными изменениями температуры воздуха и теодолита в процессе измерений углов (увлекание столика сигнала при вращении алидады, влияние люфта подъемных винтов, незначительные гнутия частей теодолита и упругие последействия, ход визирной оси трубы и т. п.), могут быть заметно ослаблены, если измерения направлений и углов ведутся по симметричной программе как в смысле симметричного наблюдения направлений во времени внутри каждого отдельного приема, так и в смысле симметричного расположения частей теодолита относительно каждого наблюдаемого направления.

Боковая рефракция света. Одним из основных источников ошибок при высокоточных угловых измерениях в триангуляции является влияние внешних условий, главным образом боковой рефракции. Надо различать качество изображений, колебания их и явление рефракции. Качество изображений зависит от степени замутненности атмосферы мельчайшими частицами пыли или воды и от степени теплообмена между поверхностью почвы и прилегающим к ней слоем воздуха. Колебания изображений наблюдаемых целей вызываются конвекционными токами воздуха в приземном слое атмосферы; интенсивность колебаний тем больше, чем выше температура поверхности почвы, чем больше разность температур почвы и воздуха и чем ближе к поверхности проходит визирный луч. Угловые измерения в триангуляции разрешается вести только на спокойные и слегка колеблющиеся изображения при хорошей и удовлетворительной видимости наблюдаемых целей. Следует иметь в виду, что визирование выполняется достаточно уверенно только при колебаниях изображений, не выходящих за пределы 2″. Применение окулярного микрометра в этом случае дает хорошие результаты. Поднятие визирного луча над препятствиями местности на несколько метров способствует улучшению качества изображений и уменьшению влияния боковой рефракции местного характера.

В силу различной плотности среды световой луч проходит от точки A к точке B среды не по прямой AB, а по сложной кривой двоякой кривизны оптически кратчайшим путем AmB, условно показанным на рис. 84. Наблюдатель, находясь в точке A, увидит изображение предмета B не в направлении AB, а по касательной AB' к последнему элементу световой кривой AmB в точке A. Угол $B'AB$ называют углом рефракции (рефракцией) в точке A. Горизонтальную составляющую его δ называют углом боковой рефракции (боковой рефракцией), а вертикальную составляющую этого угла — углом вертикальной рефракции (вертикальной рефракцией). В то время как при больших расстояниях вертикальная рефракция достигает минуты и более, боковая рефракция не превышает несколько секунд. Однако наличие боковой рефракции делает точное измерение горизонтальных углов сложной проблемой и, по существу, ограничивает дальнейшее повышение точности этих измерений.

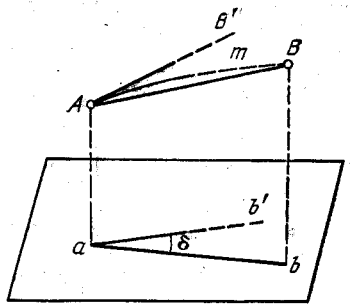


Рис. 84. Схема влияния боковой рефракции

Различают большие (областные) и малые (местные) поля боковой рефракции (поля $\nabla_\tau n$ — горизонтального градиента показателя преломления воздуха). Большие поля рефракции обусловлены общим географическим распределением плотности воздуха от экватора к полюсу, в прибрежных зонах морей и океанов, вблизи горных хребтов и т. д. Такие большие поля боковой рефракции по их свойствам близки к однородным ($\nabla_\tau n \cong \text{const}$). Влияние их в триангуляции 1 класса на направления длиной 25—30 км составляет в среднем около 0,2″ и носит систематический характер. Ослабляется оно в процессе уравнивания звеньев триангуляции за условия азимутов Лапласа.

Рефракция местного происхождения обусловлена местными аномалиями плотности воздуха на пути визирного луча. При неблагоприятном стечении обстоятельств ошибки в углах и азимутах, обусловленные влиянием местных полей рефракции, могут достигать 3—7″ и более.

Средняя квадратическая величина влияния местных полей рефракции на точность угловых измерений в триангуляции высших классов составляет в среднем 0,4—0,6″, а на точность определения азимутов на пунктах Лапласа — 0,6—0,8″.

Вследствие большого разнообразия подстилающей поверхности местная рефракция в сетях триангуляции имеет случайное распределение, хотя по отдельным направлениям она носит характер систематических ошибок.

Боковая рефракция δ зависит от наклонов к горизонту эквипотенциальных поверхностей $n = \text{const}$, где n — показатель преломления воздуха, а следовательно, от метеорологических элементов и градиентов их. Эта зависимость без учета пренебрегаемо малого влияния влажности воздуха (составляющего менее 1 % от δ) может быть выражена формулой

$$\delta = \varepsilon + \sigma,$$

где для неоднородного поля ($\nabla_p n \neq \text{const}$):

$$\varepsilon = \frac{0{,}74}{s \sin z} \int_0^s \frac{p}{T^2} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy;$$

$$\sigma = \frac{21{,}7}{s \sin z} \int_0^s \frac{p}{T^2} \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q)(s - y)\, dy$$

и для однородного поля ($\nabla_p n = \text{const}$):

$$\varepsilon = 0{,}37 \frac{p}{T^2} \frac{s}{\sin z} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q);$$

$$\sigma = 10{,}8 \frac{p}{T^2} \frac{s}{\sin z} \frac{\partial T}{\partial H} \operatorname{tg} \gamma \sin (A - Q).$$

В этих выражениях: δ — поправка в измеренное направление за влияние боковой рефракции (в секундах дуги); s — длина визирного луча (м) по хорде, стягивающей концы его; y — расстояние (м) по хорде от начальной точки луча до текущей; p — давление воздуха (мм); $T = 273{,}2 + T°\text{C}$ — абсолютная температура Кельвина; $\partial T/dH \approx (T_2 - T_1)/(H_2 - H_1)$ — вертикальный градиент температуры воздуха (градус/м); γ — угол, отсчитываемый от точки зенита до вектора ∇n, направленного в сторону уменьшения $n = n(X, Y, H)$; A и Q — азимуты измеряемого направления и вектора ∇n соответственно, отсчитываемые по ходу часовой стрелки от оси X, направленной на север, к оси Y, направленной на восток; z — зенитное расстояние наблюдаемой цели.

Составляющая σ отражает в первую очередь влияние местных полей боковой рефракции, а составляющая ε — влияние рефракционных полей значительного протяжения. В общем случае, т. е. при $\varepsilon + \sigma \neq 0$ и $A \neq Q$, имеем

$$\sigma = 0, \text{ если } (\operatorname{tg} \gamma)_s = 0.$$

Однако в подавляющем числе случаев наклоны $\operatorname{tg} \gamma$ на всем пути визирного луча длиной s не равны нулю. Поэтому

$$\varepsilon \to 0, \text{ если } (\operatorname{tg} \gamma)_s \to 0;$$

$$\sigma \to 0, \text{ если } \left.\begin{matrix} \partial T/\partial H \\ \text{и/или} \\ \operatorname{tg} \gamma \end{matrix}\right| \to 0.$$

В триангуляции, как отмечалось выше, $|\sigma| > |\varepsilon|$. Поэтому основное внимание должно быть направлено на существенное ослабление влияний местных полей боковой рефракции (составляющей σ). Заметим, что при $\sigma \to 0$ и $\varepsilon \to 0$.

Известно, что в нижнем 300-метровом слое атмосферы, в котором ведутся наблюдения на пункты триангуляции, вертикальные градиенты температуры в суточном ходе их дважды в сутки (утром в момент времени t_0^y, наступающий через 1—2 ч после восхода Солнца, и вечером в момент времени $t_0^в$, наступающий за 1—2 ч перед заходом) переходят через нуль, изменяя в эти моменты времени всякий раз знаки на противоположные (рис. 85).

Под воздействием суточного хода рефракции каждое измеряемое направление (касательная к последнему элементу

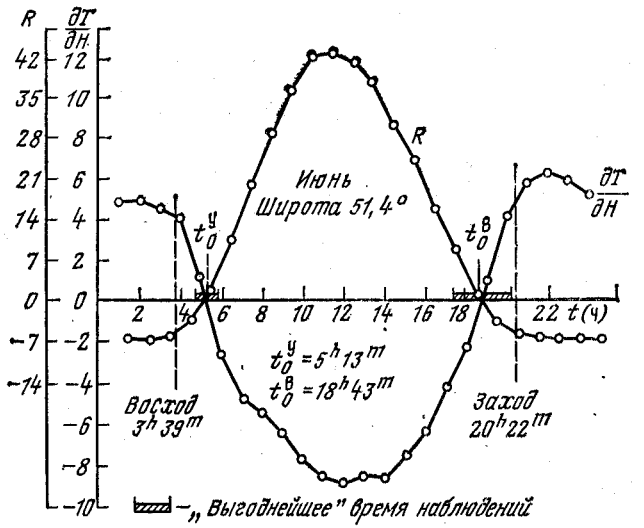


Рис. 85. График суточного хода радиационного баланса R (кал/см²·ч) и вертикальных градиентов температуры воздуха $\partial T/\partial H$ (градус/100 м) на высоте метеобудки в открытой местности (среднее за июнь)

световой кривой в точке приема света) также испытывает суточный ход (рис. 86). В связи с этим возникает задача учета суточного хода измеряемых направлений при высокоточных угловых измерениях и азимутальных определениях с целью приведения (редуцирования) их результатов к определенным физическим условиям, когда влияние боковой рефракции равно или почти равно нулю. Так как на двух-, трехчасовом отрезке времени в окрестности моментов t_0, когда обычно измеряются горизонтальные углы в триангуляции, температурные градиенты, а следовательно, и функционально связанная с ними бо-

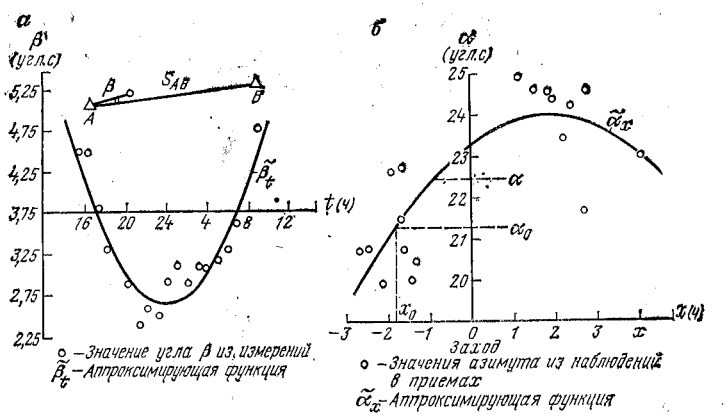


Рис. 86. Графики изменения во времени угла β (а) и азимута α земного предмета (б) под воздействием суточного хода боковой рефракции

ковая рефракция изменяются во времени практически линейно и, переходя через нуль, меняют знаки на противоположные, то отсюда вытекает простой и в то же время эффективный способ почти полного исключения влияний местных полей боковой рефракции из результатов наблюдений, впервые экспериментально установленный и теоретически обоснованный автором*. Суть этого способа сводится к тому, что в нижнем 300-метровом слое атмосферы горизонтальные направления (углы и азимуты) надо либо измерять симметрично во времени относительно среднего момента t_0 изометрии воздуха на высоте визирного луча и выводить среднее из результатов измерений, либо редуцировать результаты измерений на момент времени t_0 в случае асимметрических наблюдений.

В массовых работах по высокоточным угловым измерениям в триангуляции целесообразно использовать первый способ существенного ослабления рефракционных влияний, распределяя приемы измерения направлений симметрично во времени относительно момента времени t_0, когда наступают наиболее спокойные и четкие изображения визирных целей, характерные для периода изотермии воздуха на высоте визирного луча.

Второй способ целесообразно использовать при обработке асимметричных измерений, исполняемых в геодезических сетях повышенной точности, в первую очередь при определении азимутов на пунктах Лапласа.

При обработке многодневных измерений, исполненных асимметрично относительно момента t_0, необходимо учесть «сползание» этого момента времени при переходе от одних суток к другим по причине изменения склонения Солнца. С этой целью счет времени целесообразно вести в каждую j-ю дату от момента захода Солнца ($t_{\text{зах}}$), вычисляя его по формуле

$$x = t - t_{\text{зах}}.$$

В этой системе счета времени вместо t_0 возьмем

$$x_0 = t_0 - t_{\text{зах}}.$$

Горизонтальные направления β, измеренные в течение нескольких вечеров не менее чем 15—18 круговыми приемами на отрезке времени $(t_{\text{нач}} < t_0 < t_{\text{кон}}) \leqslant 2$—3 ч, могут быть редуцированы на средний на пункте момент x_0 вечерней изотермии воздуха по формуле

$$\beta_0 = \beta + k\,(x_0 - x),$$

где β_0 — исправленное за рефракцию значение угла; β — среднее значение его из приемов; k — часовое изменение этого угла; x— среднее по приемам время наблюдений на пункте; $k\,(x_0 - x) = \delta$ —поправка за асимметрию времени наблюдений, или, что то же самое, поправка за влияние рефракции.

В формуле для β_0 неизвестными являются часовые изменения k и моменты времени x_0. Часовые изменения k вычисляют по формуле

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i\, \Delta\beta_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2},$$

* *Н. В. Яковлев.* Об учете климатологических особенностей города при высокоточных угловых измерениях в городской триангуляции 1 класса. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960, вып. 6, с. 15—31.

где $\Delta x_i = x_i - x$; $\Delta\beta_i = \beta_i - \beta$; $(x_i,\ \beta_i)$ — время и результаты измерений угла в отдельных приемах; $(x,\ \beta)$ — средние значения времени и угла из всех приемов. Часовые изменения вычисляют на пункте для каждого угла, отсчитываемого от начального направления, причем отдельно для вечерних и утренних наблюдений.

Следует отметить, что экстраполяция значений измеренных направлений на момент времени x_0 (вечерних — на $x_0^{\text{в}}$, утренних — на $x_0^{\text{у}}$) не допускается и что должны быть предусмотрены меры, позволяющие в процессе наблюдений получить надежные значения часовых изменений k, а также и моментов времени x_0.

Состояние изотермии воздуха на высоте визирного луча продолжается в течение некоторого отрезка времени. Для наших целей лучше всего определить середину этого отрезка, соответствующую моменту времени x_0 (t_0). Известен ряд методов определения среднего момента времени x_0. Ниже будет рассмотрен один из них, который используют при редуцировании астрономических азимутов на момент изотермии воздуха.

Опыт показал, что в триангуляции 2 класса часовые изменения k углов треугольников колеблются от 0 до $\pm 3''$ в час и равны в среднем $\pm 0{,}7''$ в час; асимметрия времени наблюдений $\Delta x = (x_0 - x)$ на пунктах в разных физико-географических условиях изменяется от 0 до ± 2 ч, а поправки $\delta = k\,(x_0 - x)$ в углы треугольников за рефракцию колеблются от 0 до $\pm 1{,}6''$. После введения поправок δ за рефракцию вес измеренного угла возрастает в среднем в 1,7 раза.

Редуцирование азимутов земных предметов на момент наименьших рефракционных влияний. Под воздействием суточного хода боковой рефракции значения азимута земного предмета, полученные из наблюдений в приемах, изменяются во времени суток (см. рис. 86). Эти изменения закономерны и их необходимо учитывать как при организации азимутальных определений на пункте, так и при математической обработке их результатов.

Для того чтобы практически полностью исключить ошибки из-за рефракции из результатов измерений, необходимо редуцировать измеренное значение азимута к моменту x_0 изотермии воздуха на высоте визирного луча, когда влияние боковой рефракции равно или почти равно нулю.

Суточный ход рефракции и значений азимута α в приемах на отрезке времени вечерних, ночных и даже утренних наблюдений, вместе взятых за все дни, уверенно аппроксимируется параболой второго порядка

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha' + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2,$$

где $x_i = t_i - t_{\text{зах}}$ — время наблюдений (ч); α_i — значения азимута в приемах; α' — приближенное значение азимута, округленное до целого десятка секунд.

Азимут $\tilde{\alpha}_0$, редуцированный к моменту x_0 вечерней изотермии воздуха и практически свободный от влияния боковой рефракции, вычисляют по формуле

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha' + a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2.$$

Коэффициенты a_j определяют из обработки наблюдений азимута в приемах под условием $\sum v^2 = \min$, где $v_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - (\alpha_i - \alpha')$.

Для обеспечения высокой точности редукции азимута к моменту времени x_0 необходимо, чтобы в процессе наблюдений на пункте были выполнены требования, изложенные в работе [3], дополняющие Ин-

струкцию о построении Государственной геодезической сети СССР (М., Недра, 1966 г.):

1. Вечерние наблюдения при определении азимута должны начинаться не позднее чем за 2 ч до наступления момента времени $x_0(t_0)$, когда в слое воздуха на высоте визирного луча наступает состояние, наиболее близкое к изотермии, и появляются наиболее спокойные и четкие изображения визирных целей. Другими словами, в средних широтах наблюдения азимута должны начинаться примерно за 3 ч до захода Солнца, а в более высоких широтах несколько раньше.

2. Перед заходом Солнца в течение всех дней работы на пункте должно быть выполнено не менее 7—8 приемов определений азимута, из которых не менее 4 приемов должно быть выполнено до наступления изотермии воздуха (до момента времени x_0). Чем больше будет приемов до захода Солнца, тем меньше будет влияние рефракции на средний результат. При благоприятных погодных условиях разрешается всю программу наблюдений выполнять в вечерние часы до захода Солнца, причем не менее чем за 2 дня. Во всех остальных случаях программу наблюдений выполняют не менее чем за 3 дня.

3. Приемы определений азимута должны быть распределены более или менее равномерно на всем отрезке вечерних и ночных часов, в течение которых ведутся наблюдения на данном пункте; интервалы времени между приемами не рекомендуется допускать более 2 ч (целые сутки в расчет не принимаются).

4. Значения азимута α_i в приемах не должны отклоняться более чем на $2''$ в обе стороны от значений $\tilde{\alpha}_i$ параболы второго порядка наилучшим образом аппроксимирующей изменение величины азимута во времени, обусловленное суточным ходом боковой рефракции, т. е. $|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i|_{max} = v_{max} \leqslant 2''$.

Разность между наибольшими и наименьшими значениями азимута в приемах на должна превышать $6''$.

5. Перенаблюдение азимута в приемах, не укладывающихся в допуски, начинают с приемов, не удовлетворяющих первому допуску $v_{max} \leqslant 2''$. При этом повторный прием по времени его исполнения не должен отклоняться от основного более чем на ± 2 ч (без учета целых суток). В последующую обработку берут среднее из основного и повторного приемов (время наблюдений x_i также осредняют), если это среднее значение азимута α_i отклоняется от соответствующего ему сглаженного за суточный ход рефракции значения $\tilde{\alpha}_i$ не более чем на $2''$, в противном случае в обработку берут только повторный прием (при соблюдении допуска $v_{max} \leqslant 2''$).

6. Для стороны, азимут которой определяют, составляют профиль местности и вычисляют эквивалентную высоту h визирного луча над ней (отдельно для прямого и обратного азимутов). Эквивалентная высота не должна превышать 300 м ($h \leqslant 300$ м), в противном случае азимут оставляют без изменений и не исправляют за влияние рефракции.

7. Азимуты, определенные при снежном покрове местности, за рефракцию не исправляют.

Азимуты, результаты и условия наблюдений которых не отвечают требованиям пунктов 1—6, нельзя корректировать за влияние рефракции по рассматриваемой методике.

Экстраполяция наблюденных значений азимута на момент изотермии воздуха не допускается.

Результаты азимутальных определений, исполненных с учетом приведенных здесь дополнительных требований, обрабатывают сначала по стандартной методике. Для каждого приема наблюдений получают звездное время s_i определения азимута и его значение α_i.

Далее звездное время переводят сначала в местное среднее солнечное время t_i, а затем для каждой j-й даты вечерних наблюдений (включая и ночные наблюдения до и после полуночи) последнее t_i переводят в новую систему счета относительно момента захода Солнца в эту дату, т. е. вычисляют разности $x_i = t_i - t_{зах}$.

Вычисление времени становления вечерней изотермии воздуха на высоте визирного луча. Средний за все дни определений азимута момент времени x_0, когда влияние боковой рефракции на азимут равно или почти равно нулю, вычисляют в часах относительно момента захода Солнца по формуле

$$x_0 = -x'_0 + \varepsilon'_m + \varepsilon'_h,$$

где

$$x'_0 = \frac{\sum n_j x'_{0,\,j}}{\sum n_j}; \qquad \varepsilon'_m = \frac{\sum n_j \varepsilon'_{m,\,j}}{\sum n_j};$$

$$\varepsilon'_h = 1{,}30h\,[1 - (0{,}6976 - 0{,}00264\varphi)\,h + 0{,}064h^2].$$

Здесь $x'_{0,\,j}$ — многолетний для j-й даты на широте астропункта вечерний момент времени перехода радиационного баланса через нуль на высоте 2 м над почвой; значения x'_0 (в ч) даны в работах [2], [3] и показаны на рис. 87; n_j — число приемов определений азимута в j-й вечер, включая вечерние и ночные наблюдения (до и после полуночи); $\varepsilon'_{m,\,j}$ — поправка (в ч) за метеорологические условия в районе астропункта в j-ю дату определений азимута; ε'_h — поправка (в ч) за эквивалентную высоту h визирного луча над местностью; высота h выражена в сотнях метров ($0 < h \leqslant 3$); при $h > 3$ азимут не исправляют за влияние рефракции; φ — широта астропункта, выраженная в градусах ($40 \leqslant \varphi \leqslant 64°$).

Вычисление поправок ε'_m за метеорологические условия. Поправки $\varepsilon'_{m,\,j}$ вычисляют в часах для каждой j-й даты вечерних наблюдений азимута по формуле

$$\varepsilon'_{m,\,j} = Q\left\{\frac{(273{,}2 + T)^4}{(273{,}2 + T_0)^4} \cdot \frac{1 - 0{,}026e}{1 - 0{,}026e_0} \cdot \frac{1 - A_0}{1 - A} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1 - 0{,}42n\,(n+1)}{1 - 0{,}42n_0\,(n_0+1)} \cdot \frac{1 - (b + 0{,}38n_0)\,n_0}{1 - (b + 0{,}38n)\,n} - 1 \right\}.$$

Здесь с индексом ноль обозначены сглаженные по широтам и датам многолетние средние суточные значения: T_0°C — температуры воздуха, e_0 — упругости водяного пара воздуха (мм рт. ст.), n_0 — общей облачности (в долях единицы), A_0 — альбедо местности между астропунктами (ее отражательной способности), в долях единицы. Эти величины и параметр Q (ч) выбирают из Метеорологических таблиц в работах [2, 3] по широте астропункта и дате вечерних определений азимута. Параметр b вычисляют по формулам:

$$b = 0{,}412 - 0{,}002\,(57 - \varphi) \text{ при } 40° \leqslant \varphi \leqslant 57°;$$

$$b = 0{,}412 - 0{,}018\,(\varphi - 57) \text{ при } 57° \leqslant \varphi \leqslant 64°,$$

где широта астропункта φ берется до 0,1°.

Фактические значения средних суточных величин: температуры воздуха T, упругости водяного пара воздуха e, общей облачности n, альбедо местности A запрашивают для каждой j-й даты вечерних наблюдений азимута с ближайших к астропункту метеостанций, распо-

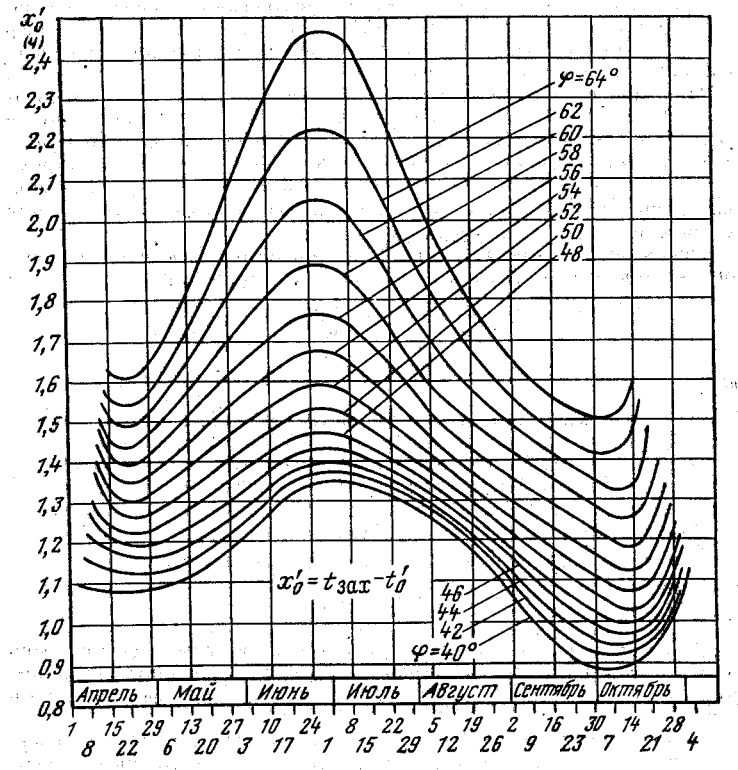


Рис. 87. График вечерней изотермии воздуха

ложенных вокруг него по возможности в диаметрально противоположных направлениях в радиусе до 50 км в закрытой и до 100 км в открытой (степной, полупустынной) местности. Данные этих метеостанций осредняют и средние результаты подставляют в формулу для определения $\varepsilon'_{m,j}$.

При отсутствии метеостанций в районе работ необходимые метеоэлементы определяют на астропункте (на высоте не ниже 2 м над почвой) через каждые 6 ч (1, 7, 13 и 19 ч) декретного времени, и затем из них выводят средние суточные значения. При отсутствии надежных данных об альбедо местности рекомендуется принять $A = A_0$.

Практика показывает, что поправки ε'_m к x'_0 за метеорологические условия в подавляющем числе случаев (~85 — 90 %) малы и не превышают 0,2 ч; число наибольших поправок, равных 0,5—0,7 ч, составляет не более 3 %.

Вычисление эквивалентных высот и поправок ε'_h. На топографической карте масштаба 1 : 100 000 проводят прямую линию между смежными астропунктами, на которых определены прямой и обратный азимуты. На этой линии отмечают наиболее характерные точки излома профиля местности. Эти точки, число которых не следует брать

более 30, совмещают с ближайшими к ним горизонталями и нумеруют их от начального астропункта, которому присваивают нулевой номер ($i = 0$), к другому астропункту на конце линии, которому присваивают номер $i = k$.

При помощи линейки с миллиметровыми делениями измеряют по карте до 0,1 км расстояния s_i между начальным астропунктом и каждой i-й точкой профиля местности, включая второй астропункт. По горизонталям определяют высоты H_i каждой i-й точки профиля местности, а также высоты начального H_0 и конечного H_k астропунктов. Высоту леса и геодезических знаков можно не учитывать, считая их примерно одинаковыми.

Эквивалентную высоту h вычисляют в метрах отдельно для прямого и отдельно для обратного азимутов по формуле

$$h = \frac{\sum \Delta s_i p_i \bar{h}_i}{\sum \Delta s_i p_i},$$

где

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1}; \qquad p_i = \left(1 - \frac{d_i}{S}\right);$$

$$d_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i-1}); \qquad \bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i-1});$$

$$h_i = (H_0 - H_i) + (H_k - H_0)(s_i/S) - v_i;$$

$$v_i = 0{,}067 s_i^2 \quad \text{при} \quad s_i \leqslant S/2;$$

$$v_i = 0{,}067 (S - s_i)^2 \quad \text{при} \quad s_i \geqslant S/2.$$

Здесь s_i — расстояние от начального астропункта до i-й точки профиля местности, км; S — расстояние между астропунктами (длина стороны), км; v_i — поправка за кривизну Земли и рефракцию в i-й точке профиля, м.

Аналогичным образом вычисляют эквивалентную высоту визирного луча и для обратного азимута. Отметим, что для прямого и обратного азимутов эквивалентные высоты не равны между собой из-за несимметрии профиля местности.

Вычисление азимута, исправленного за влияние рефракции. Коэффициенты a_j параболы $\tilde{\alpha}_i = \alpha' + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2$, аппроксимирующей суточный ход значений азимута на отрезке вечерних и ночных часов наблюдений, находят из решения системы нормальных уравнений, которые запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum l_i \\ \sum x_i l_i \\ \sum x_i^2 l_i \end{pmatrix},$$

где n — число приемов определений азимута; i — номера приемов; x_i — время наблюдений в приеме; $l_i = \alpha_i - \alpha'$. Более кратко эту систему уравнений запишем в виде

$$XA = L,$$

откуда найдем вектор A неизвестных коэффициентов a_j:

$$A = X^{-1}L = QL,$$

где $Q = X^{-1}$ — матрица весовых коэффициентов, обратная к матрице X коэффициентов нормальных уравнений:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}.$$

Азимут, исправленный за влияние боковой рефракции, найдем по формуле

$$\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 + \Sigma\Delta = \alpha' + a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \Sigma\Delta,$$

где $\Sigma\Delta$ — сумма всех поправок в азимут, предусмотренных в [1].

Средняя квадратическая ошибка исправленного за рефракцию азимута α_0 равна

$$m_0 = \mu \sqrt{\frac{1}{P_0}},$$

где средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-3}},$$

где $v_i = \tilde{\alpha}_i - \alpha_i$; n — число приемов определений азимута.

Обратный вес азимута α_0 вычисляют по формуле

$$1/P_0 = f^* Q f,$$

где вектор $f^* = (1 \;\; x_0 \;\; x_0^2)$; вектор $f = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ x_0^2 \end{pmatrix}$; Q — матрица весовых коэффициентов; x_0 — момент времени, на который редуцируют азимут. После перемножения матриц формула примет вид

$$1/P_0 = Q_{11} + 2Q_{12}x_0 + (Q_{22} + 2Q_{13})\, x_0^2 + 2Q_{23}x_0^3 + Q_{33}x_0^4,$$

где Q_{ij} — элементы матрицы Q весовых коэффициентов.

Практика показывает, что на пунктах Лапласа влияние боковой рефракции на односторонние азимуты (при длинах сторон 12—25 км) составляет в среднем 0,6—0,8″ при колебаниях от 0 до 2,5″, а на среднее из прямого и обратного азимутов — в 2 раза меньше. После учета рефракции вес определения азимутов увеличивается в среднем в 2,5 раза.

Выгоднейшее время измерения горизонтальных углов в триангуляции. Выгоднейшее время наблюдений в триангуляции рассматривают с двух точек зрения: 1) с точки зрения наилучших условий видимости, минимальных колебаний и высокого качества изображений визирных целей; 2) с точки зрения наименьшего влияния местных полей рефракции на результаты измерений. Такие благоприятные для наблюдений условия имеют место вечером и утром, особенно в периоды, близкие к моменту перехода через нуль радиационного баланса подстилающей поверхности, когда в слое воздуха на высоте визирного луча наблюдается состояние, наиболее близкое к изотермии (см. рис. 85). Продолжительность этого благоприятного для наблюдений отрезка времени зависит от многих факторов и изменяется в вечерние часы от нескольких десятков минут в полупустынных и степных районах в тихую безоблачную жаркую погоду летом до нескольких часов в холодную и

ветреную погоду при наблюдениях в горах и северных широтах. Применительно к средним условиям летней погоды начало «выгоднейшего» времени вечерних наблюдений ($t_{\text{нач}}$) можно в первом приближении предвычислить по формуле

$$t_{\text{нач}} = t_{\text{зах}} - 2x_0',$$

взяв величины x_0 на рис. 87 и зафиксировав время захода Солнца $t_{\text{зах}}$, находясь на сигнале или вычислив его по астрономическому ежегоднику перед выездом на полевые работы. Заканчивать наблюдения рекомендуется примерно за полчаса до захода Солнца. Как уже отмечалось, наблюдения следует вести на спокойные и слегка колеблющиеся изображения визирных целей, когда случайные колебания их не выходят за пределы 2″.

Отметим, что утренний период «выгоднейшего» времени наблюдений несравненно короче, чем вечерний, а иногда и вовсе отсутствует. С увеличением облачности, усилением ветра и общим понижением температуры воздуха этот период времени заметно возрастает по сравнению с таковым при безоблачной тихой и жаркой погоде.

В условиях крупного города наблюдения целесообразно приурочивать к ранней весне и осени, когда температурные контрасты внутри города сравнительно малы, а следовательно, мало и влияние рефракции. В жаркую летнюю погоду (при $T_{\text{ср. сут}} > 20°$) боковая рефракция в условиях крупного города в ее суточном ходе переходит через нулевое значение утром примерно через 2,5 ч после восхода, а вечером — примерно за столько же времени до захода Солнца, изменяя при этом всякий раз знаки на противоположные. Для того чтобы существенно ослабить влияние местных полей рефракции путем постановки симметричных измерений углов относительно момента изотермии воздуха, рекомендуется в жаркую погоду летом утренние наблюдения начинать не ранее, чем через 1—1,5 ч после восхода Солнца, и продолжать их не более 1,5 ч (при наличии хорошей видимости). Вечерние наблюдения рекомендуется прекращать не позднее, чем за 1,5 ч до захода Солнца, несмотря на наличие хорошей видимости.

Ошибки за фазы визирных целей. Явление фаз возникает вследствие неравномерного освещения визирного цилиндра солнечными лучами, составляющими с линией визирования некоторый угол. Вследствие неодинакового восприятия глазом различно освещенных сторон цилиндра наблюдатели ошибочно оценивают положение геометрической оси его, смещая биссектор при наведении трубы в сторону лучше видимой (затемненной на фоне светлого неба) части цилиндра. Для ослабления ошибок за «фазы» применяют специальные малофазные визирные цилиндры с радиально направленными по вертикали пластинами, создающими хорошее теневое затемнение по всей видимой поверхности цилиндра. При наблюдениях на болванку сигнала ее поверхность делают шероховатой и окрашивают матовой краской. Остаточное влияние ошибок за фазы в этих случаях не превышает, как правило, 0,2—0,4″.

Ошибки из-за кручения и гнутия сигналов. Кручение и гнутие сигналов происходит под воздействием изменений температуры и влажности воздуха, под влиянием ветра. Гнутия сигнала обычно малы и не оказывают существенного влияния на точность угловых измерений, исполняемых при скорости ветра 2—3 м/с. Наиболее существенным является кручение верхней части сигнала вокруг вертикальной оси. Зарегистрированы случаи, когда величина кручения столика сигнала в отдельные периоды суток достигает 25″ за 1 ч и 5″ за 5 мин. В боль-

шинстве случаев кручение столика сигнала происходит неравномерно. Для того чтобы ослабить влияние кручения на результаты наблюдений, рекомендуется в триангуляции 1—2 классов применять поверительную трубу, а сами измерения располагать симметрично во времени относительно среднего момента наблюдений в приеме.

III.2.3. Методы высокоточных угловых измерений

Основные требования к результатам высокоточных угловых измерений в трангуляции высшего класса. Результаты высокоточных угловых измерений на каждом пункте триангуляции 1—2 классов должны быть:

1) представлены в виде одного ряда равноточных направлений с весами, одинаковыми на всех пунктах сети;

2) получены с максимально высокой степенью точности при минимальных затратах труда и времени на измерения и вычисления на станции.

В случае несоблюдения первого требования возникает необходимость совместного уравнивания результатов угловых измерений за условия станций и за геометрические условия сети, причем с учетом весов измерений*. Но такое уравнение даже для сетей триангуляции становится неоправданно трудоемким. Поэтому вопрос представления результатов угловых измерений на каждой станции в виде ряда направлений с одинаковыми весами имеет принципиальное значение, так как только в этом случае уравнивание на станции отделяется от уравнивания сети, причем не нарушая строгости уравнительных вычислений.

Результат уравнивания угловых измерений на станции может быть представлен в виде одного ряда равноточных направлений с заданными весами P в следующих основных случаях:

1. При измерении всех направлений в одной группе каждое с одним и тем же весом:

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p = \text{const}.$$

2. При измерении углов с одним и тем же весом $p = \text{const}$ во всех комбинациях, число которых равно $r = n\,(n-1)/2$:

1.2	1.3	1.4 . . . 1.n
	2.3	2.4 . . . 2.n
		3.4 . . . 3.n
		. . .
		$n-1.n$

3. При измерении направлений в нескольких группах по программе, которая дает возможность получить углы во всех комбинациях, не пропуская ни одного из них, и удовлетворяет условию

$$\sum_i k_i = \text{const} = P/nt,$$

где i — номер группы направлений ($i = 1, 2, \ldots, r$); k_i — число направлений в группе ($2 \leqslant k_i \leqslant n$); p_i — вес измерения направлений в i-й группе; $t = \text{const} = 1$ или 2 и т. д. — число повторений каждого из углов во всех комбинациях, образующихся при разложении всех групп направлений на всевозможные угловые комбинации; n — число направлений на пункте; P — заданный вес уравненного направления на станции ($P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P = \text{const}$).

* *Ф. Н. Красовский.* Избранные сочинения. М., Геодезиздат, 1955, т. 3.

Условия п. 3 охватывают обширный круг различных способов угловых измерений, в том числе способ круговых приемов, способ измерения углов во всех комбинациях, способ неполных приемов и другие.

Основные принципы высокоточных измерений горизонтальных углов и направлений. Для достижения наиболее высокой точности результатов измерений необходимо так организовать процесс измерений на пункте, чтобы при выводе среднего значения угла из всех приемов происходило наиболее полное ослабление влияния различных источников ошибок. С этой целью необходимо соблюдать следующие основные принципы высокоточных угловых измерений в триангуляции:

1. Каждое направление (угол) должно измеряться на разных штрихах лимба, равномерно распределенных по всей его окружности (перестановки круга по определенной программе).

2. В каждом полуприеме должно быть обеспечено полное однообразие всех измерительных операций по каждому наблюдаемому направлению.

3. В каждом приеме должна быть обеспечена симметрия в расположении деталей теодолита относительно каждого наблюдаемого направления, а также симметрия времени наблюдений каждого направления в приеме относительно среднего момента измерений в нем (наблюдения при КП и КЛ, изменение направления вращения алидады в полуприемах, между приемами).

4. Каждый угол или направление должны измеряться симметрично во времени относительно момента изотермии воздуха на высоте визирного луча.

5. Вес P уравненных на станции направлений должен быть одинаковым на всех пунктах триангуляции данного класса.

В настоящее время для измерения горизонтальных углов в триангуляции 1—4 классов в СССР применяют главным образом два способа: способ измерения углов во всех комбинациях (способ Шрейбера) и способ круговых приемов (способ Струве). Первый способ применяется в триангуляции 1 и 2 классов, а второй — в триангуляции 2, 3 и 4 классов. Кроме этих методов, в триангуляции 2 класса для наблюдений пунктов с большим числом направлений применяют способ неполных приемов и видоизмененный способ измерения углов в комбинациях.

Способ круговых приемов измерения направлений (способ Струве).

Идея способа. Наиболее простым способом, который позволяет представить результат измерений на станции в виде одного ряда независимых направлений, является способ направлений. Суть этого способа заключается в том, что оставляя лимб теодолита неподвижным и вращая алидаду по ходу часовой стрелки, наводят зрительную трубу последовательно на все предметы (от первого к последнему) и каждый раз фиксируют при этом отсчеты по лимбу и микрометрам. Указанный комплекс изм рений составляет первый полуприем. Затем трубу переводят через зенит и наводят ее на те же предметы, но в обратном порядке (от последнего к первому), вращая алидаду против хода часовой стрелки и снова фиксируя отсчеты по лимбу и микрометрам. Этот комплекс измерений составляет второй полуприем, а два полуприема — один прием.

Если в конце каждого полуприема трубу повторно наводят на начальное направление и снова берут отсчеты по лимбу и микрометрам, т. е. производят «замыкание горизонта», то такой частный случай способа направлений носит название способа круговых приемов (способ Струве).

Программа и порядок наблюдений на станции. Прежде чем приступить к угловым измерениям на пункте, необходимо: защитить теодолит от воздействия солнечных лучей и от ветра, убедиться в устойчивости и прочности столика сигнала для теодолита и в том, что внутренняя пирамида сигнала нигде не соприкасается ни с полом площадки для наблюдателя, ни с лестницами. При обнаружении недостатков наблюдатель обязан устранить их. Затем следует составить программу измерений. Для этого надо разыскать все подлежащие наблюдениям пункты и записать на них направления с точностью до одной минуты, приняв направление на хорошо видимый удаленный пункт за начальное. Составить таблицу рабочих установок лимба, имея в виду, что в способе круговых приемов лимб между приемами переставляют на угол

$$\sigma = \frac{180^\circ}{m} + i,$$

где m — число приемов; i — цена наименьшего деления на лимбе.

Теодолит устанавливают на столике сигнала не менее чем за полчаса до начала измерений, чтобы он принял температуру окружающего воздуха, и затем тщательно выверяют его. С наступлением хорошей видимости и четких изображений наблюдаемых целей приступают к измерению горизонтальных направлений.

При измерении направлений круговыми приемами соблюдают следующие правила:

1. В первом полуприеме алидаду вращают только по ходу часовой стрелки, а во втором — только в обратном направлении. В первом полуприеме трубу немного переводят через предмет (как видно в трубу), а во втором — немного не доводят на него. При этом биссектор по окончании грубого движения окажется влево от предмета, так что окончательные наведения будут всегда производиться только ввинчиванием наводящего винта алидады. Перед началом каждого полуприема алидаду вращают несколько раз в сторону движения ее в данном полуприеме.

2. При наблюдениях оптическими теодолитами трубу между первым и вторым полуприемами переводят через зенит.

При наблюдениях теодолитами, снабженными поверительной трубой и окулярным микрометром при главной трубе, порядок измерений дополняется следующим. Каждое наблюдение состоит из трех наведений нитей окулярного микрометра главной трубы на предмет и одновременных с ними трех наведений окулярного микрометра поверительной трубы на специально выставленную марку или на заменяющий ее хорошо видимый и близко расположенный геодезический знак.

В результаты измеренных направлений вводят поправки за показания окулярных микрометров главной и поверительной труб, поправки за рен и наклон вертикальной оси теодолита (при углах наклона визирного луча в 1° и более).

Контроль результатов угловых измерений, исполненных по способу круговых приемов, осуществляется в каждом полуприеме по расхождениям между результатами наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема, а в приемах — по колебаниям направлений в отдельных приемах, отсчитываемых от общего нулевого направления. Эти допуски даются в приборах. Так, например, в триангуляции 2—4 классов расхождения между результатами наблюдений на начальное направление в начале и конце полуприема не должны превышать 5 и 6″ соответственно для теодолитов типа Т05 и Т1, а колебания направлений в отдельных приемах, приведенных к общему нулю, соответственно 4 и 5″.

Уравнивание на станции и оценка точности. При наблюдениях по способу круговых приемов измеренные значения направлений приводят к начальному направлению, придав ему значение 0° 00′00,00″, а затем вычисляют средние значения по каждому направлению из m приемов измерений. Уравненные углы $[j \cdot l]$, образованные любой парой направлений j и l, равны разностям средних значений этих направлений:

$$[j,\ l] = \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i}{m} - \frac{\sum_{i=1}^{m} j_i}{m}; \quad (j \neq l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Вес P уравненного направления можно вычислить по формуле $P = nt\,(p_i/k_i)$, если число приемов измерений m принять за вес p_i. Так как в данном способе $p_i = m$, $k_i = n$, $t = 1$, то

$$p = nt\frac{p_i}{k_i} = m,$$

т. е. в способе круговых приемов вес уравненного направления равен числу приемов измерений.

Среднюю квадратическую ошибку направления, выведенного из одного приема (ошибку единицы веса), вычисляют по формуле

$$\mu_н = \sqrt{\frac{\sum v^2 - \frac{1}{n}\sum [v]^2}{(n-1)(m-1)}},$$

где v — уклонения значений измеренных направлений от их среднего арифметического; n — число направлений на станции; m — число приемов.

Для оценки точности результатов измерений чаще применяют приближенную формулу Петерса, согласно которой средняя квадратическая ошибка направления, измеренного одним приемом,

$$\mu_н = \frac{1{,}25}{\sqrt{m\,(m-1)}} \cdot \frac{\sum |v|}{n} = k\frac{\sum |v|}{n},$$

где $\sum |v|$ — сумма абсолютных величин уклонений измеренных направлений от их средних значений, вычисленная по всем направлениям и по всем приемам; m — число приемов; n — число направлений. Значения k при $m = 6,\ 9,\ 12,\ 15$ равны соответственно 0,23; 0,15; 0,11; 0,08.

Среднюю квадратическую ошибку уравненного направления (среднего из m приемов) вычисляют по формуле

$$M_н = \frac{\mu_н}{\sqrt{m}}.$$

Достоинства способа круговых приемов:

1. Очень простая программа измерений на станции.

2. Значительное ослабление систематических ошибок делений лимба.

3. Высокие технико-экономические показатели наблюдений в случае хорошей видимости по всем наблюдаемым направлениям.

Недостатки:

1. Сравнительно большая продолжительность измерений в приеме, особенно на пунктах с большим числом направлений (примерно 1 мин на одно направление).

2. Повышенные требования к жесткости, устойчивости и прочности геодезических сигналов.

3. Требование примерно одинаковой видимости по всем наблюдаемым направлениям.

4. Вынужденная разбивка направлений на группы в случае большого числа их на пункте.

5. Разная точность измерений начального и остальных направлений.

От последнего недостатка можно избавиться, если повторные измерения на начальное направление не включать в обработку или же за начальное принять направление на пункт другого класса.

Способ измерения углов во всех комбинациях (способ Шрейбера).

Идея и обоснование способа. Суть этого способа заключается в том, что на пункте с n направлениями измеряют все углы, образующиеся при попарном сочетании направлений из n по 2, т. е. углы

$$\begin{array}{lll} 1.2 & 1.3 & 1.4\ .\ .\ .\ 1.n \\ & 2.3 & 2.4\ .\ .\ .\ 2.n \\ & & 3.4\ .\ .\ .\ 3.n \\ & & .\ .\ . \\ & & (n-1).n \end{array}$$

Число таких углов равно

$$r = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Вес уравненного направления на станции вычисляют по формуле

$$P = mn = \text{const},$$

где m — число приемов измерения углов; n — число направлений на пункте. Вес уравненного угла равен $P_{\text{уг}} = mn/2$.

В триангуляции 1 класса вес направления $P = mn$ принимают равным 36, а в триангуляции 2 класса — 24. Принятое постоянство произведения mn преследует цель получить все направления в триангуляции данного класса с одинаковыми весами.

В целях обеспечения независимости измерения углов и ослабления влияния ошибок диаметров лимба на результаты наблюдений углы измеряют на разных установках горизонтального круга, причем так, чтобы всякое направление измерялось при одном и том же положении лимба по возможности только один раз. Это достигается тем, что лимб при измерении одного и того же угла m приемами переставляют между приемами на угол $\sigma = 180°/m$, а между группами не примыкающих друг к другу углов — на угол δ:

$$\delta = \frac{\sigma}{n-1} \quad \text{при } n \text{ четном;}$$

$$\delta = \frac{\sigma}{n} \quad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

Для ослабления влияния короткопериодических ошибок делений лимба к вычисленным значениям σ и δ, которые округляют до целого градуса, прибавляют угол i, равный цене наименьшего деления лимба.

В табл. 50 дан пример расчета установок лимба для случая $n = 4$, $m = 6$, $i = 4'$.

Программа и порядок наблюдений на станции. Для составления программы наблюдений на станции сначала измеряют с точностью до 1′ углы между начальным направлением и всеми последующими направлениями. Затем рассчитывают таблицу установок лимба для каждого угла указанным выше способом и переходят к таблице так называемых рабочих установок. С этой целью для каждого угла $j \cdot l = 2.3$; 2.4; 3.4 и т. д., отсчитываемого не от начального (первого) направления, табличные установки лимба увеличивают на величину угла $1.j$, измеренного между начальным (первым) направлением на пункте и левым направлением данного угла $j.l = 2.3$; 2.4; 3.4 и т. д.

ТАБЛИЦА 50

Углы $i \cdot j$	Приемы					
	I	II	III	IV	V	VI
1.2	0° 0′	30° 4′	60° 8′	90° 12′	120° 16′	150° 20′
1.3	10 4	40 8	70 12	100 16	130 20	160 24
1.4	20 8	50 12	80 16	110 20	140 24	170 28
2.3	20 8	50 12	80 16	110 20	140 24	170 28
2.4	10 4	40 8	70 12	100 16	130 20	160 24
3.4	0 0	30 4	60 8	90 12	120 16	150 20

Каждый угол на данной установке лимба измеряют двумя полуприемами. В первом полуприеме измеряют искомый угол, а во втором — дополнение его до 360°. Алидада в обоих полуприемах вращается в одном и том же направлении. При переходе от приема к приему требуется изменять направление вращения алидады на противоположное. Все подлежащие наблюдениям углы должны быть измерены в разных условиях, т. е. в течение каждого вечера рекомендуется измерять все углы сначала одним приемом, затем эти же углы вторым приемом, третьим и т. д. При отсутствии видимости на какой-либо пункт не рекомендуется измерять другие углы более чем двумя приемами подряд.

Уравнивание на станции и оценка точности. Для каждого угла $j.l$ вычисляют среднее значение из всех приемов (при соблюдении допусков на расхождения между приемами). Используя эти средние, вычисляют уравненные на станции углы по формулам:

$$[1.\,2] = \frac{2 \cdot 1.2 + (1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4) + \cdots + (1.n - 2.n)}{n};$$

$$[1.\,3] = \frac{2 \cdot 1.3 + (1.2 + 2.3) + (1.4 - 3.4) + \cdots + (1.n - 3.n)}{n};$$

. . . . . .

$$[1.\,n] = \frac{2 \cdot 1.n + (1.2 + 2.n) + \cdots + (1.n-1 + n - 1.n)}{n},$$

где n — число направлений на пункте.

Уравненные направления 1, 2, 3, ..., n получают числовые значения, равные 0° 00′ 00,0″, [1.2], [1.3], ..., [1.n] соответственно.

Средняя квадратическая ошибка единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{2m \sum v^2}{(n-1)(n-2)}}.$$

Средние квадратические ошибки уравненных направлений $M_н$ и уравненных углов $M_у$, образованных любой парой направлений:

$$M_н = \frac{\mu}{\sqrt{P_н}} = \sqrt{\frac{2\sum v^2}{n(n-1)(n-2)}}; \quad M_у = M_н\sqrt{2}.$$

Здесь v — уклонение уравненного угла от его среднего значения, полученного из измерений m приемами, n — число направлений.

Достоинства способа:

1. Результат уравнивания угловых измерений на станции представляется в виде одного ряда равноточных направлений.

2. Имеется возможность измерять углы в любой последовательности, выбирая для наблюдений наиболее благоприятные условия видимости, и обеспечить тем самым хорошую однородность и высокую точность собранного полевого материала наблюдений.

3. Короткая продолжительность одного приема (2—4 мин) позволяет выполнить измерение угла при достаточно стабильном состоянии геодезического знака и внешней среды, вследствие чего точность измерений угла в меньшей степени зависит от качества сигнала, чем при наблюдениях по способу круговых приемов.

4. Благодаря большому числу перестановок круга хорошо ослабляется влияние ошибок диаметров лимба на результаты измерений.

Недостатки способа:

1. Малое число приемов измерений угла при большом числе направлений на пункте.

2. Быстрое возрастание объема работ по мере увеличения числа направлений на пункте, особенно при $n > 5$.

Краткие сведения о других способах угловых измерений.

Видоизмененный способ измерения углов в комбинациях. Для наблюдений пунктов триангуляции 2 класса с шестью и большим числом направлений применяется также способ, предложенный А. Ф. Томилиным, согласно которому на станции с n направлениями независимо измеряют углы

1.2 2.3 3.4 ... n.1;

1.3 2.4 3.5 ... n.2.

Число таких углов равно $2n$. Каждый угол измеряют пятью или шестью приемами в зависимости от требуемого веса уравненного на станции угла, образованного смежными направлениями ($P_{j,\,l} \approx 12$). Так как в данном методе измеряют не все углы, образующиеся при сочетании направлений из n по 2, а только часть их, результат уравнивания станции не может быть представлен в виде одного ряда равноточных направлений. При $n = 5$ исчерпываются все комбинации направлений из n по 2 и, следовательно, все сводится к программе способа Шрейбера.

Поправки к углам, измеренным m приемами, вычисляют по формулам — функциям свободных членов условных уравнений. Эти формулы даны в Инструкции о построении Государственной геодезической сети СССР.

Способ неполных приемов. В сетях триангуляции 2 класса на пунктах с 7—9 направлениями применяют также способ, предложенный Ю. А. Аладжаловым. Суть этого способа заключается в том, что направления на пункте измеряют отдельными группами по три направления в каждой (без замыкания горизонта). При этом группы направлений подобраны таким образом, что по результатам измерений

можно вычислить все углы, образующиеся при попарном сочетании направлений из n по 2. Программы измерений даны в Инструкции. В ряде случаев (при $n = 8$) в программу измерений, помимо групп из трех направлений, включаются отдельные углы. Число приемов измерений направлений в группах и отдельных углов принимают разным, причем таким, чтобы соблюдалось условие, выражаемое равенством $p_i/k_i = \text{const}$ (вес измерений принимают пропорциональным числу приемов). В ряде случаев это равенство несколько нарушается, что приводит к незначительной разновесности уравненных углов (в пределах 10 %).

Рассматриваемый способ при прочих равных условиях позволяет уменьшить объем работы на станции в среднем на 25 % по сравнению со способом измерения углов во всех комбинациях, причем без потери точности результатов измерений.

Обработка результатов измерений на станции заключается в следующем. Выводят средние значения направлений из m приемов в каждой группе и средние значения отдельных углов. По полученным средним значениям вычисляют углы при всевозможных комбинациях направлений попарно. Окончательно уравненные по направлениям углы вычисляют по тем же правилам, как и в способе измерения углов во всех комбинациях.

Средняя квадратическая ошибка уравненного направления равна

$$M_н = \sqrt{\frac{3\sum v^2}{n(n-1)(n-3)+rn}},$$

где v — разности между измеренными и уравненными значениями углов; n — число направлений на пункте; r — число отдельно измеряемых углов в программе.

Вес P уравненного на станции направления вычисляют по формуле

$$P = \frac{2mn}{k},$$

где m — число приемов измерения направлений (отдельных углов) в группах; k — число направлений в группе (для угла $k = 2$); n — число направлений на пункте.

III.2.4. Определение элементов приведения

Графический способ определения элементов приведения. В процессе угловых измерений на пункте проекции оси вращения теодолита I, визирной цели S и центра C подземного пункта на горизонтальную плоскость должны совпадать между собой. Однако в действительности такого совпадения нет. Поэтому необходимо определить отрезки e и e_1 соответственно до точек I и S относительно центра C, сориентировать их относительно направлений A, B и т. д. триангуляции при помощи углов θA, θB и $\theta_1 A$, $\theta_1 B$ и т. д. (рис. 88) и привести результаты угловых измерений к центру пункта.

Элементы центрировки e и θ и редукции e_1 и θ_1 определяют графическим способом на каждом пункте триангуляции. Для этого над центром пункта устанавливают легкую мензулу, на горизонтальную поверхность которой прикалывают центрировочный лист и показывают на нем направление на север. Затем при помощи вспомогательного теодолита, устанавливаемого на расстоянии, равном примерно высоте геодезического сигнала, проектируют на этот лист ось вращения теодолита, находящегося на столике сигнала, и геометрическую ось ви-

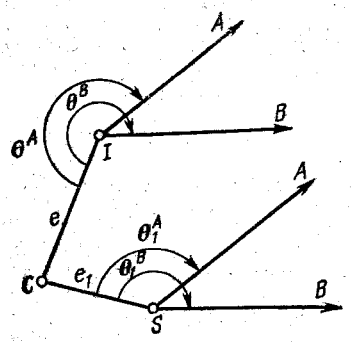


Рис. 88. Схема элементов приведения

зирного цилиндра с трех установок вспомогательного теодолита (при двух положениях вертикального круга) так, чтобы проектирующие плоскости пересекались под углом около 120°. Аналогично проектируют и центр пункта на этот лист. За проекцию точек I, S и C принимают центр соответствующего треугольника погрешностей, стороны которого не должны превышать: 3 мм при проектировании центра пункта, 5 мм при проектировании оси теодолита и 10 мм при проектировании визирной цели. Из точек I и S проводят направления на два пункта триангуляции A и B. Точки I и S соединяют прямой линией с точкой C и измеряют отрезки $e = CI$ и $e_1 = CS$ с точностью до 1 мм. При помощи большого транспортира в точках I и S измеряют соответственно углы θ и θ_1, отсчитываемые от направлений IC и SC на центр пункта до направлений в обоих случаях на пункты A и B. Контролем правильности проведения направлений на пункты триангуляции служит сходимость углов между ними, полученных графическим методом на центрировочном листе и из измерений при помощи теодолита.

III.2.5. Предварительные вычисления в триангуляции

Задачи и состав предварительных вычислений. Прежде чем приступить к уравниванию триангуляции, необходимо все измеренные в ней направления, азимуты и базисные стороны привести к центрам пунктов, далее спроектировать их на референц-эллипсоид, а затем спроецировать на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера. Кроме того, необходимо убедиться, что результаты измерений не содержат недопустимых ошибок и по их точности отвечают предъявляемым к ним требованиям.

Предварительные вычисления начинают с проверки полевых журналов и составления рабочей схемы триангуляции. На первом этапе они предусматривают: составление сводок измерения горизонтальных углов, включая их уравнивание на каждой станции; предварительное решение треугольников и вычисление их сферических избытков; вычисление поправок в направления за центрировку и редукцию, получение приведенных к центрам пунктов направлений; приведение к центрам пунктов измеренных сторон и азимутов.

Для того чтобы спроектировать измеренные направления и азимуты на поверхность референц-эллипсоида, вычисляют поправки: за уклонения отвесных линий (в горных районах), за высоту наблюдаемых целей над референц-эллипсоидом (в триангуляции 1—2 классов) и за переход от нормального сечения к геодезической линии (только в триангуляции 1 класса). Вычисляют также поправки за проектирование базисных сторон на поверхность референц-эллипсоида.

В целях редукции угловых и линейных элементов геодезической сети с поверхности референц-эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса—Крюгера вычисляют приближенные прямоугольные координаты пунктов, поправки в направления и азимуты за кривизну изображения геодезических линий на плоскости, поправки за редукцию измеренных сторон.

В результате предварительных вычислений должна быть получена таблица измеренных направлений, азимутов и базисных сторон, приведенных к центрам пунктов и редуцированных на плоскость.

Заключительным этапом является вычисление свободных членов условных уравнений, определение их допустимости и предварительная оценка точности результатов измерений в сети.

Составление сводок измерения горизонтальных направлений и углов. В сводку из журналов наблюдений выписывают результаты всех измерений, кроме явно ошибочных, руководствуясь указаниями действующей инструкции. Затем выводят средние из m приемов значения каждого угла (или направления, приведенного к начальному), выполняют уравнивание углов на станции и вычисляют средние квадратические ошибки уравненных направлений и углов.

Уравнивание направлений, измеренных в двух группах с одинаковыми весами. В тех случаях, когда начальные направления в группах разные, надо предварительно все направления обеих групп привести к общему начальному (нулевому) направлению и выписать их в таблицу. Уравнивание групп наблюдений выполняют следующим образом. Для направлений, общих для обеих групп, например 1, 3 и 5 вычисляют средние значения

$$M_1 = 0; \quad M_3 = \frac{1}{2}(M_3' + M_3''); \quad M_5 = \frac{1}{2}(M_5' + M_5''),$$

которые принимают за окончательно уравненные величины. Для остальных направлений M' первой группы вычисляют поправки Δ_1, а для направлений M'' второй группы — поправки Δ_2:

$$\Delta_1 = \frac{(M_3 - M_3') + (M_5 - M_5')}{3}; \qquad \Delta_2 = \frac{(M_3 - M_3'') + (M_5 - M_5'')}{3}.$$

В знаменателе стоит число направлений, общих для обеих групп, включая и начальное. Прибавляя поправки Δ_1 к направлениям первой группы, а поправки Δ_2 — к направлениям второй группы, получают их уравненные значения.

Предварительное решение треугольников и вычисление сферических избытков. Предварительное решение треугольников выполняют с целью получения длин сторон, необходимых для вычисления поправок за центрировки и редукции, для вычисления сферических избытков и приближенных координат пунктов триангуляции. Треугольники решают по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D,$$

откуда, приняв сторону a за исходную, находят

$$b = D \sin B; \quad c = D \sin C.$$

За исходные принимают базисные или выходные стороны, а также стороны триангуляции высшего класса или ранее уравненной. Треугольники решают раздельно по каждому классу триангуляции по углам, округленным до $10''$.

Одновременно вычисляют сферические избытки треугольников по одной из следующих формул:

$$\varepsilon = f\,ab \sin C = fac \sin B = f\,bc \sin A,$$

где величину $f = \rho/2R^2$ выбирают из таблиц приложений в работе [2] или из табл. 51 после умножения приведенных в ней величин на 3.

Для территории СССР величина коэффициента f для вычислений в триангуляции 2—4 классов может быть принята в среднем равной 0,00253, если длины сторон треугольников выражены в километрах. Сферические избытки вычисляют до 0,001″ в триангуляции 1 и 2 классов и до 0,01″ в триангуляции 3 и 4 классов.

Приведение измеренных направлений к центру пункта. Поправки за центрировку теодолита c и редукцию визирной цели r вычисляют по формулам

$$c = \frac{e \sin (M + \theta)}{D} \rho;$$

$$r = \frac{e_1 \sin (M + \theta_1)}{D} \rho,$$

где e, θ и e_1, θ_1 — элементы центрировки и редукции; M — значение измеренного направления, для которого вычисляют поправки; D — длина стороны триангуляции по этому направлению, $\rho = 206\,265''$.

Для контроля вычислений поправок можно применять номограммы и таблицы величин $(a) = -20{,}6265 \sin (M + \theta)$.

Если линейные элементы e и e_1 выразить в дециметрах, а D — в километрах, то

$$c = -\frac{(a)}{D} e; \qquad r = -\frac{(a)}{D} e_1.$$

Поправки за центрировку и редукцию в триангуляции 1 и 2 классов вычисляют с точностью до 0,001″, а в триангуляции 3 и 4 классов — до 0,01″. С учетом этих поправок вычисляют направления, приведенные к центрам пунктов.

Вычисление приближенных прямоугольных координат пунктов. Приближенные координаты пунктов необходимы для составления точной схемы триангуляции, для вычисления поправок за направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости, для вычисления расстояний между пунктами в тех случаях, когда эти расстояния не могут быть получены из решения треугольников, и т. д.

Приближенные координаты пунктов вычисляют с точностью до целого метра путем решения прямых геодезических задач на плоскости или по другим формулам, например по формулам котангенсов углов треугольников и т. п.

Поправки в направления за кривизну изображения геодезических линий на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера вычисляют в триангуляции 2—4 классов по формулам *

$$\delta_{12} = \frac{1}{3} f (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2);$$

$$\delta_{21} = -\frac{1}{3} f (x_1 + x_2) (2y_2 + y_1),$$

где δ_{12} и δ_{21} — поправки в прямое и обратное направления, угл. с; x_1, y_1, x_2, y_2 — приближенные координаты пунктов 1 и 2, км. Ординаты y_1 и y_2 отсчитывают от осевого меридиана зоны, причем с положительным знаком к востоку от меридиана и с отрицательным — к западу от него.

* В триангуляции 1 класса при длинах сторон более 50 км применяют более точную формулу (см. гл. II.2).

Значения коэффициента $\frac{1}{3} f$

x_m, км	$\frac{1}{3} f$	x_m, км	$\frac{1}{3} f$	x_m, км	$\frac{1}{3} f$
	$\times 10^{-7}$		$\times 10^{-7}$		$\times 10^{-7}$
4010	8465	5430	8440	6960	8415
4300	8460	5715	8435	7320	8410
4585	8455	6005	8430	7720	8405
4865	8450	6310	8425	8195	8400
5145	8445	6625	8420	8825	8395
5430		6960		9500	

Поправки δ вычисляют с точностью до 0,001″ в триангуляции 2 класса и до 0,01″ — в триангуляции 3 и 4 классов.

Для направлений триангуляции 3 и 4 классов на территории СССР значение коэффициента $f/3$ принимают равным 0,000845. Для направлений 2 класса значения этого коэффициента можно выбирать из табл. 51 по средней абсциссе линии $x_m = (x_1 + x_2)/2$.

Чтобы не ошибиться в порядке поправок δ, рекомендуется пользоваться табл. 52, дающей приближенные значения этих поправок.

Правильность вычисления поправок δ_{ik} в направления контролируют по сферическим избыткам треугольников. В треугольнике с вершинами 1, 2, 3, номера которых возрастают по ходу часовой стрелки, вычисляют для каждого угла поправки $\delta_1 = \delta_{13} - \delta_{12}$, $\delta_2 = \delta_{21} - \delta_{23}$, $\delta_3 = \delta_{32} - \delta_{31}$. Контроль: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -\varepsilon$, т. е. сумма поправок δ_i в углы треугольника должна быть равна его сферическому избытку, взятому с обратным знаком.

Значения поправок $\delta_{12} = \frac{1}{3} f (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2)$

$(x_1 - x_2)$, км	$(2y_1 + y_2)$, км								
	100	200	300	400	500	600	700	800	900
1	0,1″	0,2″	0,2″	0,3″	0,4″	0,5″	0,6″	0,7″	0,8″
5	0,4	0,8	1,3	1,7	2,1	2,5	3,0	3,4	3,8
10	0,8	1,7	2,5	3,4	4,2	5,1	5,9	6,8	7,6
20	1,7	3,4	5,1	6,8	8,4	10,1	11,8	13,5	15,2
30	2,5	5,1	7,6	10,1	12,6	16,2	17,7	20,2	22,8

Редуцирование измеренных сторон с эллипсоида на плоскость выполняют в триангуляции 2 класса по формуле

$$s = S + \Delta S = S + f'S\left(y_m^2 + \frac{\Delta y^2}{12}\right),$$

где

$$f' = \frac{1}{2R_m^2}; \qquad y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

Здесь s — длина стороны на плоскости; S — длина ее на референц-эллипсоиде; y — ординаты концов стороны, отсчитываемые от осевого меридиана зоны. Значения коэффициента f' даны в работе [2]. В триангуляции 3—4 классов второй член этой формулы опускают, а в триангуляции 1 класса применяют более точную формулу.

Переход от геодезических азимутов A_{ik} к дирекционным углам α_{ik} выполняют по формуле

$$\alpha_{ik} = A_{ik} - \gamma_i + \delta_{ik},$$

где γ_i — гауссово сближение меридианов (см. гл. II.2); δ_{ik} — поправка в направление за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

Поправки за проектирование измеренных направлений с физической поверхности Земли на референц-эллипсоид:

а. Поправки за уклонения отвесных линий учитывают при создании высокоточных геодезических сетей в горных районах и вычисляют по формуле

$$\delta_1 = -(\xi_i \sin A_{ik} - \eta_i \cos A_{ik}) \operatorname{ctg} Z_{ik},$$

где ξ_i и η_i — составляющие уклонения отвесной линии соответственно в плоскости меридиана и первого вертикала; A_{ik} — геодезический азимут направления, для которого вычисляют поправку; Z_{ik} — измеренное зенитное расстояние.

Поправки δ_1 вычисляют в том случае, если углы наклона измеряемых направлений равны или больше 1°, а полное уклонение отвесной линии $u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ не менее 3″. В равнинной местности (при $Z = 90 \pm 1°$) эти поправки практически равны нулю.

Величины ξ и η получают по астрономо-геодезическим и гравиметрическим данным.

Азимуты A_{ik} вычисляют до 0,1° по приближенной формуле

$$A_{ik} = \alpha_{i0} + \gamma_i + M_{ik},$$

где α_{i0} — дирекционный угол начального направления, вычисляемый по приближенным координатам; γ_i — гауссово сближение меридианов, вычисляемое по приближенной формуле $\gamma_i = l_i \sin B_i$, где $l_i = L_i - L_0$ — долгота пункта i, отсчитываемая от осевого меридиана L_0 зоны проекции Гаусса—Крюгера; B_i — широта этого пункта; M_{ik} — измеренное направление.

Если зенитное расстояние не измерялось, то при известных нормальных высотах H_k и H_i центров пунктов величина $\operatorname{ctg} Z_{ik}$ может быть вычислена по приближенной формуле

$$\operatorname{ctg} Z_{ik} \cong \frac{1}{S}\left[(H_k + v_k) - (H_i + l_i) - \frac{1-k}{2R} S^2\right],$$

где v_k и l_i — соответственно высота визирной цели и высота теодолита над центрами пунктов k и i; $(1-k)\cdot S^2/2R$ — поправка за кривизну Земли и рефракцию; S — расстояние между пунктами.

б. Поправки за высоту наблюдаемых целей вычисляют по формуле

$$\delta_2 = 0{,}108 H_k \cos^2 B_k \sin 2A_{ik},$$

где H_k — высота наблюдаемой цели k над референц-эллипсоидом Красовского, км; B_k — широта точки k; A_{ik} — азимут наблюдаемого направления. Эти поправки сравнительно малы. Например, при $H_k = 3$ км, $B_k = 45°$ и $\sin 2A_{ik} = 1$ $\delta_2 = 0{,}17''$. Поэтому их учитывают только в триангуляции 1—2 классов и в специальных сетях повышенной точности, создаваемых в горных районах.

в. Поправки за переход от нормального сечения к геодезической линии на эллипсоиде Красовского вычисляют по формуле

$$\delta_3 = -2{,}82\cdot 10^{-6} S^2 \cos^2 B_m \sin 2A_{ik},$$

где S — длина стороны триангуляции, км; $B_m = (B_i + B_k)/2$ — средняя широта концов стороны; A_{ik} — геодезический азимут наблюдаемого направления. Эти поправки малы. Например, при $S = 30$ км, $B_m = 45°$ и $\sin 2A_{ik} = 1$ $\delta_3 = 0{,}001''$. Поэтому их учитывают только в триангуляции 1 класса.

В триангуляции 2—4 классов, создаваемой в равнинной местности (при $Z = 90 \pm 1°$) с геодезическими высотами пунктов $H \leqslant 1$ км, поправки δ_1, δ_2, δ_3 пренебрегаемо малы по сравнению с точностью измерения углов, поэтому ими в данном случае можно пренебречь.

Редуцирование наклонных расстояний, измеренных свето- и радиодальномерами, с поверхности Земли на референц-эллипсоид выполняют по формуле

$$S = D + \delta_h + \delta_H + \delta_R,$$

где

$$\delta_h = -\frac{h^2}{2D}\left(1 + \frac{h^2}{4D^2}\right); \qquad h = H_2 - H_1;$$

$$\delta_H = -\frac{H_m}{R_A + H_m}(D + \delta_h); \qquad H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2);$$

$$\delta_R = \frac{D^3}{24R_A^2}.$$

Здесь D — измеренное расстояние; H_1 и H_2 — геодезические высоты соответственно приемопередатчика (ведущей станции) и отражателя дальномера (ведомой станции) над референц-эллипсоидом; R_A — радиус кривизны сечения референц-эллипсоида в азимуте измеряемой стороны, значения которого даны в работе [2].

Составление таблицы направлений, приведенных к центрам пунктов и редуцированных на плоскость. Как уже отмечалось, в каждое измеренное направление вводят поправки: c — за центрировку теодолита, r — за редукцию визирной цели, δ_{ik} — за кривизну изображения геодезических линий на плоскости в проекции Гаусса—Крюгера, δ_1 — за уклонения отвесных линий, δ_2 — за высоту наблюдаемых целей над референц-эллипсоидом (обе при наблюдениях пунктов триангуляции 1 и 2 классов в горных районах), δ_3 — за переход от нормальных сечений к геодезическим линиям на референц-эллипсоиде в триангуляции 1 класса.

Для каждого направления вычисляют сначала сумму перечисленных поправок, а затем разности между суммой поправок каждого

направления и суммой поправок начального (нулевого) направления на станции. Полученные поправки алгебраически прибавляют к измеренным значениям направлений. В итоге получают таблицу приведенных к центрам пунктов и редуцированных на плоскость направлений, которые и используют при уравнивании геодезической сети за все возникающие в ней геометрические условия.

Предварительная оценка точности угловых измерений в триангуляции. Прежде чем приступить к окончательному уравниванию триангуляции за все возникающие в ней геометрические условия, необходимо убедиться, что угловые измерения на пунктах сети исполнены качественно и удовлетворяют предъявляемым к ним требованиям. Для этого вычисляют свободные члены условных уравнений фигур (невязки треугольников), полюсных, базисных, азимутальных, и затем полученные величины сравнивают с установленными для них допусками.

Невязки треугольников вычисляют по углам, приведенным к центрам знаков, используя формулы:

$$\omega = \sum \beta - (180° + \varepsilon) \text{ — на сфере;}$$

$$\omega = \sum \beta - 180° \text{ — на плоскости,}$$

где $\sum \beta$ — сумма измеренных углов в треугольнике; ε — сферический избыток треугольника. При нормальном законе распределения ошибок измерений 68 % невязок должны находиться в интервале от 0 до $m\sqrt{3}$, 95 % — от 0 до $2m\sqrt{3}$ и только три невязки из тысячи могут быть допущены равными $3m\sqrt{3}$. Здесь m — средняя квадратическая ошибка измеренного угла, вычисленная по невязкам треугольников,

$$m = \sqrt{\frac{\sum \omega^2}{3n}},$$

где n — число невязок треугольников.

Согласно Инструкции о построении Государственной геодезической сети СССР невязки треугольников не должны превышать 3, 4, 6 и 8″ в триангуляции 1, 2, 3 и 4 классов, а средние квадратические ошибки измеренного угла, вычисленные по невязкам треугольников, соответственно 0,7, 1,0, 1,5, 2,0″.

Свободные члены условий полюсных $\omega_{пол}$, базисных $\omega_{баз}$ и азимутальных $\omega_{аз}$ не должны превышать:

$$\omega_{пол} \leqslant 2{,}5m\sqrt{\sum \operatorname{ctg}^2 \beta};$$

$$\omega_{баз} \leqslant 2{,}5\sqrt{\left(\frac{b_2}{\rho} m\right)^2 \sum \operatorname{ctg}^2 \beta + 2m_b^2};$$

$$\omega_{аз} \leqslant 2{,}5\sqrt{m^2 n + 2m_\alpha^2},$$

где m — средняя квадратическая ошибка измерения углов в триангуляции данного класса, угл. с; β — связующие углы треугольников; b_2 — длина базисной стороны на конце ряда треугольников; m_b и m_α — средние квадратические ошибки базисных сторон и исходных азимутов (дирекционных углов); n — число углов в передаче азимута.

Если свободный член какого-либо условного уравнения не удовлетворяет установленным допускам, то такое уравнение включать в уравнивание сети нельзя до тех пор, пока не будут выявлены и устранены причины, приведшие к недопустимой величине свободного члена условного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвинов Б. А., Лобачев В. М., Воронков Н. Н.* Геодезическое инструментоведение. М., Недра, 1971.
2. *Практикум* по высшей геодезии./Под ред. Н. В. Яковлева. М., Недра, 1982.
3. *Руководящий* технический материал. Определение азимутов на пунктах Лапласа с учетом влияния рефракции. М., ГУГК, 1982.

III.3. ГИРОСКОПИЧЕСКОЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ

Н. Н. Воронков

III.3.1. Сведения из прикладной теории гироскопов

Основные понятия и определения

Измерение азимутов направлений на земной поверхности с помощью специальных гироскопических приборов — гиротеодолитов — получило название гироскопического ориентирования. Конструктивно гироскопический теодолит представляет собой угломерный прибор, в котором теодолит объединен с гироскопом — датчиком направления истинного меридиана. Все модели гиротеодолитов, получивших к настоящему времени применение в геодезическом производстве, имеют в качестве чувствительного элемента (ЧЭ) роторный гироскоп.

Под роторным гироскопом понимают механическое устройство, основу которого составляют быстровращающийся динамически симметричный маховик (ротор) и его подвес, позволяющий оси собственного вращения ротора изменять свое направление в пространстве. Ротором в гироскопах, как правило, служит ротор специального электродвигателя — гиромотора. В зависимости от конструкции подвеса гироскоп может быть трехстепенным или двухстепенным. В первом случае подвес обеспечивает быстровращающемуся ротору возможность одновременного поворота еще вокруг двух, обычно взаимно перпендикулярных осей; во втором случае — вокруг одной оси, перпендикулярной к оси собственного вращения ротора.

Подвес гироскопа должен быть безмоментным, чтобы вращение ротора вокруг осей подвеса происходило без трения. В современных гироскопах с тремя степенями свободы применяют разнообразные системы подвеса. Наибольшее распространение получила система подвеса в карданових кольцах.

Карданов подвес (рис. 89) состоит из двух колец: внутреннего *3* и внешнего *1*. Ротор гиромотора *2*, который жестко укреплен во внутреннем кольце, вращается вокруг оси x. Внутреннее кольцо вместе с ротором имеет свободу вращения вокруг оси y, а внешнее совместно с внутренним кольцом и ротором может поворачиваться вокруг вертикальной оси ξ, связанной с неподвижным основанием *4* гироскопа. При изготовлении гироскопа стремятся, чтобы центральная ось x симметрии ротора совпадала с осью собственного вращения ротора гиромотора. Эту ось называют главной осью гироскопа. Экваториальные ортогональные оси y и z симметрии ротора, перпендикулярные к главной оси, называют соответственно осью чувствительности и осью прецессии гироскопа. Ось чувствительности гироскопа y обычно совмещается с осью вращения внутреннего кольца карданова подвеса. Северным или положительным концом главной оси гироскопа принято считать тот ее конец, откуда собственное вращение ротора гиромотора

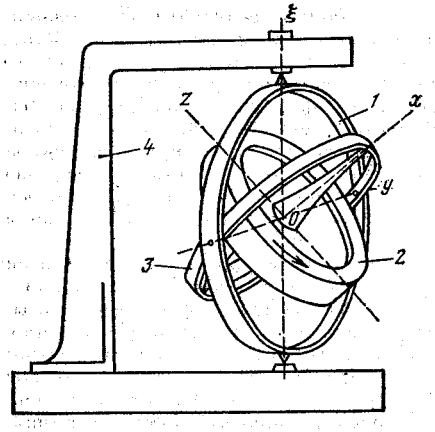


Рис. 89. Гироскоп с карданов подвесом

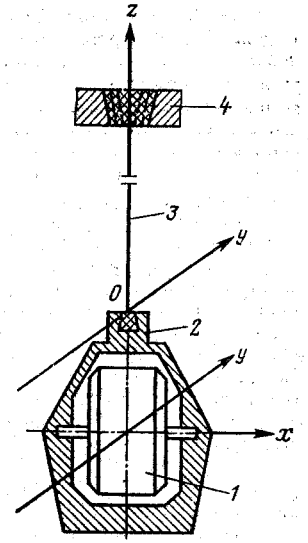


Рис. 90. Гироскоп с торсионным подвесом

наблюдается против хода часовой стрелки. Положительные направления осей y и z соответствуют правой системе координат.

Ротор гироскопа с кардановым подвесом имеет свободу вращения вокруг трех осей: x, y и ξ. При точном изготовлении гироскопа оси x, y, z и ξ пересекаются в общей точке O, которая при вращении ротора вокруг осей x, y и ξ остается неподвижной по отношению к основанию. Точку, вокруг которой происходит вращение ротора, называют точкой подвеса гироскопа.

Гироскоп, центр тяжести которого совпадает с точкой подвеса, называют уравновешенным (астатическим), так как в нем силы тяжести и инерции от переносных ускорений не создают вращательных моментов относительно осей подвеса. Астатический гироскоп, в котором силы трения в опорах подвеса сведены к минимуму, называют свободным гироскопом.

Несмотря на то, что при конструировании и изготовлении гироскопов принимаются все меры по уменьшению моментов трения в опорах подвеса и по тщательности проведения балансировки, создать идеально свободный или полностью астатический гироскоп практически невозможно. В реальных приборах всегда имеется остаточная, обычно незначительная, несбалансированность, или, как принято говорить, небаланс гироскопа и остаточное трение в опорах подвеса.

Гироскопы, у которых центр тяжести не совпадает с точкой подвеса, называют тяжелыми. В таких гироскопах смещение центра тяжести от осей и точки подвеса делают преднамеренно, исходя из принципа действия разрабатываемого гироскопического прибора. Так, для создания гиротеодолитов широкое применение получил маятниковый гироскоп с горизонтальным расположением главной оси, который относится к группе тяжелых гироскопов. Центр тяжести маятникового гироскопа совмещен с осью прецессии z и располагается, как правило, ниже точки подвеса. При наклоне маятникового гироскопа на него начинает действовать момент силы тяжести, стремящийся удержать главную ось в горизонтальном положении.

Конструкция карданова подвеса обычно предусматривает подшипниковые опоры, трение в которых трудно свести к величинам, обеспечивающим практически безмоментный подвес ротора. Поэтому вместо карданова подвеса в гиротеодолитах, особенно при конструировании их высокоточных моделей, наибольшее применение получил торсионный подвес. При таком подвесе гиромотор *1* (рис. 90), жестко укрепленный внутри гирокамеры *2* ЧЭ, подвешивается в приборе на тонкой металлической ленте (торсионе) *3*, совмещаемой с вертикальной осью вращения алидады угломерной части гиротеодолита. Точка закрепления нижнего конца торсионной ленты в теле гирокамеры является точкой подвеса гироскопа.

Торсионный подвес обеспечивает ротору гироскопа три степени свободы вращения вокруг осей x, y' и z. Безмоментность торсионного подвеса достигается специальным креплением торсионной ленты. Чтобы предотвратить закручивание концов ленты, которое может произойти при поворотах ЧЭ вокруг вертикальной оси z, верхний зажим торсиона *4* делают подвижным, поворачивая его с помощью ручной или автоматической следящей системы синхронно с азимутальным движением ЧЭ. Для уменьшения момента упругого противодействия, создаваемого торсионом при повороте гироскопа вокруг оси y', плоскость ленты при жестком закреплении ее нижнего конца в теле гирокамеры устанавливают под прямым углом к оси вращения ротора гиромотора. Торсионная лента должна обладать небольшим моментом упругого противодействия, возникающим при закручивании ее концов и изгибах полотна, малой остаточной деформацией и необходимой механической прочностью.

Динамические характеристики и свойства гироскопа

Основной динамической характеристикой роторного гироскопа служит кинетический момент $\overline{H}$, который является мерой количества движения ротора при его вращении вокруг главной оси гироскопа. Кинетический момент $\overline{H}$ тождественно равен главному моменту $\overline{G}$ количества движения гироскопа, т. е.

$$\overline{H} \equiv \overline{G},$$

так как скорость собственного вращения ротора вокруг главной оси существенно превышает возможные скорости поворота гироскопа вокруг осей подвеса, например, в гиротеодолитах имеем: $\omega_x \approx 3 \cdot 10^3$ сек$^{-1}$; $\omega_y \approx 3 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$; $\omega_z \approx 3 \cdot 10^{-3}$ сек$^{-1}$).

Численно кинетический момент H равен произведению осевого (полярного) момента A инерции ротора на угловую скорость Ω собственного вращения ротора, т. е.

$$H = A\Omega. \qquad \text{(III.3.1)}$$

Вектор $\overline{H}$ кинетического момента всегда направлен по главной оси x гироскопа, определяя тем самым ее пространственное положение.

Движение гироскопа вокруг точки подвеса под действием внешних сил подчинено закону моментов, который по своему содержанию аналогичен второму (основному) закону динамики. Как известно, этим законом устанавливается связь между ускорением поступательного движения тела и приложенной к нему силы. Второй закон динамики гласит, что сила $\overline{F}$, приложенная к точке (телу) с массой m,

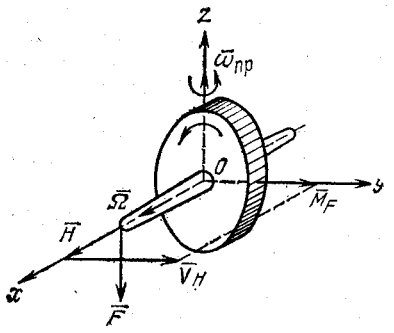


Рис. 91. Схема прецессии гироскопа

равна производной по времени от количества движения $m\bar{v}$ этой точки (тела), т. е.

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$

или $m\bar{a} = \bar{F}$,

где $\bar{a}$ — вектор линейного ускорения, получаемого точкой (телом).

Второй закон динамики в применении к телу, имеющему собственное вращение вокруг неподвижной точки, выступает в форме закона моментов, который устанавливает равенство между производной по времени от главного момента $\bar{G}$ количества движения вращающегося тела и суммарным моментом $\bar{M}$ всех внешних сил, приложенных к телу относительно этой неподвижной точки, т. е.

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{M}. \qquad \text{(III.3.2)}$$

Производная $\frac{d\bar{G}}{dt}$ характеризует линейную скорость $\bar{v}_G$ движения конца вектора $\bar{G}$ в пространстве. Поэтому закон моментов часто представляют в виде

$$\bar{v}_G = \bar{M}, \qquad \text{(III.3.3)}$$

получившем название теоремы Резаля.

Применительно к гироскопам закон моментов, выраженный формулой (III.3.2), и теорема Резаля (III.3.3) имеют вид:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{M}; \qquad \text{(III.3.4)}$$

$$\bar{v}_H = \bar{M}. \qquad \text{(III.3.5)}$$

Откуда следует, что реагируя на внешнюю силу $\bar{F}$ (рис. 91), гироскоп поворачивается вокруг точки подвеса таким образом, что конец вектора $\bar{H}$ (полюс гироскопа) движется в пространство с линейной скоростью $\bar{V}_H$, равной по величине и направлению моменту $\bar{M}$ силы $\bar{F}$.

Движение гироскопа под действием внешних сил называют п р е ц е с с и о н н ы м д в и ж е н и е м. Согласно рис. 91 вектор $\bar{V}_H$ линейной скорости прецессии равен векторному произведению угловой скорости $\bar{\omega}_{пр}$ прецессии гироскопа на вектор $\bar{H}$ кинетического момента, т. е.

$$\bar{V}_H = \bar{\omega}_{пр} \times \bar{H}.$$

Тогда уравнение (III.3.5) может быть записано в виде

$$\bar{\omega}_{пр} \times \bar{H} = \bar{M}, \qquad \text{(III.3.6)}$$

согласно которому вектор $\bar{M}$ момента внешних сил перпендикулярен к плоскости векторов $\bar{\omega}_{пр}$ и $\bar{H}$. Это значит, что прецессию гироскопа вызывает составляющая общего момента внешних сил, перпендикулярная к главной оси гироскопа. При этом момент, стремящийся повернуть гироскоп вокруг оси y, вызывает прецессию вокруг оси z, и наоборот. Направление вектора $\bar{\omega}_{пр}$ прецессионного поворота гироскопа соответствует направлению кратчайшего поворота вектора $\bar{H}$ к вектору момента $\bar{M}$.

Что касается величины угловой скорости прецессии, то на основании векторного произведения (III.3.6) имеем

$$M = \omega_{пр} H \sin(\bar{\omega}_{пр}, \bar{H}),$$

откуда с учетом ортогональности векторов $\bar{\omega}_{пр}$ и $\bar{H}$ получим

$$\omega_{пр} = \frac{M}{H} \qquad \text{(III.3.7)}$$

или

$$\omega_{пр} = \frac{M}{A\Omega}.$$

Таким образом, угловая скорость прецессионного движения прямо пропорциональна моменту внешних сил и обратно пропорциональна кинетическому моменту гироскопа. Чем больше кинетический момент, тем более устойчив такой гироскоп к действию внешних сил. Повышение кинетического момента гироскопа достигается одновременным или раздельным увеличением полярного момента A инерции ротора и угловой скорости Ω собственного вращения. Однако увеличение полярного момента инерции, как правило, ведет к увеличению веса и габаритов гироскопа, а повышение скорости собственного вращения ротора может отразиться на долговечности гироскопа.

Свойством прецессии широко пользуются в различных технических применениях гироскопа, преднамеренно вызывая его прецессию с целью изменения направления главной оси гироскопа в пространстве или придания ей определенной скорости вращения. Для получения прецессии гироскопа с заданной угловой скоростью и в требуемом направлении необходимо приложить к нему момент внешних сил, величину и направление которого можно установить, воспользовавшись правилами и формулами прецессии. Вращательные моменты накладываются на гироскоп с помощью специальных устройств, называемых датчиками момента, конструкция которых может быть самой разнообразной.

Применительно к идеально свободному гироскопу, для которого $\bar{M} = 0$, закон моментов (III.3.4) принимает вид:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{H} = \text{const}.$$

Таким образом, когда на гироскоп не действуют внешние силы, вектор кинетического момента гироскопа является величиной постоянной как по модулю, так и по направлению. Это значит, что главная ось такого гироскопа сохраняет неизменной свою первоначальную ориентировку в мировом пространстве и при движении основания будет переноситься в пространстве, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению. Будучи нацеленной на какую-либо удаленную звезду, главная ось такого гироскопа будет как бы следить за нею, т. е. будет сохранять свое наведение на эту звезду, независимо от перемещений основания гироскопа.

Свойство главной оси свободного гироскопа сохранять неизменным свое направление в мировом пространстве широко используется в различных областях техники, позволяя создавать на основе свободного гироскопа разнообразные приборы и устройства, решающие задачи стабилизации и навигации объектов в пространстве. В р альных условиях создать идеально свободный гироскоп практически невозможно. Всегда имеются некоторый остаточный небаланс гироскопа и трение в опорах подвеса, что приводит к появлению внешних сил, вызывающих прецессию гироскопа, которую называют дрейфом или уходом гироскопа и характеризуют углом поворота главной оси за единицу времени. Величина дрейфа является основной характеристикой точности реального свободного гироскопа.

Сохраняя неизменным свое направление в мировом пространстве, главная ось свободного гироскопа, установленного на поверхности Земли, будет непрерывно изменять свое положение относительно корпуса гироскопа и земных предметов. Движение главной оси свободного гироскопа относительно земных предметов называют видимым уходом, так как это явление кажущееся и обусловлено движением Земли в мировом пространстве.

Уравнения движения

Для вывода уравнений движения гироскопа воспользуемся известными в механике динамическими уравнениями Эйлера, которые описывают в общем виде вращение твердого тела вокруг неподвижной точки:

$$A\frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\,\omega_y\omega_z = M_x;$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\,\omega_z\omega_x = M_y;$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\,\omega_x\omega_y = M_z.$$

В этих уравнениях прямоугольные координатные оси x, y и z — главные оси инерции вращающего тела; A, B, C — главные моменты инерции тела; ω_x, ω_y и ω_z — проекции абсолютной угловой скорости вращения тела на главные оси инерции.

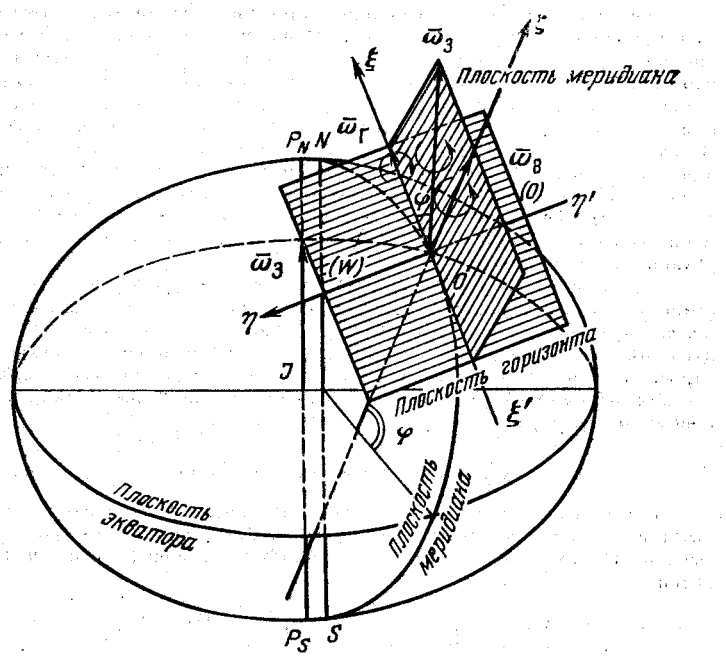
Ротор гироскопа является динамически симметричным телом, у которого экваториальные моменты инерции B и C равны между собой и по величине существенно меньше полярного момента инерции A. Поэтому динамическим уравнениям Эйлера, написанным для ротора гироскопа, в большинстве случаев практики можно придать такой вид:

$$A\frac{d\omega_x}{dt} = M_x;$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt} + A\omega_z\omega_x = M_y; \qquad \text{(III.3.8)}$$

$$B\frac{d\omega_z}{dt} - A\omega_x\omega_y = M_z.$$

Проекции ω_x, ω_y и ω_z абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения ротора на главные оси инерции гироскопа, установленного на неподвижном относительно земной поверхности основании, будут складываться из проекций скорости собственного вращения ротора Ω, относительной (видимой) скорости поворота гироскопа вокруг осей земной



Р и с. 92. Схема составляющих суточного вращения Земли

системы координат $\xi\eta\zeta$ и переносной скорости, обусловленной поворотом этой системы координат в мировом пространстве в результате вращения Земли.

На современном этапе разработки гиротеодолитов при анализе движения земной системы координат достаточно учитывать лишь суточное вращение Земли, пренебрегая ее движением вокруг Солнца.

В течение звездных суток, равных 86 164,1 с, Земля совершает полный оборот вокруг оси с угловой скоростью $\omega_З \approx 73\cdot10^{-6}$ с$^{-1}$. Вектор $\bar{\omega}_З$ направлен по оси вращения Земли в сторону северного полюса (рис. 92). Отнесенный к точке наблюдений O вектор $\bar{\omega}_З$ можно разложить на два взаимно перпендикулярных вектора $\bar{\omega}_В$ и $\bar{\omega}_Г$, направленных соответственно по отвесной ζ и полуденной ξ линиям и характеризующих вертикальную и горизонтальную составляющие угловой скорости суточного вращения Земли.

При указанной выше ориентировке земной системы координат эти составляющие равны:

$$\omega_В = \omega_З \sin\varphi; \qquad \omega_Г = \omega_З \cos\varphi, \qquad \text{(III.3.9)}$$

где φ — географическая широта точки земной поверхности.

Горизонтальная составляющая $\omega_Г$ представляет собой скорость, с которой неподвижная для земного наблюдателя плоскость горизонта вращается в мировом пространстве вокруг полуденной линии ξ. При этом поворот плоскости горизонта совершается так, что восточный край ее все время «опускается» по отношению к звездам, а западный —

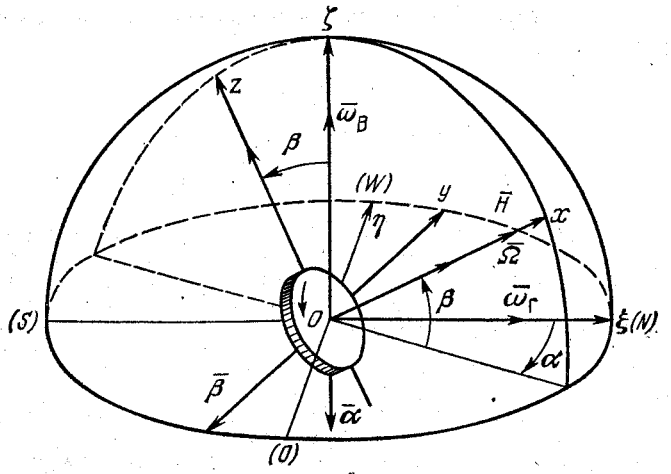


Рис. 93. Схема составляющих угловой скорости гироскопа, установленного на земной поверхности

«поднимается». Чем больше широта места φ, тем медленнее плоскость горизонта поворачивается вокруг полуденной линии.

Вертикальная составляющая ω_B характеризует угловую скорость, с которой плоскость меридиана совместно с плоскостью горизонта поворачивается в мировом пространстве вокруг отвесной линии ζ точки наблюдений. В северном полушарии плоскость меридиана поворачивается относительно звезд таким образом, что ее северная половина непрерывно перемещается в направлении с востока на запад. Чем больше широта места φ, тем выше скорость поворота плоскости меридиана, которая на полюсе достигает угловой скорости вращения Земли. На экваторе скорость вращения плоскости меридиана равна нулю.

Обозначим через $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ (рис. 93) скорость видимого поворота гироскопа соответственно по азимуту и высоте. Тогда проекции абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$ вращения ротора на оси инерции гироскопа можно представить формулами:

$$\omega_x = \Omega - \dot{\alpha}\sin\beta + \omega_B \sin\beta + \omega_Г \cos\alpha\cos\beta;$$
$$\omega_y = -\dot{\beta} + \omega_Г \sin\alpha; \qquad \text{(III.3.10)}$$
$$\omega_z = -\dot{\alpha}\cos\beta - \omega_Г \cos\alpha\sin\beta + \omega_B \cos\beta.$$

В гиротеодолитах углы β наклона главной оси ЧЭ к плоскости горизонта малы и обычно не превышают 30′. Поэтому выражения (III.3.10) можно упростить и с учетом формул (III.3.9) будем иметь:

$$\omega_x = \Omega + \omega_З \cos\varphi\cos\alpha;$$
$$\omega_y = -\dot{\beta} + \omega_З \cos\varphi\sin\alpha;$$
$$\omega_z = -\dot{\alpha} + \omega_З \sin\varphi.$$

Дифференцируя и перемножая составляющие скорости $\bar{\omega}$ в соответствии с формулами (III.3.8), после преобразований с учетом равенства (III.3.1) и малости членов, в которые входят сомножителями $\omega_З^2$, $\dot{\alpha}\omega_З$ и $\dot{\beta}\omega_З$, получим:

$$A\dot{\Omega} = M_x;$$
$$-B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + H\omega_З \sin\varphi = M_y;$$
$$-B\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - H\omega_З \cos\varphi\sin\alpha = M_z.$$

Эти дифференциальные уравнения описывают движение трехстепенного гироскопа, установленного на неподвижном относительно Земли основании. В правых частях уравнений стоят проекции обобщенного момента внешних сил на оси инерции гироскопа, с которыми совмещены оси прямоугольной системы координат *xyz*. Заметим, что ось *y* системы всегда располагается в плоскости горизонта точки установки гироскопа и определяется линией пересечения этой плоскости с экваториальной плоскостью симметрии ротора.

Рассмотрим первое уравнение. Оно характеризует движение ротора относительно оси собственного вращения (главной оси гироскопа) под действием внешнего момента M_x. Этот момент складывается из момента $M_{дв}$, развиваемого двигателем на валу, и момента $M_с$ сопротивления, препятствующего вращению ротора и обусловленного аэродинамическими и электрическими силами, трением в опорах ротора. Поэтому $M_x = M_{дв} - M_с$. Во время разгона (раскручивания) гироскопа момент двигателя преодолевает момент сопротивления, т. е. $M_{дв} > M_с$. В этом случае $\dot{\Omega} > 0$. Возрастание скорости собственного вращения ротора продолжается в течение некоторого промежутка времени, называемого временем разгона гиромотора, до тех пор, пока не наступит равенство $M_{дв} = M_с$, при котором момент двигателя будет уравновешивать момент сопротивления. При этих условиях $M_x = 0$, следовательно, $\dot{\Omega} = 0$ и $H = \text{const}$.

Нормальное функционирование большинства гироскопических приборов происходит при установившемся режиме работы гиромотора, когда $M_{дв} = M_с$ и $H = \text{const}$. В этом случае движение трехстепенного гироскопа, очевидно, будет описываться двумя последними уравнениями:

$$-B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + H\omega_З \sin\varphi = M_y;$$
$$-B\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - H\omega_З \cos\varphi\sin\alpha = M_z. \qquad \text{(III.3.11)}$$

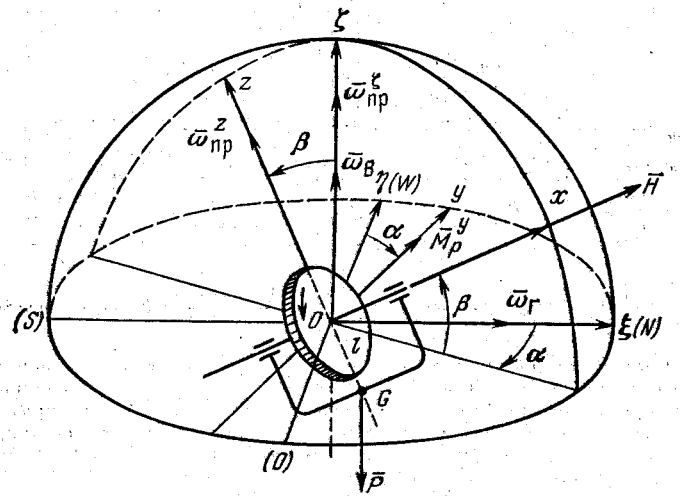
III.3.2. Гиротеодолит с маятниковым гироскопом

Принцип определения направления меридиана

Величина момента M_P^y (рис. 94) силы тяжести, который возникает при наклоне маятникового гироскопа и стремится повернуть его вокруг оси чувствительности *y*, чтобы главная ось *x* снова заняла горизонтальное положение, зависит от значения угла наклона β и плеча *l* маятника — смещения центра *C* масс гироскопа от точки подвеса *O*. Причем

$$M_P^y = Pl\beta,$$

где *P* — вес гироскопа (вес ЧЭ гиротеодолита).



Р и с. 94. Схема движения маятникового гироскопа относительно плоскостей меридиана и горизонта

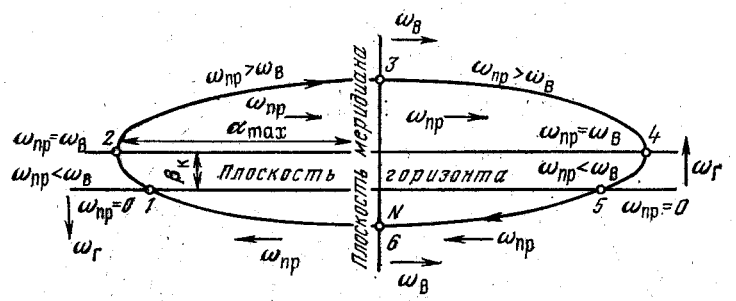
Под действием маятникового момента $M^{x}_{р}$ гироскоп начинает прецессировать, поворачиваясь вокруг оси z с угловой скоростью $\omega^{z}_{пр}$, которая, согласно формуле (III.3.7), равна

$$\omega^{z}_{пр} = \frac{Pl}{H}\beta.$$

Скорость $\omega^{z}_{пр}$ будет также характеризовать азимутальную прецессию $\omega^{\xi}_{пр}$ гироскопа вокруг направления отвесной линии места установки, так как

$$\omega^{\zeta}_{пр} = \omega^{z}_{пр}\cos\beta \approx \frac{Pl}{H}\beta. \qquad (III.3.12)$$

Пусть в начальный момент главная ось горизонтальна и составляет с плоскостью меридиана угол α (см. рис. 94), причем полюс гироскопа отклонен к востоку. Так как в этом положении гироскопа угол $\beta = 0$, то $M^{y}_{р} = 0$ и, следовательно, $\omega^{z}_{пр} = 0$. Гироскоп функционирует в этот момент как свободный гироскоп, сохраняя направление своей главной оси в мировом пространстве. Однако, будучи установленным на земной поверхности, гироскоп участвует в суточном вращении, поворачиваясь в пространстве со скоростями $\omega_г$ и $\omega_в$ соответственно вокруг полуденной и отвесной линии. Поэтому наблюдатель будет видеть, что полюс гироскопа, отклоненный в начальный момент к востоку от плоскости меридиана, в следующий момент начнет приподниматься над плоскостью горизонта. С появлением положительного наклона главной оси гироскоп под действием маятникового момента прецессирует в западном направлении и наблюдатель будет видеть, как полюс гироскопа, приподнимаясь над плоскостью горизонта, начинает, ускоряясь, двигаться в западном направлении в сторону плоскости меридиана.



Р и с. 95. Траектория видимого движения полюса маятникового гироскопа

Аналогично рассуждая, можно показать, что когда главная ось горизонтальна и полюс маятникового гироскопа отклонен в начальный момент к западу от плоскости меридиана, то гироскоп, реагируя на суточное вращение Земли, начнет азимутальное прецессионное движение в восточном направлении, стремясь совместить главную ось с плоскостью меридиана.

Подобно стрелке магнитного компаса главная ось маятникового гироскопа, установленного на поверхности Земли, независимо от своего первоначального азимутального направления движется в сторону плоскости меридиана и, стремясь с ней совместиться, совершает гармонические колебания, положение динамического равновесия которых располагается в этой плоскости.

Главная ось маятникового гироскопа будет оставаться в плоскости меридиана или будет сохранять по отношению к ней постоянное азимутальное положение только при том условии, если она прецессирует в пространстве в ту же сторону и с той же скоростью, с какой поворачивается плоскость меридиана вокруг отвесной линии. Для этого необходимо, чтобы азимутальная угловая скорость прецессии $\omega^{\zeta}_{пр}$ равнялась вертикальной составляющей суточного вращения $\omega_в$.

Приравнивая значения этих скоростей в соответствии с формулами (III.3.12) и (III.3.9), найдем, что, когда северный конец главной оси маятникового гироскопа приподнят над плоскостью горизонта на угол $\beta_к$, равный

$$\beta_к = \frac{H}{Pl}\omega_З \sin\varphi, \qquad (III.3.13)$$

азимутальная угловая скорость прецессии гироскопа равна вертикальной составляющей земного вращения. Угол $\beta_к$ называют компенсирующим углом.

Для наблюдателя азимутальная прецессия маятникового гироскопа в мировом пространстве будет суммироваться с суточным вращением плоскостей горизонта и меридиана, в результате чего видимое движение полюса гироскопа будет происходить по эллипсу (рис. 95), малая ось которого совмещена с плоскостью меридиана, а большая расположена в плоскости, наклоненной к плоскости горизонта на компенсирующий угол $\beta_к$.

Если соединить в одном приборе маятниковый гироскоп и теодолит (рис. 96), то, проектируя каким-либо образом на горизонтальный круг теодолита крайние точки *1* и *2* прецессионных колебаний гироскопа — точки реверсий, можно определить отсчет N_0, соответ-

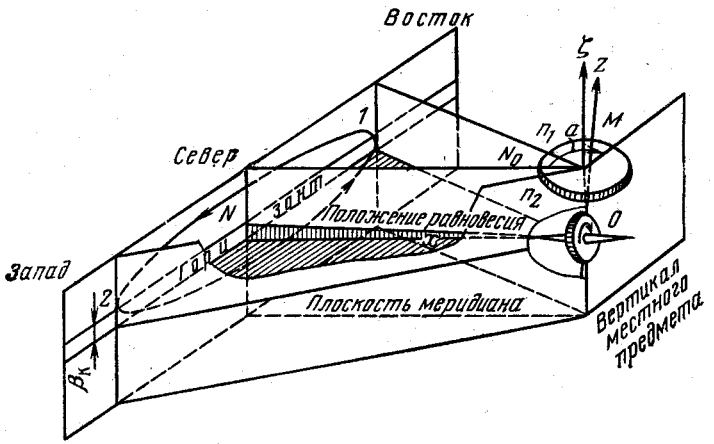


Рис. 96. Схема определения направлений меридиана маятниковым гироскопом

ствующий проекции положения динамического равновесия главной оси на горизонтальный круг. В идеально отрегулированном приборе эта проекция будет совпадать с направлением плоскости меридиана. Зная отсчет N_0 и отсчет M по горизонтальному кругу при визировании на конечный пункт ориентируемой стороны, по формуле

$$a = M - N_0$$

найдем азимут этого направления.

По своей природе этот азимут будет астрономическим, отнесенным к мгновенному полюсу Земли. Объясняется это тем, что функционирование маятникового гироскопа в режиме гирокомпаса происходит под действием момента силы тяжести, возникающего в результате суточного вращения Земли.

Уравнения движения

Ограничимся рассмотрением идеального случая, полагая, что гироскоп работает в установившемся режиме ($H = \text{const}$), амплитуды азимутальных колебаний малы, трение в осях подвеса отсутствует ($M_z = 0$) и на гироскоп действует лишь маятниковый момент ($M_P^y = Pl\beta$). Тогда, опуская в формулах (III.3.11) члены, характеризующие нутационные колебания главной оси, в качестве исходной будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$-H\dot{\alpha} + H\omega_3 \sin\varphi = Pl\beta; \qquad \text{(III.3.14)}$$

$$H\dot{\beta} - H\omega_3 \cos\varphi \cdot \alpha = 0,$$

которая после разделения переменных сводится к однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\alpha} + k^2\alpha = 0, \qquad \text{(III.3.15)}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{Pl\omega_3 \cos\varphi}{H}}. \qquad \text{(III.3.16)}$$

Общее решение уравнения (III.3.15) может быть представлено в форме

$$\alpha = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad \text{(III.3.17)}$$

Обычно в момент разарретирования ЧЭ гиротеодолита главная ось гироскопа не совпадает с плоскостями меридиана и горизонта и составляет с ними соответственно некоторые углы α_0 и β_0. Начальный наклон гироскопа к плоскости горизонта приведет к азимутальной прецессии со скоростью $\dot{\alpha}_0$, которая в соответствии с формулой (III.3.12) равна

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{Pl}{H}\beta_0.$$

Таким образом, для определения постоянных C_1 и C_2 имеем: $t = 0$, $\alpha(0) = \alpha_0$ и $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$. Тогда на основании уравнения (III.3.17), получим

$$C_1 = \alpha_0; \qquad C_2 = \frac{\dot{\alpha}_0}{k}$$

и, следовательно,

$$\alpha = \alpha_0 \cos kt + \frac{\dot{\alpha}_0}{k} \sin kt. \qquad \text{(III.3.18)}$$

Уравнение (III.3.18) можно упростить, обозначив

$$\alpha_0 = \alpha_m \sin\nu; \qquad \frac{\dot{\alpha}_0}{k} = \alpha_m \cos\nu.$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_m \sin(kt + \nu), \qquad \text{(III.3.19)}$$

где максимальная амплитуда α_m определяется выражением

$$\alpha_m = \sqrt{\alpha_0^2 - \frac{\dot{\alpha}_0^2}{k^2}},$$

а начальная фаза колебаний может быть найдена по формуле

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\alpha_0}{\dot{\alpha}_0} k.$$

Чтобы установить закон движения гироскопа по высоте, подставим в первое уравнение системы (III.3.14) производную $\dot{\alpha}$, полученную дифференцированием формулы (III.3.19). Тогда с учетом выражения (III.3.13) получим

$$\beta = \beta_k - \frac{H}{Pl}\alpha_m k \cos(kt + \nu). \qquad \text{(III.3.20)}$$

Из анализа формул (III.3.19) и (III.3.20) следует, что при отсутствии трения маятниковый гироскоп совершает незатухающие колебания относительно плоскости меридиана и плоскости, наклонной к плоскости горизонта на компенсирующий угол. Эти колебания происходят с круговой частотой k и периодом $T = 2\pi/k$, для вычисления которого на основании равенства (III.3.16) будет служить формула

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{Pl\omega_3 \cos\varphi}}. \qquad \text{(III.3.21)}$$

Для производства расчетов целесообразно уравнениям (III.3.19) и (III.3.20) движения маятникового гироскопа по азимуту и высоте при-

дать другой вид, введя в них значения T и $\beta_к$ в соответствии с формулами (III.3.21) и (III.3.13). Будем иметь:

$$\alpha = \alpha_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \nu\right);$$

$$\beta = \beta_k - \alpha_m \sqrt{\beta_k \operatorname{ctg} \varphi} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \nu\right).$$

В реальных приборах всегда имеется остаточное трение в опорах гироскопа (трение ЧЭ о воздух, взаимодействие с магнитным полем, закручивание торсиона и токоподводов и др.). Поэтому траекторией видимого движения полюса гироскопа в реальных приборах будет не эллипс, а медленно закручивающаяся эллиптическая спираль.

Для определения положения динамического равновесия в этом случае необходимо отнаблюдать как минимум три последовательные реверсии ЧЭ. Принятая в настоящее время методика гироскопического ориентирования предусматривает наблюдение в пуске (приеме измерения азимута) четырех реверсий, что обеспечивает контроль определения положения динамического равновесия и сравнительно экономично по времени. В этом случае для вычисления отсчета N_0 служит формула

$$N_0 = \frac{1}{2}(N_1 + N_2),$$

в которой

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2}\right);$$
$$N_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2 + n_3}{2} + \frac{n_3 + n_4}{2}\right). \qquad \text{(III.3.22)}$$

Устройство гиротеодолита

В настоящее время еще нет закрепленной ГОСТом классификации гиротеодолитов по точности определения азимутов. В литературе получила распространение венгерская классификация, которая делит гиротеодолиты на пять классов точности, указываемых буквой латинского алфавита в шифре прибора. Согласно этой классификации, высокоточные образцы гиротеодолитов (литер А) должны обеспечивать определение азимутов одним пуском (одним приемом измерений) со средней квадратической ошибкой, не превышающей 5″, точные (литер В) — 20″, средней точности (литер С) — 30″, малоточные (литер D) —1′, низкой точности (литер Е) — 3′.

Малая чувствительность гиротеодолитов с маятниковым гироскопом в качестве ЧЭ к ошибкам нивелирования и кратковременному действию возмущающих сил делает эту схему пока что единственно пригодной для разработки высокоточных и точных моделей гиротеодолитов, которые для специалистов геодезического производства представляют наибольший интерес.

В целях достижения заданной точности определения азимутов конструкция гиротеодолита должна обеспечивать максимальное ослабление влияния на показания прибора различного рода внешних возмущающих сил, создающих моменты относительно осей подвеса гироскопа. Кроме того, всегда стремятся получить прибор надежный и удобный в эксплуатации, с малым периодом прецессионных колебаний гироскопа, что при прочих равных условиях позволяет сократить продолжительность пуска и эффективнее расходовать моторесурсы гиротеодолита и энергию источника питания. Различные пути решения этих

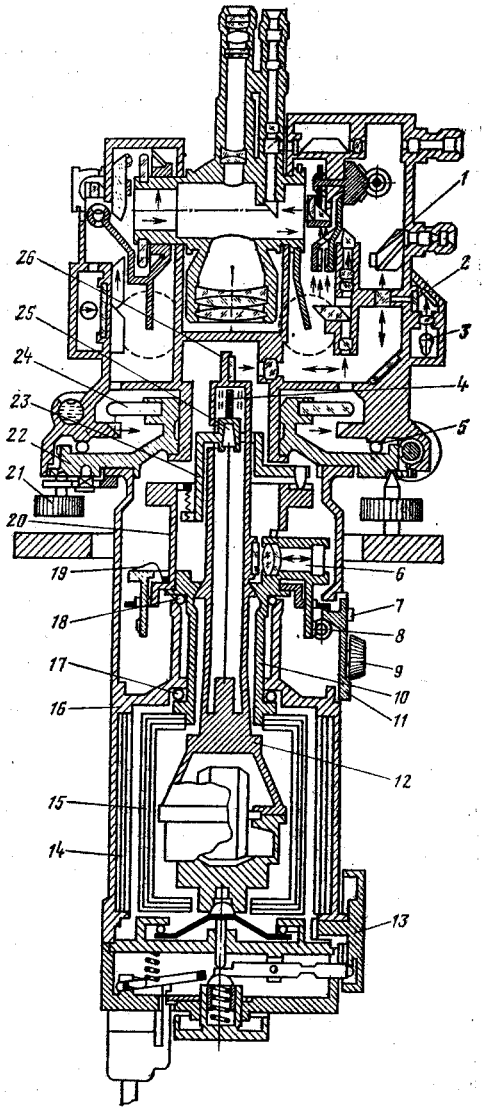


Рис. 97. Схема устройства гиротеодолита Ги-Б2:

1 — базисная призма автоколлиматора; *2* — сетка автоколлиматора; *3* — лампа подсветки автоколлиматора; *4* — блок спиральных токоподводов; *5* — шариковая опора алидады угломерной части; *6* — фотоэлектрический автоколлиматор следящей системы; *7* — кнопки быстрого разворота следящего корпуса; *8* — исполнительный двигатель следящей системы; *9* — потенциометр следящей системы; *10* — следящий корпус; *11* — рычаг сцепления следящего корпуса; *12* — ЧЭ с гиромотором и штангой; *13* — маховик арретира; *14, 15* — экраны магнитной защиты; *16* — корпус гироблока; *17, 18* — шариковые опоры следящего корпуса; *19* — фрикционная пружина следящего корпуса; *20* — опорный корпус следящей системы; *21* — винт крепления гироблока; *22* — основание угломерной части; *23* — подъемная плата; *24* — горизонтальный круг; *25* — верхний зажим торсионной ленты; *26* — зеркало ЧЭ

ТАБЛИЦА 53

Основные технические характеристики гиротеодолитов типа Ги-Б

Характеристики прибора	Марка гиротеодолита		
	Ги-Б1	Ги-Б2	Ги-Б3
Средняя квадратическая ошибка измерения азимута одним пуском, угл. с	15—20	10—15	5—8
Продолжительность пуска, мин	50	45	45
Система слежения	Ручная	Автоматическая	
Входное напряжение, В	12±1	12±1	12±1
Потребляемая мощность, Вт	18	30	20
Масса комплекта в рабочем положении, кг	75	75	70
Масса комплекта в упаковке, кг	105	105	86

проблем приводят к разнообразию в конструкциях маятниковых гиротеодолитов. Однако для точных и высокоточных моделей к настоящему времени вполне сформировалась принципиальная схема устройства, которая предусматривает торсионный подвес ЧЭ и автоматическую систему слежения. Типичным представителем такой схемы является гиротеодолит Ги-Б2 (рис. 97).

Комплект гиротеодолита включает: гироблок, угломерную часть, блок питания и источник энергии.

Основу гироблока составляет ЧЭ, представляющий собой маятниковый гироскоп с системами подвеса и центрирования относительно вертикальной оси прибора, токоподвода и арретирования. Система токоподвода должна обеспечивать безмоментную передачу электроэнергии от блока питания к гиромотору ЧЭ, а система арретирования необходима для жесткого скрепления ЧЭ с корпусом гироблока после окончания измерений. Кроме этих систем в гироблоке размещаются экраны магнитной защиты, изолирующие ЧЭ от внешнего магнитного поля, и элементы следящей системы, которая предназначена для визуального наблюдения ЧЭ и предотвращения закручивания упругих элементов систем подвеса и токоподвода. Некоторые элементы этой системы располагаются в угломерной части, которая необходима для геодезической привязки ориентируемых направлений к направлению положения динамического равновесия ЧЭ. Блок питания служит для преобразования и распределения энергии аккумуляторной батареи, обычно используемой в качестве источника питания, а также для управления электрическими режимами работы прибора.

Кроме перечисленных блоков в комплект гиротеодолита входят: штатив, соединительные кабели и различные вспомогательные приборы, обеспечивающие подготовку гиротеодолита к наблюдениям.

В табл. 53 приведены основные технические характеристики гиротеодолитов типа Ги-Б, получивших производственное применение в СССР.

III.3.3. Методика измерения азимутов гиротеодолитами

Приборная поправка и эталонирование гиротеодолита

Из приведенной схемы устройства гиротеодолита Ги-Б2 следует, что измеренный азимут a какого-либо направления будет равен астрономическому лишь в том случае, когда вертикальная плоскость симметрии ЧЭ, в которой располагается главная ось гироскопа, нормальна к плоскости зеркала ЧЭ, а оптическая ось автоколлиматора совмещена с коллимационной плоскостью зрительной трубы прибора. Выдержать эти условия при изготовлении гиротеодолита практически невозможно. Поэтому азимуты a, измеренные гиротеодолитом и вычисленные как разность отсчетов M и N_0 будут отличаться от астрономических азимутов A на величину Δ, которую принято называть приборной (инструментальной) поправкой гиротеодолита. Значение приборной поправки находят из периодических эталонирований гиротеодолита по исходным направлениям с известными астрономическими азимутами.

При ориентировании направлений их астрономические азимуты вычисляют по формуле

$$A = a + \Delta = M - N_0 + \Delta, \qquad \text{(III.3.23)}$$

в которой Δ — величина приборной поправки из последнего эталонирования прибора.

Из формулы (III.3.23) следует, что точность гироскопического ориентирования направлений зависит от:

точности определения положения динамического равновесия N_0 ЧЭ в данном пуске;

стабильности поправки Δ гиротеодолита на момент измерений;

точности измерения угломерной частью направления M на земные предметы.

Угломерной части гиротеодолита присущи все ошибки обычных угломерных инструментов — теодолитов. К ошибкам этого рода относятся: ошибки визирования и отсчетов горизонтального круга; ошибки, обусловленные наклоном вертикальной оси вращения алидады, неправильностью цапф горизонтальной оси вращения зрительной трубы, коллимацией, эксцентриситетом и пр. Действие таких источников погрешностей и методы ослабления их влияния на результаты угловых измерений изложены в гл. III.2 Справочника. Заметим лишь, что основу конструкции угломерной части современного высокоточного гиротеодолита должен составлять точный оптический теодолит, который позволяет измерять горизонтальные направления при двух положениях вертикального круга, имеет двустороннюю отсчетную систему и устройство для перестановки горизонтального круга.

Чтобы судить о причинах изменения приборной поправки гиротеодолита, остановимся на ее физической сущности. Введением приборной поправки устраняют систематические ошибки в результатах измерений, которые обусловлены непараллельностью вертикальных плоскостей, содержащих главную ось гироскопа и нормаль к плоскости основного зеркала ЧЭ, а также несовпадением коллимационной плоскости зрительной трубы с вертикальной плоскостью, проходящей через оптическую ось автоколлиматора прибора. Таким образом, поправка Δ гиротеодолита должна включать в себя эти углы. Однако ими можно ограничиться лишь при условии, что в положении динамического равновесия ЧЭ главная ось гироскопа располагается в плоскости истинного меридиана. В реальных приборах под действием различного рода внешних возмущающих сил (трения, кручения, магнитного взаимодействия и пр.) ЧЭ занимает положение динамического равновесия, при котором главная ось, как правило, отклонена от плоскости меридиана точки установки гиротеодолита.

На рис. 98 в проекции на горизонтальную плоскость показано возможное расположение коллимационной плоскости зрительной трубы *2* гиротеодолита и главной оси гироскопа, когда ЧЭ занимает положение динамического равновесия, а оптическая ось автоколли

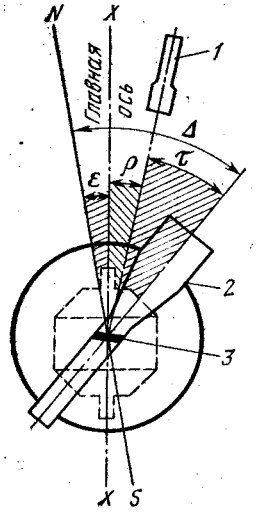


Рис. 98. Схема составляющих приборной поправки в гиротеодолитах типа Ги-Б

матора *1* совмещена поворотом алидады с нормалью к плоскости зеркала ЧЭ *3*. Из рисунка следует, что

$$\Delta = \varepsilon + \rho + \tau,$$

где ε — азимут главной оси в положении динамического равновесия ЧЭ; ρ — угол между главной осью и нормалью к плоскости зеркала ЧЭ; τ — угол несовпадения оптической оси автоколлиматора с коллимационной плоскостью зрительной трубы.

Точность ориентирования направлений гиротеодолитами во многом зависит от стабильности положения динамического равновесия ЧЭ по отношению к плоскости меридиана. Азимут ε главной оси гироскопа в положении динамического равновесия ЧЭ должен сохраняться не только при выполнении пусков на каком-либо пункте, но и во время работы на всех других пунктах, после хранения и перевозки прибора с выключенным гиромотором.

Азимутальное положение ε динамического равновесия ЧЭ в различных пусках гиротеодолита в основном определяется:

величиной противодействующего момента кручения, создаваемого системами подвеса и токоподвода;

скоростью температурной разбалансировки ЧЭ;

характером нестабильности кинетического момента гироскопа в данном пуске.

Кроме того, на положение динамического равновесия влияет величина момента магнитного взаимодействия ЧЭ с полем под экраном гироблока, а также некоторые другие факторы, связанные главным образом с особенностями конструкции прибора. Точность определения положения динамического равновесия в пуске существенно зависит от ошибок наблюдения прецессионных колебаний ЧЭ.

Постоянство углов τ и ρ определяется механической прочностью и стабильностью положения деталей таких узлов гиротеодолита, как угломерная часть и ЧЭ. Изменение величины углов τ и ρ в процессе эксплуатации гиротеодолита вызывается: деформациями гиротеодолита при изменении его температурного режима работы; воздействием на гиротеодолит транспортной тряски и других видов динамических нагрузок; износом и старением деталей гиротеодолита.

Установлено, что изменение угла τ угломерной части чаще всего является причиной нестабильности поправки Δ. Поэтому в некоторых современных моделях гиротеодолитов (Ги-Б3) конструктивно предусматривается возможность измерения этого угла непосредственно на каждом пункте наблюдений. Однако судить надежно о стабильности поправки Δ можно, лишь периодически эталонируя гиротеодолит по направлениям с известным астрономическим азимутом.

По опыту работы с гиротеодолитами типа Ги-Б их эталонирование по полной программе (9 пусков для Ги-Б1 и 12 пусков для Ги-Б2 и Ги-Б3) следует делать не реже 1 раза в 3 месяца при ориентировании направлений с точностью 3, 5 и 10″ и 1 раз в 6 месяцев при работе с точностью 15, 30 и 60″.

ТАБЛИЦА 54

Контролируемые величины	Допуски для гиротеодолитов		
	Ги-Б1	Ги-Б2	Ги-Б3
Расхождение между значениями N_1 и N_2 в пуске, угл. с	25	15	10
Расхождение между единичными значениями поправок Δ_i, угл. с	75	50	25
Расхождение между значениями поправок, определенных по полной программе эталонирования, угл. с	30	20	8
Расхождение значений контрольной поправки (из 4 пусков) с поправкой, определенной по полной программе, угл. с	35	25	12

При высокоточном ориентировании направлений следует также предусматривать эталонирование гиротеодолитов по полной программе, когда:

температура воздуха ко времени производства работ будет отличаться более чем на 20—25 °С от температуры воздуха при последнем эталонировании;

после последнего эталонирования гиротеодолит транспортировался по шоссейным дорогам на расстояние свыше 3 тыс. км или свыше 500 км по бездорожью;

средняя широта района работ отличается от географической широты места последнего эталонирования более чем на 10°.

Кроме того, в ходе работ потребность во внеочередном эталонировании вызывается:

установлением по невязкам ориентирования недопустимой величины изменения приборной поправки гиротеодолита;

ремонтом гиротеодолита, в процессе которого могли измениться углы, составляющие эту поправку.

Астрономические азимуты эталонных направлений должны быть определены с ошибками, не превышающими, как правило, третьей части ошибки, характеризующей заданную точность ориентирования. Поэтому при работах с точностью 3—5″ в качестве исходных для эталонирования могут служить специальные базы или пункты эталонирования, на которых азимуты эталонных направлений получены из астрономических наблюдений, или пункты Лапласа. При точности 10″ для этих целей могут использоваться направления сторон государственной геодезической сети 1 и 2 классов, при точности 15″ — ГГС 1—4 классов.

Эталонирование выполняют сериями по три пуска в каждой серии, как правило, в течение двух суток, на одном-двух пунктах, по двум эталонным направлениям на каждом пункте. Перерыв между сериями пусков должен быть не менее 1 ч. Каждая серия наблюдается при новой установке горизонтального круга. При эталонировании соблюдают допуски, указанные в табл. 54.

В зависимости от того, что известно для эталонных направлений, приборная поправка Δ гиротеодолита вычисляется по одной из следующих формул;

$$\Delta = A_0 - a_0;$$

$$\Delta = \alpha_0 - (a_0 + \delta A_0 - \gamma_0 + \delta_0), \qquad \text{(III.3.24)}$$

где A_0 и α_0 — астрономический азимут и дирекционный угол эталонного направления; a_0 — приведенный к центрам пунктов измеренный азимут этого направления; δA_0 — поправка в астрономический азимут за уклонение отвесной линии (поправка Лапласа) для пункта эталонирования; γ_0 и δ_0 — гауссово сближение меридианов для этого пункта и поправка за редуцирование измеренного направления на плоскость проекции Гаусса.

Обработка результатов эталонирования гиротеодолита заключается в вычислении из каждого пуска поправки Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, n_0$) а затем ее средней величины $\Delta_{ср}$ и ошибки μ_Δ азимута, измеренного одним пуском

$$\mu_\Delta = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_0} (\Delta_i - \Delta_{ср})^2}{n_0 - 1}}.$$

Методика измерений в пуске

При работе с гиротеодолитами, имеющими визуальный съем показаний, положение динамического равновесия ЧЭ в пуске определяют, как правило, по измеренным амплитудам колебаний. Такой способ измерений получил название способа точек реверсий. Существуют некоторые видоизменения этого способа.

Достоинства способа точек реверсий определяются его простотой и точностью; к недостаткам способа можно отнести сравнительную длительность измерений в пуске. В этом способе для определения отсчета N_0 положения динамического равновесия ЧЭ наблюдают крайние (реверсионные) точки азимутальных колебаний ЧЭ. Вычисления производят по формулам (III.3.22).

Качество измерений в пусках контролируют по величине разности текущих положений равновесия N_1 и N_2, вычисляемых по отсчетам трех последовательных точек реверсий. Для каждого типа гиротеодолита величина этой разности не должна превышать определенного значения, устанавливаемого исходя из точностных характеристик гиротеодолита.

Точность определения положения динамического равновесия ЧЭ во многом зависит от стабильности упругих качеств систем подвеса и токоподвода гиротеодолита, которые характеризуются суммарным удельным крутящим моментом $\sigma_{кр}$, создаваемым торсионом и токопроводами при закручивании на угол в 1 рад. В процессе работы с гиротеодолитом о стабильности момента $\sigma_{кр}$ судят по стабильности периода $T_{св}$ свободных колебаний — азимутальных колебаний ЧЭ с неработающим гиромотором. Период $T_{св}$ определяется выражением

$$T_{св} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\sigma_{кр}}}, \qquad (III.3.25)$$

где J — момент инерции ЧЭ относительно вертикальной оси.

Величина периода $T_{св}$ не зависит от географической широты места наблюдений. Поэтому изменение периода $T_{св}$, измеряемого в пуске при наблюдении свободных колебаний ЧЭ, сигнализирует о разрегулировании гиротеодолита.

Плоскость симметрии свободных колебаний ЧЭ определяет так называемое положение статического равновесия — положение, при котором сумма моментов внешних сил, накладываемых на ЧЭ с неработающим гиромотором относительно вертикальной оси системами

подвеса, токоподвода и магнитной защиты, равна нулю. Положением статического равновесия, фиксируемым отсчетом $A_{нп}$ по шкале автоколлиматора или какого-либо другого устройства, применяемого для наблюдения за движением ЧЭ, определяется положение нуль-пункта гиротеодолита.

В гиротеодолитах с автоматической системой слежения положению статического равновесия ЧЭ должно соответствовать положение электрического нуля следящего корпуса. Если это условие соблюдается, то автоматическое сопровождение азимутального движения ЧЭ следящим корпусом, несущим верхние зажимы торсиона и токопроводов, будет происходить без их закручивания.

В реальных приборах это условие обычно не соблюдается и между положениями электрического нуля следящего корпуса и статического равновесия ЧЭ существует некоторый угол рассогласования. Выраженный в делениях шкалы автоколлиматора или какого-либо другого устройства, применяемого для наблюдения за движением ЧЭ и фиксации точек реверсий, этот угол определяет величину и положение нуль-пункта прибора. Сопровождение ЧЭ следящим корпусом при нуль-пункте, измеряемом $A_{нп}$ делениями отсчетной шкалы, будет происходить при постоянном закручивании торсиона и токоподводов на угол ψ

$$\psi = A_{нп}\mu,$$

где μ — угловая цена деления шкалы.

Постоянное закручивание торсиона и токоподводов в течение пуска на угол ψ исказит азимутальное положение N_0 динамического равновесия ЧЭ на угол

$$\delta N_0 = \frac{\sigma_{кр}\mu A_{нп}}{H\omega_З \cos\varphi}.$$

Обозначим через

$$c = -\frac{\sigma_{кр}\mu}{H\omega_З \cos\varphi} \qquad (III.3.26)$$

постоянную для данной широты величину, которую называют широтным коэффициентом гиротеодолита. Тогда для вычисления поправки за нуль-пункт будет служить формула

$$\Delta N_0 = -\delta N_0 = cA_{нп}.$$

Положение нуль-пункта $A_{нп}$ определяют по результатам наблюдения свободных колебаний ЧЭ. Для этого достаточно зафиксировать по шкале автоколлиматора гиротеодолита 3—4 реверсионные точки свободных колебаний ЧЭ и вычислить отсчет $A_{нп}$ по формулам, которые аналогичны формулам (III.3.22) для вычисления положения динамического равновесия прецессионных колебаний ЧЭ.

В гиротеодолитах с автоматической системой слежения методика определения нуль-пункта имеет некоторые особенности, которые заключаются в предварительном электрическом обнулении следящей системы.

Программа измерений обычно предусматривает определение нуль-пункта дважды: до и после наблюдения прецессионных колебаний. Поправку за нуль-пункт принято вычислять по значению $A_{нп}$, полученному из наблюдения свободных колебаний в конце пуска, т. е. после выполнения основной программы измерений в пуске. Как показывает практика, значение $A_{нп}$, найденное в конце пуска, более точно отражает положение нуль-пункта, существовавшее во время прецессионных колебаний ЧЭ. Определение нуль-пункта в начале пуска необходимо для предварительного определения его положения и исправления в случаях большого разрегулирования прибора.

Существует несколько способов определения широтного коэффициента c гиротеодолита. Однако в практике наибольшее распространение получила методика определения величины c из специальных таблиц по измеренному периоду $T_{св}$ свободных колебаний ЧЭ и широте φ места наблюдений. На основании формул (III.3.26) и (III.3.25) для расчета таких таблиц может служить выражение

$$c = -\frac{\varkappa}{T_{св}^2 \cos\varphi},$$

в котором постоянный для данной модели гиротеодолита коэффициент

$$\varkappa = \frac{4\pi^2 J\mu}{H\omega_З}.$$

Обычно таблицы коэффициента c приводятся в заводском описании или в паспорте гиротеодолита.

Комплекс наблюдений в пуске, выполненном по полной программе способа точек реверсий, включает:

предварительный разгон и торможение гиромотора, необходимые для прогрева ЧЭ гиротеодолита перед началом измерений;

предварительное определение положения нуль-пункта (по трем точкам реверсий свободных колебаний ЧЭ) и его исправление;

разгон гиромотора и геодезическую привязку (одним или установленным числом приемов) направлений, азимуты которых измеряются;

наблюдение четырех последовательных точек реверсий прецессионных колебаний ЧЭ (в случае пропуска одной из них наблюдается пятая реверсия);

торможение гиромотора и повторную геодезическую привязку направлений, ориентируемых на пункте;

определение при установке алидады примерно на отсчет $N_{ср}$ положения нуль-пункта $A_{нп}$ по четырем последовательным точкам реверсий свободных колебаний ЧЭ.

При наблюдениях с гиротеодолитами необходимо соблюдать некоторые правила, способствующие достижению качественных результатов измерений в пуске. Основными из них являются:

прочная установка на грунте штатива и надежное закрепление его ножек;

надежная защита штатива и установленного на нем прибора от ветра и солнечных лучей;

надежность и чистота контактов в разъемах соединительных кабелей, блока питания и гиротеодолита; чистота клемм аккумулятора, его своевременная и качественная подзарядка.

Кроме этого, качество измерений в пуске при работе с гиротеодолитами, имеющими ручную систему слежения, существенно зависит от точности слежения и компенсации влияния закручивания торсионной ленты и токоподводов, которое происходит в таких приборах во время отсчета точек реверсий.

Обычно вычисляют геодезические азимуты $A_р$ или дирекционные углы α ориентируемых направлений. Реже останавливаются на определении астрономических азимутов A. Вычисления производят по формулам:

$$\begin{aligned} A &= a + \Delta; \\ A_р &= a + \Delta + \delta A; \\ \alpha &= a + \Delta + \delta A - \gamma + \delta, \end{aligned} \qquad \text{(III.3.21)}$$

Поправку Лапласа δA для определяемого пункта, как и для пункта эталонирования гиротеодолита, обычно находят по имеющимся на район работ схемам уклонений отвеса и поправок в астрономические азимуты для перехода к геодезическим азимутам, а для вычисления сближения меридианов γ и редукции δ необходимо знать приближенные координаты пункта наблюдений. Допустимые величины ошибок определения поправки δA, сближения γ и редукции δ должны быть согласованы с заданной точностью ориентирования.

Подставим в выражение дирекционного угла α значение приборной поправки Δ в соответствии с последним равенством (III.3.24) и получим

$$\alpha = \alpha_0 + (a - a_0) + (\delta A - \delta A_0) + (\gamma_0 - \gamma) + (\delta - \delta_0).$$

Полученная формула раскрывает компенсационную роль приборной поправки, возможность ослабления ошибок в конечных результатах гироскопического ориентирования при равенстве режимов работы гиротеодолита на определяемых пунктах и пункте эталонирования. Поэтому, чтобы добиться некоторой компенсации погрешностей в результатах измерений, связанных с условиями наблюдений на пункте, целесообразно эталонирование гиротеодолита удлинить по времени, охватив им 1—2 суток, дневное и ночное время. С этой же целью желательно между пусками изменять начальную ориентировку ЧЭ и установку горизонтального круга, заново нивелировать корпус прибора. Главное же будет заключаться в принятии мер, обеспечивающих примерное равенство и постоянство температурных режимов работы гиротеодолита на определяемых и исходном пунктах. Для этого, в частности, желательно выдерживать при эталонировании гиротеодолита примерно такие же интервалы времени между пусками, какие будут иметь место при ориентировании направлений, осуществлять при эталонировании гиротеодолита подогрев воздуха в наблюдательной палатке в холодное время года, если ориентирование направлений будет происходить в помещениях.

III.3.4. Методика ориентирования направлений

Требования к организации работ и точности измерений

В целях повышения надежности, достоверности и точности получения азимутов принятые в геодезическом производстве способы гироскопического ориентирования направлений предусматривают две основные формы контроля:

ориентирование направлений комплектом из двух (трех) гиротеодолитов;

ежедневное ориентирование контрольного направления и ежемесячное контрольное эталонирование гиротеодолита по сокращенной программе при ориентировании направлений одиночными гиротеодолитами.

В зависимости от требуемой точности определения азимутов и типа гиротеодолитов в табл. 55 приведены рекомендации по составу гиротеодолитного комплекта и числу пусков (приемов измерений).

В процессе работ контроль качества измерений осуществляется в соответствии с допусками, помещенными в табл. 54 и 56.

В соответствии с данными табл. 55 ориентирование направлений одиночными гиротеодолитами разрешается производить при точности 10″ и грубее. В этом случае контроль качества измерений достигается:

ТАБЛИЦА 55

Тип гиротеодолита	Состав комплекта и число пусков (в скобках) при заданной точности					
	3″	5″	10″	15″	30″	60″
Ги-Б3	2 (3) 3 (2)	2 (1)	1 (1)	—	—	—
Ги-Б2	—	2 (3) 3 (2)	2 (2)	2 (1) 1 (2)	1 (1)	1 (1)
Ги-Б1	—	—	2 (2)	2 (1)	1 (1)	1 (1)

соблюдением допусков, приведенных в табл. 54 и 56; ежедневным ориентированием контрольного направления, азимут которого известен из астрономо-геодезических работ или измерен другим гиротеодолитом с точностью не ниже заданной точности ориентирования.

При большом объеме работ следует ежемесячно производить контрольное эталонирование гиротеодолита по сокращенной программе (4 пуска) при соблюдении допусков, приведенных в табл. 54.

Ориентировать направления с точностью 5″ и выше можно лишь гиротеодолитным комплектом, составленным из 2—3 специально отобранных однотипных гиротеодолитов. Применение приборов в комплекте позволяет быстро выявить промахи в измерениях на пункте, ослабить влияние на конечные результаты ориентирования не только ошибок измерений в пусках, но и погрешностей, связанных с возможным изменением приборных поправок на момент наблюдений и ошибками их определения.

ТАБЛИЦА 56

Виды контроля измерений	Допуски на результаты измерений при заданной точности					
	3″	5″	10″	15″	30″	60″
Расхождение геодезической привязки в пуске, угл. с	8	8	10	15	30	60
Расхождения между значениями равновесия N_1 и N_1 в пуске	Допуск берется из табл. 54 в соответствии с типом гиротеодолита					
Расхождения между азимутами, полученными в разных пусках одного гиротеодолита, угл. с	20	25	40	50	90	90
Расхождения между азимутами полученными различными гиротеодолитами, угл. с:						
из одного пуска	—	25	40	50	100	100
из двух и трех пусков	15	20	30	40	80	80

Особенности определения астрономических азимутов в зависимости от заданной точности

Для определения азимутов со средней квадратической ошибкой 3″ применяются гиротеодолитные комплекты, составленные из двух или трех гиротеодолитов Ги-Б3, при этом в комплект включаются гиротеодолиты, у которых:

средняя квадратическая ошибка μ_Δ измерения азимута одним пуском по результатам 3—4 последних эталонирований не превышает 5″, а значение приборной поправки сохраняется в пределах 8″;

значения нуль-пункта в пуске различаются не более чем на три деления шкалы автоколлиматора;

стабильно выдерживаются все допуски при поверках.

Программа наблюдений на пункте ориентирования направлений помимо измерений в пусках (см. табл. 56) должна предусматривать дополнительное измерение горизонтальных углов 12 приемами и вертикальных углов одним приемом. Значения углов наклона необходимы для вычисления поправок в измеренные направления за уклонение отвесной линии ΔM и за наклон вертикальной оси вращения угломерной части $\Delta_н$. При этом поправки ΔM и $\Delta_н$ вычисляются и учитываются, если уклонение отвеса на пункте более 10″, а углы наклона направлений более 2°.

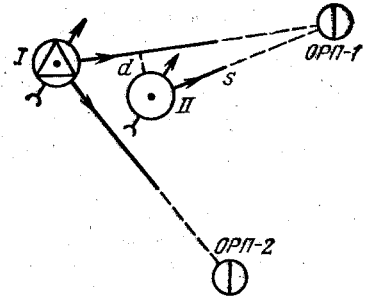
Полученные уравненные (средние) значения астрономических азимутов ориентируемых направлений исправляются поправкой за приведение наблюдений к среднему полюсу.

Определение астрономических азимутов со средней квадратической ошибкой 5″ выполняется гиротеодолитными комплектами, составленными из двух или трех гиротеодолитов Ги-Б3, Ги-Б2. При этом гиротеолиты Ги-Б2 допускаются к работам такой точности, если по результатам 3—4 последних эталонирований прибора по полной программе ошибка μ_Δ не превышает 10″, а значение приборной поправки сохраняется в пределах 20″, колебания нуль-пункта в пуске не превышает трех делений шкалы автоколлиматора, стабильно выдерживаются все допуски при поверках. Программа наблюдений на пункте должна предусматривать дополнительное измерение горизонтальных углов 9 приемами.

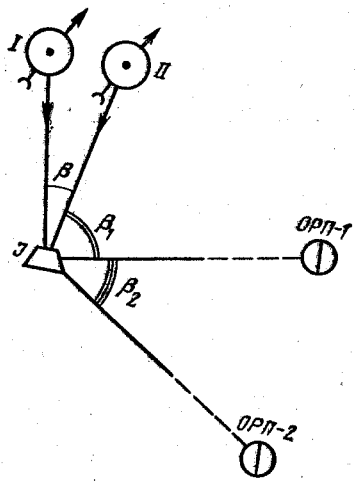
При точности измерения азимутов 10″ разрешается (см. табл. 55) применение гиротеодолитных комплектов из двух гиротеодолитов Ги-Б1, но их ошибки μ_Δ не должны превышать 15″, а значения приборной поправки должны сохраняться в течение 3—4 последних эталонирований в пределах 30″, колебания величины нуль-пункта в пуске не должно быть более четырех делений шкалы автоколлиматора. Горизонтальные углы между ориентируемыми направлениями на пункте дополнительно измеряются 4 приемами. Вычисление угловых величин в журналах и ведомостях при точности гироскопического ориентирования 3, 5 и 10″ выполняют до 0,1″. Определение астрономических азимутов со средними квадратическими ошибками 15, 30 и 60″ согласно данным табл. 55 производится, как правило, одиночными гиротеодолитами Ги-Б2, Ги-Б1. Вычисления выполняются с точностью до 1″.

Схемы ориентирования направлений гиротеодолитными комплектами

Ориентирование по створу. Это одна из самых простых и экономичных схем ориентирования. При работе по ней точку установки второго гиротеодолита намечают по створу одного из направлений,



Р и с. 99. Схема ориентирования по створу



Р и с. 100. Схема ориентирования по обратным направлениям

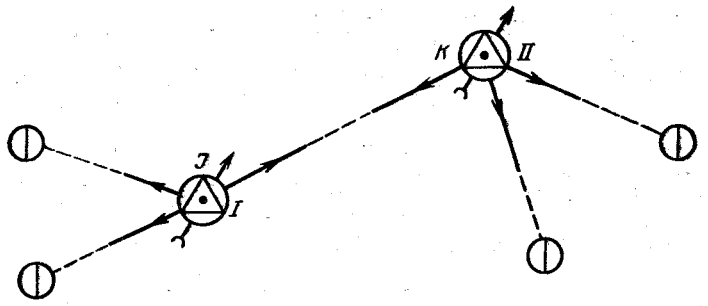
подлежащих ориентированию, выбирая ее в 2—3 м впереди или сзади от центра пункта, над которым развертывают первый гиротеодолит комплекта (рис. 99).

Остаточная нестворность d второго гиротеодолита учитывается поправкой c (угл. с), которая вводится в измеренный этим гиротеодолитом азимут створного направления и вычисляется по формуле

$$c = 0{,}2\,\frac{d}{s},$$

где d — отступление по перпендикуляру второго прибора от створного направления (определяется по отсчетам линейки, установленной горизонтально у визирной вешки гиротеодолита), мм; s — приближенная длина створного направления, км.

Знак поправки будет положительным, если второй гиротеодолит комплекта находится справа по ходу створного направления, и отрицательным — если слева.



Р и с. 101. Схема ориентирования по связующим направлениям

Невязку w ориентирования находят как разность дирекционных углов или геодезических азимутов створного направления, которые вычисляют по формулам (III.3.27) в журналах гироскопического ориентирования по результатам измерения азимута каждым гиротеодолитом комплекта.

Ориентирование по обратным направлениям. Эта схема применяется в тех случаях, когда невозможно установить один из гиротеодолитов комплекта непосредственно над центром пункта. В этом случае приборы комплекта устанавливают рядом друг с другом (рис. 100) на удалении 150—200 м от центра пункта, над которым выставляется обычный теодолит с визирной вешкой. Одновременно с измерением гиротеодолитами азимутов направлений на этот теодолит им измеряют установленным числом приемов углы между направлениями на визирные вешки гиротеодолитов и конечные пункты ориентируемых направлений.

Невязку ориентирования вычисляют с учетом измеренного угла β. Для получения прямых азимутов A_{i1} и A_{i2} учитывают сближение $\delta\gamma_{ij}$ меридианов, проходящих через центр пункта J и точку установки гиротеодолита, имеющего в комплекте номер «j», для чего пользуются формулами:

$$A_{i1} = A_{1i} \pm 180^\circ - \delta\gamma_{i1}; \qquad A_{i2} = A_{2i} \pm 180^\circ - \delta\gamma_{i2},$$

где A_{1i} и A_{2i} — обратные азимуты, вычисленные в журналах ориентирования.

Сближение меридианов между точками i и j в секундах дуги вычисляют по формуле

$$\delta\gamma_{ij} = \gamma_i - \gamma_j = 0{,}0324D \sin A_{ij} \operatorname{tg} B,$$

где D — расстояние между точками i и j, м; B — геодезическая широта пункта J (берется с карты с точностью до $10''$).

При существующем соотношении точностей угловых и гироскопических измерений получаемые невязки целиком относят к погрешностям гироскопических определений. Когда длины ориентируемых на пункте направлений превышают 1—2 км, их дирекционные углы вычисляют по углам β_1 и β_2 (см. рис. 100), которые предварительно редуцируют на плоскость.

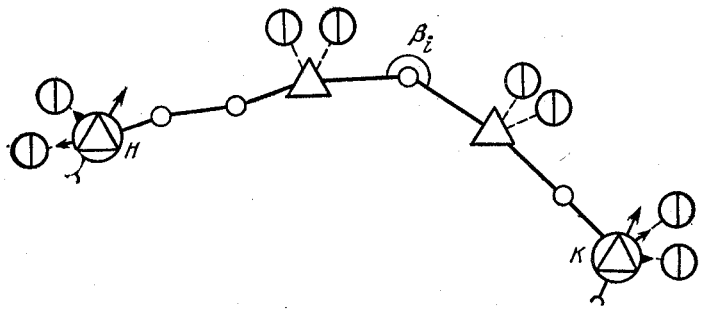


Рис. 102. Схема ориентирования комбинаций угловых и гироскопических измерений

Одним из вариантов рассмотренной схемы будет случай, когда гиротеодолиты комплекта непосредственно устанавливаются на концах ориентируемых направлений, что характерно для работ, проводимых с целью контроля ориентирных направлений или их переопределения на пунктах ГГС. Для обеспечения четкого взаимодействия между наблюдателями комплекта гиротеодолитная группа должна располагать средствами радиосвязи.

Ориентирование по связующим направлениям. При ориентировании направлений по этой схеме гиротеодолиты комплекта устанавливаются над центрами пунктов, имеющих между собой прямую видимость с земли по связующим направлениям (рис. 101). Эту схему выгодно применять в тех случаях, когда одновременно требуется ориентировать направления на ряде соседних пунктов. Для оперативной обработки результатов измерений и установления четкого взаимодействия гиротеодолитные комплекты желательно оснастить средствами радиосвязи.

Обработку результатов измерений, как обычно, начинают в журналах гироскопического ориентирования, где вычисляют дирекционные углы или азимуты направлений, по которым производилось визирование каждым гиротеодолитом комплекта. После того как для каждого гиротеодолита будут получены средние значения дирекционных углов или азимутов всех измеренных на пункте направлений, подсчитывают невязку ориентирования w по связующему направлению.

Иногда для ускорения работы и повышения точности ориентирования направлений к оперативному выполнению задания в районе определений привлекают одновременно не две, а три гиротеодолитные группы. Приведем для этих случаев рабочие формулы, позволяющие вычислить поправки v_j в результаты измерений каждым гиротеодолитом и оценить точность ориентирования направлений.

При трех гиротеодолитах, установленных на трех пунктах, связанных взаимными наблюдениями, и при условии, что невязки w_1 и w_2 вычисляются в последовательности соответственно «первый минус второй» и «второй минус третий»:

$$v_1 = -\frac{1}{3}(2w_1 + w_2);\quad v_2 = \frac{1}{3}(w_1 - w_2);\quad v_3 = \frac{1}{3}(w_1 + 2w_2).$$

Для оценки точности будут служить следующие формулы:

$$M_{\text{гт}} = \sqrt{\frac{1}{3}(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2)};$$

$$M_{\text{гтк}} = \frac{M_{\text{гт}}}{\sqrt{3}}.$$

Первая позволяет оценить точность ориентирования одиночным гиротеодолитом, вторая — комплектом.

Приведенные формулы для вычисления поправок и оценки точности ориентирования направлений комплектом из трех гиротеодолитов применимы не только к схеме ориентирования по связующим направлениям, но также к схемам ориентирования по створу и обратным направлениям. Однако для их применения невязки ориентирования w_1 и w_2 всегда должны вычисляться в последовательности «первый минус второй» и «второй минус третий» соответственно.

В тех случаях, когда связующие направления образуют замкнутую фигуру — треугольник невязки w_1 и w_2 должны вычисляться по результатам ориентирования, предварительно исправленным поправкой v_β за невязку углов в треугольнике.

Ориентирование комбинацией угловых и гироскопических измерений. К этой схеме, основанной на сочетании угловых и гироскопических измерений, прибегают в тех случаях, когда необходимо ориентировать направления на большом числе пунктов. С этой целью эти пункты связывают между собой угловыми ходами, а иногда и их системами с узловыми точками и на части пунктов азимуты или дирекционные углы связующих направлений получают из гироскопических измерений. При надлежащей организации работ и взаимодействии между командами, занимающимися проложением угловых ходов и гироскопическими наблюдениями, такая схема работ позволяет сравнительно быстро обеспечить нужный район исходными ориентирными направлениями.

В практике работ наибольшее распространение получил случай, когда для определения ориентирных направлений на ряде пунктов прокладывается одиночный угловой ход, связывающий эти пункты. На конечных пунктах H и K (рис. 102) этого хода дирекционные углы α_H и α_K примычных направлений получают из гироскопических измерений, выполненных различными гиротеодолитами комплекта.

При n углах поворота в ходе поправки в результатах угловых и гироскопических измерений связаны одним условным уравнением

$$v_{\alpha_H} - v_{\alpha_K} + nv_\beta + w = 0,$$

где невязка w

$$w = \alpha_H + \sum_1^n \beta_i - (n+1)\,180^\circ - \alpha_K.$$

Если дирекционные углы примычных направлений на конечных пунктах хода найдены по результатам гироскопических измерений со средней квадратической ошибкой m_α, а углы поворота измерялись с ошибкой m_β, то веса угловых и гироскопических измерений будут определяться соотношениями:

$$P_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2};\qquad P_\alpha = \frac{\mu^2}{m_\alpha^2}$$

и, полагая ошибку μ единицы веса равной m_α, окончательно получим

$$P_\alpha = 1; \qquad P_\beta = \frac{m_\alpha^2}{m_\beta^2} = \lambda.$$

Теперь, применяя положения теории уравнительных вычислений по способу коррелат, получим формулы для вычисления поправок в результаты измерений:

$$v_{\alpha_H} = -v_{\alpha_K} = -\frac{\lambda}{2\lambda + n} w; \qquad v_\beta = -\frac{1}{2\lambda + n} w.$$

Невязку ориентирования w необходимо вычислять с учетом редуцирования измеренных углов поворота на плоскость проекции Гаусса.

В зависимости от того, известны ли приближенные значения абсцисс поворотных точек или длины сторон хода, редукционную поправку δ в измеренное направление можно получать по формулам, известными из курсов геодезии:

$$\delta_{i,\ i+1} = 0{,}00253 y_m (x_i - x_{i+1});$$

$$\delta_{i,\ i+1} = 0{,}00253 y_m s \cos \alpha_{i,\ i+1},$$

где y_m — отсчитанная от осевого меридиана зоны ордината средней точки хода, км; $(x_i - x_{i+1})$, s — разность абсцисс конечных точек редуцируемого направления и его длина, км.

Поправка в измеренный левый по ходу угол поворота β_i

$$\delta_{\beta_i} = \delta_{i-1,\ i} + \delta_{i,\ i+1}.$$

Допустимая величина невязки подсчитывается по формуле

$$w_{доп} = 2{,}5 \sqrt{2m_\alpha^2 + nm_\beta^2},$$

а для установления допустимого числа n углов поворота в ходе можно воспользоваться выражением

$$m = m_\alpha \sqrt{\frac{2\lambda + n}{4\lambda}},$$

в котором m_α — точность гироскопического ориентирования исходных азимутов; m — заданная точность ориентирования направлений.

Метод гироскопического ориентирования позволяет эффективно решать различные задачи геодезической практики, которые связаны с определением азимутов или дирекционных углов отдельных направлений и их систем. К числу таких задач можно отнести ориентирование геодезических сетей и сетей съемочного обоснования, развиваемых в местной системе координат; определение и контроль ориентирных направлений на геодезических пунктах; определение направления меридиана и исходных ориентирных направлений в закрытых сооружениях и т. д.

Вместе с этим внедрение метода гироскопического ориентирования в практику геодезических работ позволяет по-новому подходить к проблемам определения планового положения пунктов и передачи координат. Возможности, которыми обладает этот метод для частичной или полной замены угловых измерений гироскопическим определением азимутов и дирекционных углов сторон сети, открывают широкие перспективы для модернизации существующих методов развития плановых сетей и передачи координат, разработки на их основе новых, более надежных и экономичных, а в некоторых случаях и более точных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большаков В. Д.* Теория ошибок наблюдений. М., Недра, 1983.
2. *Большаков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 1977.
3. *Воронков Н. Н., Кутырев В. В., Ашимов Н. М.* Гироскопическое ориентирование. М., Недра, 1980.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная ошибка 334
Абсолютное уклонение отвеса 171
Азимут Лапласа 225
Азимутальные способы астрономических определений 227
Алгоритм Гаусса 65
Алгоритмические языки 136
Аномалия Буге 175
— высоты 171
— силы тяжести 173
— Фая 176
Аппроксимация функций 105
Асимметрия 19
Астрономические теодолиты 228
Астрономия геодезическая 226
Астрономо-геодезическая сеть 336
Астрономо-геодезическое нивелирование 338
— уклонение отвеса 234

Биноминальное распределение вероятностей 12
Боковая рефракция 386

Вероятная ошибка 33
Вероятность событий 5
Вес измерения 50
— функций 51
Виды условных уравнений 86
Возмущающий потенциал Земли 169
Возмущенное движение ИСЗ 288
Время существования спутника 297
Выравнивание статистических рядов 29
Высокоточные угломерные приборы 370

Геодезическая астрономия 226
— высота 171
Геодезические искусственные спутники Земли 312
— сигналы 369
— центры 370
Геоид 153
Геоцентрическая гравиметрическая постоянная 164
Гироскоп 413
Гироскопическое ориентирование 413, 433
Гиротеодолиты 421
Гистограмма 37
Государственная геодезическая сеть 334
Гравиметрическая съемка 176
Гравиметрические карты 176
Гравиметрическое уклонение отвесной линии 189
Гравиметрия 154
Гравиметры 195

Гравитационное поле Земли 154
Градиенты силы тяжести 157

Динамическая высота 171
Динамическое равновесие гироскопа 415
Дисперсия 18
Дифференциальные формулы второго рода 224
— — первого рода 223
Доверительные интервалы 47

Закон нормального распределения 34
Законы Кеплера 283
— распределения вероятностей 12
Земной эллипсоид 203
Зенитальные способы астрономических определений 227, 233
Зональные гармоники 293

Интеграл вероятностей 22
Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса 192
Исследование теодолитов 375
Источники ошибок измерений 381

Камеры фотографирования ИСЗ 305
Квазигеоид 172
Клавишные вычислительные машины 122
Коллимационная ошибка 382
Координаты астрономические 226
— географические 226
— геодезические 204, 275
— геоцентрические звездные 274
— квазигеоцентрические земные 275
— плоские прямоугольные 216
— топоцентрические звездные 275
— орбитальные 278
Коррелатный способ уравнивания 84
Коррелированные измерения 42
Корреляция 26
Космическая триангуляция 314
Космические геодезические сети 314
Коэффициент корреляции 26, 38
— регрессии 26, 39
Кривая ошибок Гаусса 32
Критерий Пирсона 37
— Фишера 38
Кручение сигналов 397

Лазерная локация Луны 329
Лазерные наблюдения ИСЗ 310
Линейное интерполирование аномалий 177

Математическое обеспечение ЭВМ 135
— ожидание 15
Математические таблицы 115
Матричные формулы уравнивания 75, 90
Маятниковый гироскоп 421
Метод наименьших квадратов 61
Методика измерения азимута гиротеодолитом 428

Микрокалькуляторы 116
Многогрупповой способ уравнивания 95
Моменты движения гироскопа 415
— теории вероятностей 17

Невозмущенное движение ИСЗ 232
Некоррелированные измерения 38
Неравноточные измерения 50
Нормальная высота 171
— Земля 163
— сила тяжести 165
— формула геодезической референц-системы 166
Нормальное гравитационное поле Земли 163
Нормальные сечения 206
— уравнения 65, 85
— потенциал Земли 163

Обратная геодезическая задача 211
Общий земной эллипсоид 169
Определение фигуры Земли 180
— силы тяжести 195, 198
Орбиты ИСЗ 299
Ортометрическая высота 162
Основное уравнение орбитального метода 273
Относительная ошибка 34
— частота событий 6
Относительное уравнение отвеса 171
Оценка точности засечек 360
— — полигонометрии 362
— — по разности двойных измерений 48, 55
— — триангуляции 341
— — трилатерации 352
— — угловых измерений 401
— — уравненных величин 71
— — функций 73, 89
— — элементов сплошной сети 350, 355
Ошибки измерений абсолютные 33
— — вероятные 33
— — относительные 33
— — систематические 30
— — случайные 30
— — средние 33
— — средние квадратические 33

Параметрические уравнения связи 63
Параметрический способ уравнивания 61
Параметры сжатия Земли 165
Пассажный инструмент 229
Перевод времени 231
Перевычисление координат в смежных зонах 221
Период колебания маятника 195
Плотность распределения 14
Поверки теодолитов 372
Поперечный сдвиг ряда триангуляции 347
Потенциал силы тяжести 156
Правила действий с приближенными числами 111
Преобразование систем координат 278

Прецессия гироскопа 416
Прием радиосигналов времени 230
Приближенные способы астрономических определений 263
Проверка правдоподобия гипотез 27
Программирование для ЭВМ 134
Программно-управляемые вычислительные машины 124
Продольный сдвиг ряда триангуляции 346
Проекция Гаусса — Крюгера 216
— Ламберта 222
— Руссиля 222
Прямая геодезическая задача 209, 214

Равномерный закон распределения 15
Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ) 328
Радиоэлектронные наблюдения ИСЗ 309
Распределение нормальное 34
— равномерное 15
— Стьюдента 41
Редукционная задача проекции Гаусса — Крюгера 219
Редукция астрономических наблюдений 240, 261
Референц-эллипсоид 169, 203
Рефракция боковая 386

Свойства случайных ошибок 31
Системы высот 162, 171
Случайная ошибка 30
Случайные события 4
Способ аддитаментов 208
— во всех комбинациях 402
— круговых приемов 399
— Крюгера—Урмаева 95
— неполных приемов 404
— определения азимута по Полярной 257
— — долготы Цингера 250
— — широты Певцова 254
— — — Струве 243
— — — Талькотта 246
— полигонов Попова 94
— узлов Попова 81
— условий с дополнительными неизвестными 102
Спутниковая аберрация 309
— альтиметрия 331
— градиентометрия 332
— рефракция 309
Среднее квадратическое отклонение 24
Статистические ряды 27
— связи 25
Струнный гравиметр 195
Сфероидическая геодезия 202

Теодолиты астрономические 228
— высокоточные оптические 370
Теорема Бернулли 6
— Лапласа 21
— Лежандра 208
— Ляпунова 20
— Стокса 163

Теоремы теории вероятностей 6
Теория вероятностей 4
— Молоденского 181, 187
— ошибок измерений 30
— фигуры Земли 154
Топографические аномалии 174
Триангуляция 336
Трилатерация 334

Уклонение отвесной линии 170, 224
Уравнение движения гироскопа 318
— Кеплера 286
— Лагранжа 208
— Лапласа 225
— регрессии 39
Уравнивание зависимых измерений 104
— коррелатным способом 84
— параметрическим способом 61, 100
Уровенная поверхность 159, 203
Ускорение силы тяжести 154
Условия видимости ИСЗ 302
Условные уравнения 84

Фазы визирных целей 397
Фотографические наблюдения ИСЗ 305
Фундаментальные геодезические постоянные 165
— уравнения космической геодезии 271
Функция нормального распределения 22

Хронометры 229

Центр распределения 15
Центральная предельная теорема 20
Центральный момент 17
Центры геодезических знаков 370
Цифровые вычислительные машины 110

Частота относительная 6
Числовые характеристики статистического распределения 15
Чувствительный элемент гиротеодолита 413

Эксцесс 19
Электронные вычислительные машины 129
Эллипсоид Красовского 203
Эталонирование гиротеодолитов 428
— гравиметров 201
Элементы приведения 405
Эфемериды ИСЗ 298

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

РАЗДЕЛ I

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

I.1. Теория ошибок измерений (*В. Д. Большаков*) 4

А. Элементы теории вероятностей и математической статистики 4

I.1.1. Общие понятия 4
I.1.2. Схема случаев. Непосредственный подсчет вероятностей 5
I.1.3. Относительная частота и вероятность 6
I.1.4. Теоремы теории вероятностей 6
I.1.5. Многократные (повторные) испытания. Вероятнейшее число появления события 9
I.1.6. Понятие о случайной величине и законе распределения вероятностей 12
I.1.7. Числовые характеристики законов распределения . . . 15
I.1.8. Нормальный закон распределения. Интеграл вероятностей 20
I.1.9. Среднее и вероятное отклонение. Их связь со средним квадратическим отклонением при нормальном законе распределения 24
I.1.10. Понятие о статистических связях. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии 25
I.1.11. Общие понятия математической статистики. 26
I.1.12. Числовые характеристики статистического распределения 27
I.1.13. Определение законов распределения на основе опытных данных (выравнивание статистических рядов) 29

Б. Теория ошибок измерений 30

I.1.14. Общие понятия 30
I.1.15. Кривая ошибок (кривая Гаусса) и ее свойства 32
I.1.16. Критерии, применяемые при оценке точности измерений 33
I.1.17. Исследование рядов ошибок на нормальное распределение 34
I.1.18. Определение коэффициента корреляции и уравнения регрессии на основе опытных данных 38
I.1.19. Оценка точности функции величин, полученных в результате коррелированных и некоррелированных измерений 42
I.1.20. Обработка ряда равноточных измерений одной величины 45
I.1.21. Понятие о доверительных интервалах 47
I.1.22. Оценка точности по разностям двойных равноточных измерений 48
I.1.23. Неравноточные измерения. Веса измерений 50
I.1.24. Вес функции коррелированных и некоррелированных аргументов 51
I.1.25. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины 52

I.1.26. Оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений . . . 55

I.2. Метод наименьших квадратов (*В. Д. Большаков*) . . . 61

А. Параметрический способ уравнивания . . . 61

I.2.1. Общие понятия о методе наименьших квадратов . . . 61
I.2.2. Составление уравнений поправок и нормальных уравнений . . . 62
I.2.3. Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса 64
I.2.4. Контроль составления и решения нормальных уравнений 65
I.2.5. Пример уравнивания равноточных измерений параметрическим способом . . . 69
I.2.6. Оценка точности уравненных величин . . . 71
I.2.7. Оценка точности функций уравненных величин . . . 73
I.2.8. Матричные формулы уравнивания параметрическим способом . . . 75
I.2.9. Решение системы нормальных уравнений с помощью определителей (детерминантов) . . . 76
I.2.10. Пример уравнивания нивелирной сети параметрическим способом . . . 79
I.2.11. Способ узлов проф. В. В. Попова для составления нормальных уравнений . . . 81
I.2.12. О построении доверительных интервалов . . . 83
Б. Коррелатный способ уравнивания . . . 84
I.2.13. Постановка задачи. Условные и нормальные уравнения коррелат . . . 84
I.2.14. Контроль составления и решения системы нормальных уравнений коррелат . . . 85
I.2.15. Некоторые виды условных уравнений . . . 86
I.2.16. Оценка точности функций при коррелатном уравнивании . . . 89
I.2.17. Матричные формулы уравнивания коррелатным способом . . . 90
I.2.18. Определение допустимости невязок условных уравнений 91
I.2.19. Пример уравнивания нивелирной сети коррелатным способом . . . 91
I.2.20. Способ полигонов В. В. Попова для составления нормальных уравнений коррелат . . . 94
I.2.21. Способ Крюгера—Урмаева . . . 95
В. Дополнительные вопросы теории математической обработки геодезических измерений . . . 100
I.2.22. Уравнивание параметрическим способом с условиями (избыточными неизвестными) . . . 100
I.2.23. Способ условий с дополнительными неизвестными 102
I.2.24. Уравнивание при большом числе неизвестных . . . 103
I.2.25. Понятие об уравнивании зависимых измерений . . . 104
I.2.26. Применение метода наименьших квадратов при аппроксимации функций . . . 105
I.2.27. Решение нормальных уравнений методом приближений 108
Список литературы . . . 110

I.3. Вычислительная техника в геодезии (*Е. Г. Ларченко, В. В. Голубев*) . . . 110

А. Общие сведения о применении вычислительной техники 110

I.3.1. Классификация цифровых вычислительных машин . . . 110

I.3.2. Приближенные числа и правила действий с ними . . . 111
I.3.3. Применение простейших вычислительных средств . . . 114

Б. Микрокалькуляторы и настольные электронные клавишные вычислительные машины . . . 116

I.3.4. Общие сведения о микрокалькуляторах . . . 116
I.3.5. Микрокалькулятор «Электроника МК-56» . . . 116
I.3.6. Общие сведения о настольных ЭКВМ . . . 122
I.3.7. Программно-управляемые электронные клавишные вычислительные машины (ПКВМ) . . . 124

В. Универсальные цифровые электронные вычислительные машины (ЭВМ) . . . 129

I.3.8. Структурная схема и принципы работы ЭВМ . . . 129
I.3.9. Системы счисления, применяемые в ЭВМ . . . 130
I.3.10. Операции с числами в ЭВМ . . . 132
I.3.11. Характеристика современных ЭВМ . . . 133
Г. Программирование для ЭВМ . . . 134
I.3.12. Этапы решения задач на ЭВМ . . . 134
I.3.13. Адресность ЭВМ . . . 134
I.3.14. Математическое обеспечение ЭВМ . . . 135
I.3.15. Общие сведения об алгоритмических языках . . . 136
I.3.16. Алгоритмический язык ФОРТРАН . . . 136
I.3.17. Алгоритмический язык АЛГОЛ . . . 142
I.3.18. Алгоритмический язык PL/1 . . . 145
I.3.19. Алгоритмический язык БЭЙСИК . . . 149
Список литературы . . . 153

РАЗДЕЛ II

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АСТРОНОМИЯ

II.1. Теория фигуры Земли и гравиметрии (*Б. П. Шимбирев*) 154

А. Гравитационное поле Земли . . . 154

II.1.1. Сила тяжести . . . 154
II.1.2. Потенциал силы тяжести . . . 156
II.1.3. Силовые линии, уровенные поверхности . . . 158
II.1.4. Вертикальный градиент силы тяжести . . . 160
II.1.5. Разность потенциалов. Ортометрическая высота . . . 160

Б. Нормальное гравитационное поле Земли . . . 163

II.1.6. Нормальный потенциал Земли, нормальная сила тяжести 163
II.1.7. Классификация параметров нормальной Земли. Фундаментальные геодезические постоянные . . . 164
II.1.8. Нормальная формула силы тяжести . . . 165
II.1.9. Соотношения между параметрами уровенного эллипсоида . . . 167
II.1.10. Вертикальный градиент нормальной силы тяжести. Кривизна силовой линии нормального поля . . . 168
II.1.11. Условия выбора уровенного эллипсоида в качестве нормальной Земли . . . 168

В. Величины, характеризующие отличие действительного поля Земли от нормального . . . 169

II.1.12. Возмущающий потенциал . . . 169
II.1.13. Уклонения отвеса . . . 170

II.1.14. Геодезическая и нормальная высоты. Аномалия высоты. Динамическая высота . . . 171
II.1.15. Квазигеоид . . . 172
II.1.16. Аномалии силы тяжести . . . 173
II.1.17. Точность построения гравиметрических карт . . . 176
II.1.18. Косвенная интерполяция аномалий . . . 178

Г. Определение фигуры Земли гравиметрическим методом 180

II.1.19. Постановка задачи . . . 180
II.1.20. Определение возмущающего потенциала Земли . . . 181
II.1.21. Формулы для вычисления высот квазигеоида и составляющих уклонений отвеса . . . 182

Д. Использование референц-эллипсоида в геодезии . . . 185

II.1.22. Определение геодезических координат относительно референц-эллипсоида . . . 185
II.1.23. Вычисление разностей нормальных высот . . . 186
II.1.24. Вычисление превышений квазигеоида . . . 186
II.1.25. Методика вычислений гравиметрических уклонений отвеса и высот квазигеоида . . . 189
II.1.26. Интерполирование астрономо-геодезических уклонений отвеса . . . 192

Е. Методы измерений силы тяжести . . . 194

II.1.27. Классификация методов . . . 194
II.1.28. Абсолютные определения силы тяжести . . . 195
II.1.29. Относительные определения силы тяжести . . . 198
Список литературы . . . 202

II.2. Сфероидическая геодезия (*Г. В. Багратуни*) . . . 202

II.2.1. Определения . . . 202
II.2.2. Земной эллипсоид . . . 203
II.2.3. Кривые на поверхности земного эллипсоида . . . 206
II.2.4. Решение малых сфероидических треугольников . . . 208
II.2.5. Вычисление геодезических координат пунктов государственной опорной сети . . . 209
II.2.6. Решение геодезических задач на большие расстояния . . 211
II.2.7. Решение геодезических задач в пространстве . . . 213
II.2.8. Плоские прямоугольные координаты в равноугольной проекции Гаусса—Крюгера . . . 216
II.2.9. Понятие о других проекциях . . . 221
II.2.10. Дифференциальные формулы . . . 223
II.2.11. Уклонение отвесной линии . . . 224
Список литературы . . . 225

II.3. Геодезическая астрономия (*С. С. Уралов*) . . . 226

А. Общие сведения из геодезической астрономии . . . 226

II.3.1. Задачи геодезической астрономии . . . 226
II.3.2. Принципы определения географических координат и азимута направления . . . 226

Б. Астрономические приборы . . . 228

II.3.3. Астрономические теодолиты . . . 228
II.3.4. Пассажный инструмент . . . 229
II.3.5. Хронометры. Хронографы . . . 229
II.3.6. Прием радиосигналов времени . . . 230

В. Зенитальные способы астрономических определений . . . 233

II.3.7. Особенности измерения зенитных расстояний светил 233
II.3.8. Сведения из общей теории зенитальных способов астрономических определений . . . 234
II.3.9. Редукция наблюдений в зенитальных способах . . . 240
II.3.10. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям пар звезд вблизи меридиана (способ Струве) . . . 243
II.3.11. Определение широты по измеренным малым разностям зенитных расстояний пар звезд в меридиане (способ Талькотта) 246
II.3.12. Определение долготы (времени) из наблюдений пар звезд на равных высотах (способ Цингера) . . . 250
II.3.13. Определение широты из наблюдений пар звезд на равных высотах (способ Певцова) . . . 254

Г. Способы определения азимута направления на земной предмет . . . 257

II.3,14. Определение астрономического азимута по измеренному горизонтальному углу между Полярной и земным предметом 257
II.3.15. Определение азимута из многократных наблюдений ярких звезд в вертикалах, близких к меридиану . . . 259
II.3.16. Редукции (методические поправки) азимутальных определений . . . 261

Д. Приближенные способы астрономических определений . . . 263

II.3.17. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям Полярной . . . 263
II.3.18. Определение широты по измеренным зенитным расстояниям Солнца . . . 263
II.3.19. Определение поправки часов и долготы пункта по измеренным зенитным расстояниям Солнца . . . 264
II.3.20. Определение приближенного астрономического азимута по часовому углу Полярной . . . 266
II.3.21. Определение азимута по часовому углу Солнца . . . 267
II.3.22. Определение азимута направления на земной предмет по измеренным зенитным расстояниям светил . . . 269
Список литературы . . . 270

II.4. Космическая геодезия (*И. И. Краснорылов, М. С. Урмаев*) . . . 270

А. Общие сведения . . . 270

II.4.1. Роль космической геодезии в системе геодезических работ . . . 270
II.4.2. Общие принципы использования ИСЗ в геодезических целях . . . 271
II.4.3. Системы координат . . . 273
II.4.4. Преобразования систем координат . . . 278
II.4.5. Системы измерения времени . . . 281

Б. Сведения из теории движения ИСЗ . . . 282

II.4.6. Невозмущенное движение ИСЗ . . . 282
II.4.7. Возмущенное движение ИСЗ . . . 288
II.4.8. Методы интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ . . . 290
II.4.9. Возмущения от гравитационного поля Земли . . . 292
II.4.10. Влияние притяжения Луны и Солнца . . . 295

II.4.11. Возмущения в движении ИСЗ вследствие тормозящего действия атмосферы . . . 296
II.4.12. Влияние светового давления . . . 297
II.4.13. Вычисление эфемериды ИСЗ . . . 298
II.4.14. Определение орбиты ИСЗ . . . 299
II.4.15. Движение спутника относительно вращающейся Земли 301
II.4.16. Определение условий видимости . . . 302

В. Наблюдения ИСЗ . . . 304

II.4.17. Методы наблюдений ИСЗ . . . 304
II.4.18. Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ . . . 305
II.4.19. Порядок вычисления топоцентрических координат ИСЗ по результатам фотографических наблюдений . . . 307
II.4.20. Влияние аберрации и рефракции . . . 309
II.4.21. Радиоэлектронные методы наблюдений ИСЗ . . . 309
II.4.22. Лазерные наблюдения ИСЗ . . . 310
II.4.23. Предварительная обработка радиоэлектронных и лазерных наблюдений . . . 311
II.4.24. Геодезические искусственные спутники Земли (ГИСЗ) и требования к параметрам их орбит . . . 312

Г. Геометрические задачи космической геодезии . . . 314

II.4.25. Космические геодезические сети . . . 314
II.4.26. Особенности построения космической триангуляции 314
II.4.27. Основные элементы космической триангуляции . . . 315
II.4.28. Виды условий, возникающих в сетях космической триангуляции . . . 317
II.4.29. Уравнивание космической триангуляции . . . 318
II.4.30. Установление масштаба в космической триангуляции 320
II.4.31. Орбитальный метод построения космических сетей . . . 320

Д. Динамические задачи космической геодезии . . . 321

II.4.32. Сущность динамического метода . . . 321
II.4.33. Определение зональных гармоник . . . 322
II.4.34. Определение тессеральных и секториальных гармоник 324
II.4.35. Формулы вычисления гравитационного потенциала для разных моделей Земли . . . 326
II.4.36. Связь между гармоническими коэффициентами потенциала и моментами инерции Земли . . . 327

Е. Новые методы космической геодезии . . . 328

II.4.37. Радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой (РСДБ) 328
II.4.38. Лазерная локация Луны . . . 329
II.4.39. Спутниковая альтиметрия . . . 331
II.4.40. Измерения по линии спутник—спутник . . . 332
II.4.41. Метод спутниковой градиентометрии . . . 332
Список литературы . . . 332

РАЗДЕЛ III

ОСНОВНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

III.1. Плановые опорные геодезические сети (*З. С. Хаимов*) 334

III.1.1. Государственная геодезическая сеть СССР. Общие сведения. Классификация сетей . . . 334
III.1.2. Предвычисление и оценка точности триангуляции 341
III.1.3. Предвычисление и оценка точности трилатерации . . . 352

III.1.4. Предвычисление и оценка точности полигонометрии . . 362
III.1.5. Проектирование и рекогносцировка государственных геодезических сетей . . . 365
III.1.6. Постройка геодезических знаков . . . 368
Список литературы . . .

III.2. Высокоточные угловые измерения и предварительные вычисления в триангуляции (*Н. В. Яковлев*) . . . 370

III.2.1. Высокоточные теодолиты . . . 370
III.2.2. Источники ошибок при высокоточных угловых измерениях . . . 381
III.2.3. Методы высокоточных угловых измерений . . . 398
III.2.4. Определение элементов приведения . . . 405
III.2.5. Предварительные вычисления в триангуляции . . . 406
Список литературы . . . 413

III.3. Гироскопическое ориентирование (*Н. Н. Воронков*) 413

III.3.1. Сведения из прикладной теории гироскопов . . . 413
III.3.2. Гиротеодолит с маятниковым гироскопом . . . 421
III.3.3. Методика измерения азимутов гиротеодолитами . . . 428
III.3.4. Методика ориентирования направлений . . . 435
Список литературы . . . 442
Предметный указатель . . . 444

СПРАВОЧНИК ГЕОДЕЗИСТА

(В двух книгах)

КНИГА 1

Редакторы издательства: *Т. А. Борисова, Т. Б. Шибанова*
Переплет художника *А. Е. Григорьева*
Художественный редактор *Г. Н. Юрчевская*
Технические редакторы: *Е. С. Сычева, А. В. Трофимов*
Корректор *В. В. Старенькая*
ИБ № 6190

Сдано в набор 07.01.85. Подписано в печать 22.07.85.
Т-14764. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага книжно-журнальная.
Гарнитура «Литературная». Печать высокая.
Усл. печ. л. 23,94. Усл. кр.-отт. 23,94. Уч.-изд. л. 32,73.
Тираж 30 000 экз. Заказ 48/479-15. Цена 2 руб.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,
103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградского объединения «Техническая книга»
им. Евгении Соколовой
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

в которой алгоритмы

$$[f_2 \cdot 1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1; \qquad (I.2.27)$$

$$[f_3 \cdot 2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1] \qquad (I.2.28)$$

. . . . . .

Ясно, что отдельные слагаемые формулы (I.2.26) могут быть получены в схеме решения Гаусса путем введения дополнительного столбца l, если условно считать, что

$$f_1 = [al],\ f_2 = [bl],\ \ldots,\ f_k = [gl],\ f_{k+1} = 0.$$

При этом указанные алгоритмы Гаусса, имеющие одну букву, раскрываются так же, как и алгоритмы $[bl \cdot 1]$, $[cl \cdot 2]$ и т. д.

Для контроля вычислений служит формула

$$-\frac{1}{P_F} = [f] - \frac{\Sigma_1 f_1}{[aa]} - \frac{[\Sigma_2 \cdot 1]\,[f_2 \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \ldots - \frac{[\Sigma_k (k-1)]\,[f_k (k-1)]}{[gg\,(k-1)]}, \qquad (I.2.29)$$

в которой вновь введены суммы

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= [as] - [al] + f_1; \\ \Sigma_2 &= [bs] - [bl] + f_2; \qquad (I.2.30) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma_k &= [gs] - [gl] + f_k. \end{aligned}$$

Для раскрытия алгоритмов с символом Σ следует условно считать, что

$$\Sigma_1 = [al],\ \Sigma_2 = [bl],\ \ldots,\ \Sigma_k = [gl].$$

Найдем обратный вес функции (I.2.25). Добавив в схему Гаусса два дополнительных столбца и выполнив преобразование их, получим (табл. 19).

По формулам (I.2.24) и (I.2.26) можно определять также обратные веса уравненных значений неизвестных. Например, если требуется определить обратный вес неизвестного x_3, то необходимо принять $f_1 = f_2 = f_4 = \ldots = f_k = 0$; $f_3 = 1$. Тогда функция примет вид

$$F = x_3.$$

ТАБЛИЦА 19

f	Σ	f	Σ
1,00 1,00 1,00	7,00 9,00 7,00	+0,33 −0,124	+4,33 −1,622
		+0,51 −0,254	+2,51 −1,249
+1,00 −0,333	+7,00 −2,333	$\frac{1}{P_F} = -0{,}50$	−0,51

Средняя квадратическая ошибка функции, как известно из теории ошибок, определяется формулой

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}.$$

I.2.8. Матричные формулы уравнивания параметрическим способом

Уравнения поправок (I.2.3) можно записать в виде

$$v = A\Delta x + L,$$

где векторы (матрицы-столбцы)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta x_k \end{pmatrix},$$

а матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \cdot \cdot \cdot g_1 \\ a_2 b_2 \cdot \cdot \cdot g_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n b_n \cdot \cdot \cdot g_n \end{pmatrix}.$$

Введя диагональную матрицу весов

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ & p_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p_n \end{pmatrix} = \{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\},$$

нормальные уравнения запишем в виде

$$R\Delta x + b = 0, \qquad (I.2.31)$$

где матрица

$$R = A^T P A = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] \cdot \cdot \cdot [pag] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [pag] & [pbg] \cdot \cdot \cdot [pgg] \end{bmatrix}, \qquad (I.2.31')$$

а вектор свободных членов

$$b = \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [pgl] \end{bmatrix}.$$

В случае равноточных измерений матрица $P=E$, где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ — единичная матрица.

Выражению (I.2.18) соответствует матричная форма

$$\Delta x = -R^{-1} b = -Qb, \qquad (I.2.32)$$