

ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

С ОСНОВАМИ
ТЕОРИИ
БЕЗОПАСНОСТЕЙ

В. Д. ВОЛЬШАКОВ

В. Д. БОЛЬШАКОВ

Т Е О Р И Я
ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ
С ОСНОВАМИ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Д о п у щ е н о
Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов геодезических вузов
и факультетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «Н Е Д Р А»
МОСКВА 1965

А Н Н О Т А Ц И Я

Учебное пособие предназначено для студентов оптико-механического факультета МИИГАиК и может быть рекомендовано студентам других специальностей геодезических вузов и инженерам-приборостроителям широкого профиля.

В пособии изложены основы математической обработки результатов наблюдений, получаемых при испытаниях различных оптико-механических и радиотехнических приборов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов оптико-механического факультета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, где с 1959 г. был введен курс «Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей».

Необходимость введения данного курса диктовалась задачами научно-технического и производственного характера, с которыми обычно сталкиваются специалисты-приборостроители при расчетах точности конструируемых инструментов, их лабораторных и полевых исследованиях, математической обработке и оценке результатов наблюдений на стадии испытания вновь созданных оптико-механических и оптико-электронных приборов.

Кроме того, на оптико-механическом факультете изучается ряд дисциплин («Приборостроение», «Фотограмметрические приборы и аэрофотоаппараты», «Геодезия» и др.), в которых широко используется излагаемый в данном курсе аппарат теории ошибок.

Весьма ограниченное время (70 часов лекций и практических занятий), отведенное в учебном плане для изучения курса, не могло не сказаться на сжатом изложении содержания книги.

Пособие может быть также использовано студентами вторых курсов других факультетов геодезических вузов при изучении дисциплины «Способ наименьших квадратов».

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность редактору д-ру техн. наук П. А. Гайдаеву за большую работу, выполненную им по редактированию книги, а также рецензентам кандидатам техн. наук Н. К. Скиданенко и Г. А. Бурмистрову за их ценные замечания, способствовавшие улучшению рукописи.

Автор отмечает значительную помощь, оказанную ему коллективом сотрудников кафедры геодезии МИИГАиК, при работе над рукописью.

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Г Л А В А I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Событие

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая количественные закономерности случайных явлений. Она базируется на ряде основных понятий и определений. В данной главе приведены те из них, без которых нельзя обойтись при последующем изложении вопросов, связанных с математической обработкой результатов наблюдений.

Для изучения разнообразных явлений реального мира в процессе научных исследований производятся многочисленные наблюдения, опыты и измерения.

Наблюдение является основой всех научных исследований; признаки наблюдаемого объекта, выявляемые при наблюдении, могут быть как качественными, так и количественными. Количественные признаки выявляются, как правило, путем измерения.

Измерение есть процесс сравнения определяемой физической величины с другой однородной ей величиной, значение которой известно. В результате измерения получают число, показывающее во сколько раз определяемая физическая величина больше или меньше величины, с которой ее сравнивали, и в конечном итоге больше или меньше величины, принятой за меру измерения.

Осуществление каждого отдельного такого наблюдения, опыта или измерения будем называть *с п ы т а н и е м*. Результат испытания назовем *с о б ы т и е м*. Понятие события является одним из основных понятий теории вероятностей.

П р и м е р ы. а) При подбрасывании монеты могут происходить события: «появление герба», «появление цифры».

б) При измерениях трех углов в плоском треугольнике сумма измеренных углов вследствие несовершенства органов чувств наблюдателя, наличия инструментальных ошибок, влияния внешних условий и других причин будет отличаться от 180° либо в сторону увеличения, либо — уменьшения, либо будет случайно совпадать с теоретической суммой. Это соответствует следующим событиям: «появление положительной ошибки (невязки) в сумме измеренных углов», «появление отрицательной ошибки в сумме измеренных углов», «отсутствие ошибки в сумме измеренных углов».

Совокупность условий, при которых производится данное испытание, называют комплексом условий.

Пример. При измерении углов теодолитом к комплексу условий могут быть отнесены: увеличение зрительной трубы инструмента, точность отсчетного приспособления, точность центрировочного устройства, качество изображения визирных целей, внешние условия, опытность наблюдателя и т. д.

Событие, которое при воспроизведении одного и того же опыта (при осуществлении данного комплекса условий) может наступить, а может и не наступить, будем называть случайным событием.

Соответственно этому явление, которое при многократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному в зависимости от некоторой изменчивости условий, в которых производится опыт, называют случайным явлением.

Пример. Результатами стрельбы из орудия при одной и той же установке являются случайные события: «попадание в цель», «недолет», «перелет», «отклонение влево», «отклонение вправо» и т. д. Эти результаты обусловлены тем, что, хотя стрельба производится и при одной установке орудия, неучтенные факторы (отклонение веса снаряда и заряда от стандарта, точность наведения, точность введения поправок и т. д.) оказывают свое влияние и опыт протекает каждый раз несколько по-иному.

Как показывает практика, при большом числе испытаний, производимых в одинаковых условиях*, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности, что является основополагающим при применении методов теории вероятностей и математической статистики к обработке массовых наблюдений.

Элементарным случайным событием назовем такой результат испытания, который полностью описывается одним (и только одним) событием. Элементарное событие не может быть разделено на составляющие события.

Сложным случайным событием назовем событие, которое составляется из двух или нескольких элементарных событий.

Обозначим через $A, B, C, D, \dots, W$ различные случайные события; в последующем будем писать: «событие A », «событие B » и т. д.

§ 2. Виды событий

При рассмотрении событий как элементарных, так и сложных, различают события:

- 1) достоверные,
- 2) невозможные,
- 3) несовместные,

* Под одинаковыми условиями здесь и далее будем понимать условия, которые характеризуются примерно равными показателями основных действующих факторов (температуры, давления, влажности, силы и направления ветра и т. д.).

- 4) совместные,
- 5) полную группу событий,
- 6) противоположные и
- 7) равновозможные события.

Событие, которое при выполнении определенного комплекса условий непременно произойдет, называют **д о с т о в е р н ы м**.

П р и м е р. В урне имеются только белые шары. Событие A — появление белого шара при взятии одного шара — событие достоверное. Достоверное событие принято обозначать буквой U . Следовательно,

$$A = U.$$

Событие, которое при выполнении определенного комплекса условий не может произойти, называют **н е в о з м о ж н ы м**.

П р и м е р. В предыдущем случае невозможным событием будет событие B — появление черного шара (комплекс условий определяется наличием в урне только белых шаров). Невозможное событие принято обозначать буквой V . Следовательно,

$$B = V.$$

Два события **н е с о в м е с т н ы**, если при одном испытании они не могут одновременно произойти. Несколько событий несовместны, если они попарно несовместны.

П р и м е р ы. а) В урне имеются белые и черные шары. При одном испытании (взятии) событие A — появление белого шара — и событие B — появление черного шара — несовместные события.

б) Произойдет ли один выстрел из орудия. События: «разрыв снаряда» и «неразрыв снаряда» — несовместные события.

Несколько событий называются **с о в м е с т н ы м и**, если при выполнении комплекса условий при испытании они могут наступить одновременно. Если $A, B, C, \dots, W$ — совместные события и известно, что они наверняка произойдут, то пишут

$$A \cdot B \cdot C \dots W = U.$$

События образуют **п о л н у ю г р у п п у с о б ы т и й**, если при опыте одно из них обязательно должно совершиться.

П р и м е р. При подбрасывании монеты единственно возможными являются события «появление цифры» и «появление герба»; никакие другие события не могут произойти.

Два несовместных события, составляющих полную группу событий, называются **п р о т и в о п о л о ж н ы м и**.

В предыдущем примере события: «появление цифры» и «появление герба» — события противоположные.

Событие, противоположное событию A , обозначается той же буквой A , но с чертой наверху, т. е. $\bar{A}$ — событие противоположное событию A (иногда говорят $\bar{A} = \text{«не } A\text{»}$).

П р и м е р ы: а) A — выпадение герба при бросании монеты;
 $\bar{A}$ — выпадение цифры при бросании монеты;

- б) B — попадание при выстреле;
 $\bar{B}$ — промах при выстреле;
- в) C — все попадания при N выстрелах;
 $\bar{C}$ — хотя бы один промах при N выстрелах;
- г) совершение некоторого события и его несовершение. (Этот пример имеет особое значение, так как к нему можно свести рассмотрение любого случайного события.)

Таким образом, при одном испытании

$$A\bar{A} = V;$$

$$(\text{или } A, \text{ или } \bar{A}) = A + \bar{A} = U.$$

События равновозможны, если ни одно из них не является объективно возможным больше, чем любое другое, например, выпадение герба или цифры при бросании монеты.

§ 3. Относительная частота и вероятность событий

Относительной частотой некоторого события называется отношение числа появлений этого события к числу всех произведенных испытаний.

Пусть Q — относительная частота, M — число появлений события, N — число всех произведенных испытаний. В соответствии с определением относительной частоты

$$Q = \frac{M}{N}. \quad (1)$$

Пример. Произведено 30 измерений одной и той же величины, при этом число отрицательных ошибок оказалось равным 12. Следовательно, $M = 12$, $N = 30$, относительная частота появления отрицательной ошибки $Q = 0,40$.

На основании определения относительной частоты легко установить, что она не может быть отрицательной и что ее значение заключено между нулем и единицей, т. е.

$$0 \leq Q \leq 1 \quad (\text{так как } 0 \leq M \leq N). \quad (2)$$

Выше (в § 1) было отмечено, что при большом числе испытаний, производимых в одинаковых условиях, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности. Самым ярким проявлением подобных закономерностей является свойство устойчивости относительной частоты случайных событий, т. е. уменьшение разброса значений частоты, получаемых в разных сериях испытаний, при увеличении числа испытаний в каждой серии. Поэтому, выполнив достаточно большую серию испытаний, можно с высокой точностью предсказать результат других таких же серий испытаний.

Так, английский ученый К. Пирсон, определяя относительную частоту появления герба при подбрасывании монеты 12 000 и 24 000 раз, получил значения этой частоты соответственно: 0,5016 и 0,5005. Нетрудно для данного опыта установить, пользуясь обычными

представлениями, что относительные частоты появления герба или цифры должны быть близки одна к другой, а их «точное» значение, около которого колеблются опытные данные, равно 0,5.

Итак, при большом числе испытаний N относительная частота Q обнаруживает устойчивость, которая характеризует объективную связь между комплексом условий, в которых производится опыт, и событием. Так как при увеличении числа испытаний N в сериях колебания относительной частоты Q уменьшаются, то есть основания предполагать, что существует некоторое постоянное определенное значение относительной частоты, от которого она отклоняется в ту и другую сторону. Этой постоянной величиной является количественная мера степени объективной возможности появления события при одном опыте, называемая *вероятностью события*.

Обозначим через $p(A)$ вероятность события A . В дальнейшем для упрощения будем обозначать вероятность просто буквой p .

В теории вероятностей часто рассматривают несовместные, равно-возможные события, образующие полную группу. Такие события называют *случаями* (или шансами). Тогда, как принято говорить, опыт «сводится к схеме случаев» и вероятность может быть вычислена непосредственно, как *отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу всех возможных случаев* (классическое определение вероятности), по формуле

$$p = \frac{m}{n}, \quad (3)$$

где m — число случаев, благоприятствующих некоторому событию; n — число всех возможных случаев; p — вероятность события.

Случай называется *благоприятствующим* некоторому событию, если появление этого случая влечет за собой появление данного события.

Примеры. а) В урне находится 50 белых и 46 черных шаров. Определить вероятность появления двух белых шаров при одновременной выборке шаров из ящика.

Решение. Подсчитаем число всех возможных случаев n и число случаев m , благоприятствующих появлению двух белых шаров:

$$n = C_{96}^2 = \frac{96!}{2!(96-2)!},$$

$$m = C_{50}^2 = \frac{50!}{2!(50-2)!};$$

следовательно,

$$p = \frac{m}{n} = \frac{C_{50}^2}{C_{96}^2} = \frac{\frac{50!}{2!48!}}{\frac{96!}{2!94!}}.$$

Пользуясь основным свойством факториала $n! = n \cdot (n-1)!$, произведем соответствующие сокращения и получим

$$p = \frac{49 \cdot 50}{95 \cdot 96},$$

окончательно $p \approx 0,27$.

б) Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные грани.

Решение. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными гранями, следовательно,

$$m = 12 \cdot 8 = 96; \quad p = 0,096.$$

Отмеченное выше свойство относительной частоты — устойчивость — явилось предметом исследования многих ученых. Первым выразил эту закономерность в виде теоремы Яков Бернулли (1654—1705). Он установил, что при числе испытаний n неограниченно большим с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, относительная частота события сколь угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте. Это положение — простейшая формулировка закона больших чисел. Математически теорема Бернулли в принятых обозначениях может быть выражена формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{M}{N} - p \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \delta, \quad (4)$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Формула (4) лежит в основе эмпирического определения вероятности в тех случаях, когда нет возможности применить формулу (3). В этих случаях вероятность принимают равной относительной частоте, полученной из достаточно большого числа испытаний. Заметим, кстати, что на практике это бывает как правило.

Из формулы (3) следует, что чем ближе вероятность к единице, тем чаще происходит событие, и чем ближе вероятность к нулю, тем событие происходит реже.

Если вероятность события сколь угодно близка к единице, его называют практически достоверным, если близка к нулю — практически невозможным. Степень приближения p к 1 или 0 оценивается, исходя из практических соображений. Иными словами, нельзя заранее указать абсолютную величину вероятности, при которой можно было бы событие считать или практически достоверным, или практически невозможным, весь вопрос состоит в том, о каком конкретном событии идет речь.

Пример. Если при стрельбе из артиллерийских орудий из 1000 снарядов 999 разорвутся при падении и один снаряд не разорвется, вероятность события «неразрыв снаряда», равную 0,001, можно уверенно считать величиной пренебрегаемо малой, а указанное событие — практически невозможным. Но если 0,001 есть вероятность события «нераскрытие парашюта после прыжка», то вряд ли мы так же легко отнесем это событие к практически невозможным.

Из изложенного следует, что для каждого испытания, исходя из практических соображений, необходимо установить как бы допустимую величину отклонения вероятности от единицы или нуля для того, чтобы можно было считать событие практически достоверным или, наоборот, — практически невозможным.

Рассмотрим следствия, которые вытекают из определения вероятности:

1. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$p(V) = 0,$$

где V — невозможное событие.

Если в формуле (3) $m = 0$, тогда $p = 0$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т. е.

$$p(U) = 1,$$

где U — достоверное событие.

Если в формуле (3) $m = n \neq 0$, то $p = 1$.

3. Вероятность события, так же как и его относительная частота, всегда рациональная правильная дробь, т. е.

$$0 \leq p \leq 1,$$

так как число благоприятствующих случаев m всегда отвечает условию

$$0 \leq m \leq n.$$

4. Сумма вероятностей событий полной группы равна единице, поскольку одно из событий полной группы обязательно должно совершиться при испытании.

5. Сумма вероятностей противоположных событий всегда равна единице, т. е.

$$p(\bar{A}) + p(A) = 1. \quad (5)$$

Это следует из того, что противоположные события составляют полную группу. Кроме того, если

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

то

$$p(\bar{A}) = \frac{n-m}{n}.$$

Складывая $p(A)$ и $p(\bar{A})$, получаем единицу.

Здесь и далее будем обозначать:

$p(A) = p$ — вероятность появления события;

$p(\bar{A}) = q$ — вероятность неоявления события.

С учетом принятых обозначений выражение (5) перепишем в следующем виде:

$$q + p = 1. \quad (6)$$

§ 4. Сложение вероятностей

Суммой нескольких несовместных событий называется сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пусть даны несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_n$. Если событие B — сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих несовместных событий, то

$$B = (\text{или } A_1, \text{ или } A_2, \dots \text{ или } A_n). \quad (7)$$

Более удобной записью выражения (7) могут служить

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n; \quad (8)$$

$$B = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (9)$$

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы нескольких несовместных событий полной группы равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B) = p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) \quad (10)$$

или

$$p\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i). \quad (11)$$

Докажем данную теорему, используя принцип перехода от частного к общему.

Доказательство. Пусть в ящике находятся a — белых, b — желтых, c — оранжевых, d — черных и e — коричневых шаров одинакового размера и веса. Определить вероятность того, что шар, извлеченный наудачу при одном взятии, будет иметь светлый тон (т. е. будет белого или желтого, или оранжевого цвета).

Обозначим:

B — событие, состоящее в появлении шара	светлого	тона;
A_1 » » » »	белого	цвета;
A_2 » » » »	желтого	»
A_3 » » » »	оранжевого	»
A_4 » » » »	черного	»
A_5 » » » »	коричневого	»

По условию задачи можем записать

$$B = A_1 + A_2 + A_3. \quad (12)$$

Но в то же время, используя формулу (3) для непосредственного подсчета вероятностей, получим

$$p(B) = \frac{m}{n} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d+e}. \quad (13)$$

Обозначив $a + b + c + d + e$ через n , выражение (13) перепишем так

$$p(B) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}. \quad (14)$$

В выражении (14), по определению вероятности,

$$\frac{a}{n} = p(A_1); \quad \frac{b}{n} = p(A_2); \quad \frac{c}{n} = p(A_3). \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3), \quad (16)$$

что и требовалось доказать.

Распространяя полученный частный вывод (16) на общий случай (8), можем считать формулу (11) доказанной.

Пример. В лотерее 1000 билетов, из них падает выигрышей: на один билет — 500 руб.; на 10 билетов — по 100 руб.; на 50 билетов — по 20 руб.; на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты — невыигрышные.

Найти при наличии одного билета вероятность: 1) выигрыша не менее 20 руб. и 2) выигрыша любой суммы.

Решение. Обозначим события: B_1 — выигрыш не менее 20 руб.; B_2 — выигрыш какой-либо суммы при наличии одного билета; A_1 — выигрыш 20 руб.; A_2 — выигрыш 100 руб.; A_3 — выигрыш 500 руб.; A_4 — выигрыш 5 руб.

Согласно условию

$$B_1 = A_1 + A_2 + A_3$$

и

$$p(B_1) = p(A_1 + A_2 + A_3).$$

По теореме сложения вероятностей имеем

$$p(B_1) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3).$$

Но

$$p(A_1) = \frac{50}{1000} = 0,050; \quad p(A_2) = \frac{10}{1000} = 0,010; \quad p(A_3) = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Следовательно, получим

$$p(B_1) = 0,050 + 0,010 + 0,001 = 0,061.$$

Вероятность выиграть какую-либо сумму, имея один билет, равна

$$p(B_2) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4);$$

так как

$$p(A_4) = \frac{100}{1000} = 0,100,$$

то

$$p(B_2) = 0,161.$$

§ 5. Независимые и зависимые события.

Условная вероятность

Выводы, основанные на положениях теории вероятностей и касающиеся сложных событий, будут существенно различными в зависимости от характера связи между элементарными событиями. Поэтому представляется целесообразным дать определения независимых и зависимых событий и понятие об условной вероятности.

Два или несколько событий называются **независимыми**, если вероятность появления любого из них не зависит от того, появляются другие события или не появляются.

Примеры. а) Отсчеты по шкале прибора при одной установке разными наблюдателями.

б) Результаты измерения одной и той же величины в разное время.

в) Результаты стрельбы по одной мишени разными стрелками.

Два или несколько событий называются **з а в и с и м ы м и**, если вероятность появления хотя бы одного из них зависит от того, появляются другие события или не появляются.

Пример. Если поражение цели достигается двумя попаданиями, то поражение цели при втором выстреле есть событие зависимое, так как оно может совершиться лишь при условии первого попадания в цель.

В связи с тем, что наряду с независимыми событиями при испытаниях приходится иметь дело и с зависимыми событиями, возникает вопрос о так называемой условной вероятности.

Вероятность, вычисленная в предположении, что одно или несколько событий уже произошло, называется **у с л о в н о й в е р о я т н о с т ь ю**.

Примем обозначения:

$p(A/B)$ — условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что произошло событие B ;

$p(A/B_1, B_2, B_3, \dots)$ — условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что произошли события $B_1, B_2, B_3, \dots$

События A и B зависимы, если выполняются неравенства

$$p(A/B) \neq p(A); \quad p(B/A) \neq p(B). \quad (17)$$

В отличие от условной вероятности вероятность независимого события называют иногда **б е з у с л о в н о й в е р о я т н о с т ь ю** (когда эти понятия используются вместе). События A и B независимы, если выполняются условия:

$$p(A/B) = p(A); \quad p(B/A) = p(B). \quad (18)$$

В приведенном выше примере условная вероятность поражения цели при втором выстреле равна вероятности попадания, в случае если первый выстрел сопровождался попаданием в цель, и равна нулю в случае промаха при первом выстреле.

§ 6. Умножение вероятностей

Одним из примеров сложного события является произведение событий.

Произведением двух или нескольких событий называется сложное событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример. Произведено три выстрела по цели. Пусть событие B — попадание при первом выстреле, событие C — попадание при втором выстреле, событие D — попадание при третьем выстреле. Тогда сложное событие — попадание всеми тремя выстрелами —

$$A = B \cdot C \cdot D.$$

Таким образом, если A — сложное событие, состоящее в совместном появлении событий $B, C, D, \dots, W$, то произведение событий будет выражено

$$A = B \cdot C \cdot D \cdot \dots \cdot W. \quad (19)$$

Иногда пишут

$$A = (\text{и } B, \text{ и } C, \text{ и } D, \text{ и } \dots, \text{ и } W). \quad (20)$$

В последующем изложении для обозначения произведения событий принята запись (19) как более простая.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух или нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других, т. е.

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \times \\ \times p(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n/A_1 A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (21)$$

В более общем виде формулу (21) можно представить так:

$$p\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot p\left(A_n / \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right)^*. \quad (22)$$

Для вероятности произведения двух зависимых событий A и B формула (22) принимает вид

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B). \quad (23)$$

Если события, составляющие произведение, независимы, то теорема умножения вероятностей упрощается, принимая следующую формулировку:

Вероятность произведения двух или нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Таким образом, если в формуле (22)

$$p(A_2/A_1) = p(A_2); \quad p(A_3/A_1 A_2) = p(A_3); \quad \dots \quad p\left(A_n / \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) = p(A_n),$$

то

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \dots \cdot p(A_n). \quad (24)$$

Докажем теорему умножения вероятностей для независимых событий, имея при этом в виду, что этот случай для теории ошибок наблюдений является преимущественным, так как в большинстве испытаний удастся обеспечить независимость измерений. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы сложения вероятностей проведем по принципу перехода от частного к общему.

Доказательство. Пусть в двух ящиках имеется: в первом — a_1 белых и b_1 — черных шаров, во втором — a_2 белых и b_2 черных шаров. Определить вероятность того, что будут вынуты два белых шара из двух ящиков, если из каждого ящика возьмут по одному шару.

* Здесь и далее знак Π означает произведение.

Обозначим: событие A_1 — появление белого шара из первого ящика;
 событие A_2 — появление белого шара из второго ящика;
 событие $A = A_1 \cdot A_2$ — совместное появление двух белых шаров при взятии по одному из каждого ящика.

Следовательно,

$$p(A) = p(A_1 \cdot A_2). \quad (25)$$

Вероятность определим непосредственным подсчетом, по формуле (3).

С этой целью сначала определим число благоприятствующих случаев m и число всех возможных случаев n , причем числом случаев при определении m и n будет число пар соответствующих шаров (белых или белых и черных вместе).

Каждый белый шар из первого ящика может выпасть в паре с одним из белых шаров из второго ящика a_2 раз. Следовательно, всего независимых пар белых шаров может быть

$$m = a_1 \cdot a_2. \quad (26)$$

Число всех возможных независимых пар, которые можно составить при опыте, равно

$$n = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2). \quad (27)$$

Вероятность появления двух белых шаров по одному из каждого ящика будет равна

$$p(A) = \frac{a_1 \cdot a_2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}. \quad (28)$$

Но в (28)

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = p(A_1)$$

— вероятность появления белого шара из первого ящика,

$$\frac{a_2}{a_2 + b_2} = p(A_2)$$

— вероятность появления белого шара из второго ящика.

С учетом этого формула (28) примет вид

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2), \quad (29)$$

что и требовалось доказать.

Распространяя полученный результат (29) на случай, когда сложное событие (произведение) составлено из n независимых событий, можно считать доказанным, что

$$p\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n p(A_i). \quad (30)$$

В частном случае, который, кстати сказать, при рассмотрении вопросов в теории ошибок встречается довольно часто, а именно, когда

$$p(A_1) = p(A_2) = \dots = p(A_n) = p,$$

обозначив

$$p \left(\prod_{i=1}^n A_i \right)$$

через P , можно записать

$$P = p^n. \quad (34)$$

Примеры. а) Игральную кость подбрасывают пять раз. Определить вероятность того, что грань с 5-ю очками выпадает при этом пять раз.

Решение. Вероятность выпадения 5-ти очков

$$p = \frac{1}{6}; \quad P = \left(\frac{1}{6} \right)^5.$$

б) (На условную вероятность). Пусть в ящике имеется 25 белых и 36 черных шаров. Определить вероятность последовательного появления двух белых шаров при условии, что при взятии первого шара из ящика, шар обратно не возвращается.

Решение. Обозначим: событие A_1 — появление первого белого шара, событие A_2 — появление второго белого шара. Можно записать:

$$p(A_1 \cdot A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1),$$

$$p(A_1) = \frac{25}{61}; \quad p(A_2/A_1) = \frac{25-1}{61-1} = \frac{24}{60}; \quad p(A_1 \cdot A_2) = \frac{25 \cdot 24}{61 \cdot 60} \approx 0.164.$$

в) Определить вероятность того, что выбранная наудачу деталь при сборке является первосортной, если известно, что в партии 2% деталей — брак, а 80% всех остальных деталей — первосортные.

Решение. Обозначим через событие A — выбранное первосортное изделие. Тогда

$$p(A) = (1 - 0.02) \cdot 0.80 = 0.78.$$

г) Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия равна

$$p(A_1) = 0.20.$$

Какова вероятность поразить цель при одном выстреле, если 2% взрывателей дают отказы?

Решение. Считая событием A_1 — попадание в цель, а событием A_2 — действие взрывателя, причем оба события — независимыми, по теореме умножения вероятностей имеем

$$p(A_1 \cdot A_2) = (1 - 0.02) \cdot 0.20;$$

$$p(A_1 \cdot A_2) = 0.98 \cdot 0.20 = 0.196.$$

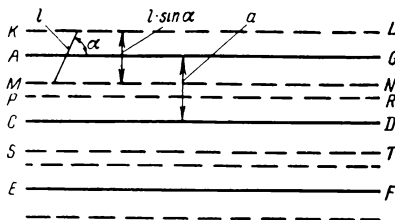
д) На плоскость, на которой начерчен ряд параллельных линий на расстоянии a одна от другой, бросают иглу длиной l , причем $l \leq a$ (рис. 1). Как велика вероятность того, что игла пересечет одну из линий, если все положения иглы при ее падении совершенно случайны и равновозможны?

Решение. Пересечение иглой одной из линий AG , CD , EF ... при падении под углом α к ним возможно в том случае, если середина иглы окажется в полосе

$KLMN$, $PRST$ и т. д. шириной $l \cdot \sin \alpha$. Поэтому вероятность попадания иглы в полосу $l \cdot \sin \alpha$ будет

$$p_1 = \frac{l \cdot \sin \alpha}{a};$$

вероятность того, что игла упадет под углом $\alpha + d\alpha$ к линиям, будет



$$p_2 = \frac{d\alpha}{\pi};$$

причем α изменяется от 0 до 180° (до π).

Рассматривая попадание иглы в полосу $l \cdot \sin \alpha$ и падение под углом α , как события независимые, вероятность совместного их совершения dp выразим формулой

$$dp = p_1 \cdot p_2 = \frac{l \cdot \sin \alpha}{a} \cdot \frac{d\alpha}{\pi}.$$

Рис. 1

На основании предыдущего имеем

$$p = \int_0^\pi dp = \int_0^\pi \frac{l \cdot \sin \alpha}{a} \cdot \frac{d\alpha}{\pi} = \frac{l}{a\pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha;$$

$$p = \frac{l}{a\pi} (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{l}{a\pi} - \left(-\frac{l}{a\pi} \right) = \frac{2l}{a\pi}$$

(так как $\cos 0^\circ = 1$; $\cos 180^\circ = -1$).

Таким образом,

$$p = \frac{2l}{a\pi}. \quad (32)$$

Здесь рассмотрена так называемая задача Бюффона. Получая значение p приближенно, как относительную частоту из многих испытаний, при помощи формулы (32) получают значение π . Точность определения π указанным путем характеризуется, по результатам опыта различных авторов, тремя-четырьмя верными значащими цифрами.

ГЛАВА II

МНОГОКРАТНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

§ 7. Распределение вероятностей при многократных испытаниях. Биномиальное распределение

При исследовании новых инструментов или при проверке новых методов работ независимые испытания производятся многократно, т. е. при сохранении определенного комплекса условий повторяются большое число раз. Испытателя в этом случае интересует конечный

результат опыта, например сколько раз при n испытаниях появится ожидаемое событие.

Пусть A — некоторое событие, на появление (или непоявление) которого производятся многократные испытания. Вероятность этого события известна и постоянна. Результатом каждого отдельного опыта может быть появление или непоявление события A , т. е. совершение или A , или $\bar{A}$. Требуется определить вероятность того, что при n испытаниях событие появится k раз, т. е. необходимо найти $P_n(k)$. Проанализируем результаты n испытаний в «схеме случаев», т. е. последовательно: после первого испытания, после двух испытаний и т. д. и, наконец, после n испытаний.

Когда произведено одно испытание, получим

$$\text{или } \bar{A}, \text{ или } A, \text{ но } p(\text{или } \bar{A}, \text{ или } A) = p(\bar{A} + A) = p(\bar{A}) + p(A) = \\ = q + p.$$

В то же время известно, что

$$q + p = 1.$$

После двух испытаний возможны следующие комбинации сложных событий:

$$\text{или } \bar{A}\bar{A}, \text{ или } A\bar{A}, \text{ или } \bar{A}A, \text{ или } AA,$$

т. е.

$$p(\bar{A}\bar{A} + A\bar{A} + \bar{A}A + AA) = p(\bar{A}\bar{A}) + p(A\bar{A}) + p(\bar{A}A) + p(AA). \quad (33)$$

Из теоремы умножения вероятностей следует

$$p(\bar{A}\bar{A}) + p(A\bar{A}) + p(\bar{A}A) + p(AA) = q \cdot q + p \cdot p + q \cdot p + p \cdot q = \\ = (q + p)^2 = 1. \quad (34)$$

После трех испытаний возможны комбинации сложных событий: или $\bar{A}\bar{A}\bar{A}$, или $AA\bar{A}$, или $\bar{A}A\bar{A}$, или $\bar{A}\bar{A}A$, или $A\bar{A}\bar{A}$, или $\bar{A}A\bar{A}$, или $\bar{A}\bar{A}A$, или $AA\bar{A}$, или $A\bar{A}A$;

из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$p(\bar{A}\bar{A}\bar{A}) + p(AA\bar{A}) + p(\bar{A}A\bar{A}) + p(\bar{A}\bar{A}A) + p(A\bar{A}\bar{A}) + p(\bar{A}A\bar{A}) + \\ + p(A\bar{A}A) + p(AA\bar{A}) = q^3 + p^3 + q^2p + q^2p + q^2p + qp^2 + p^2q + \\ + p^2q = q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3 = 1. \quad (35)$$

Окончательно

$$(q + p)^3 = 1. \quad (36)$$

Рассуждая аналогично, для n испытаний получим

$$(q + p)^n = 1. \quad (37)$$

Выражение (37) после разложения его в ряд по биному даст вероятность для $(n + 1)$ произведений сложных событий при

многократных испытаниях без учета последовательности их появления.

Разлагая бином (37), с учетом того, что n целое и положительное число, получим

$$(q+p)^n = C_n^0 q^n p^0 + C_n^1 q^{n-1} p^1 + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \dots + C_n^k q^{n-k} p^k + \dots + C_n^n q^0 p^n = 1. \quad (38)$$

В выражении (38) C_n^k — биномиальные коэффициенты ($k = 0, 1, 2, \dots, n$); при этом очевидно, что

$$C_n^n = 1,$$

так как из n по n можно составить только одно сочетание.

Контролем вычислений вероятностей всевозможных произведений событий при n многократных независимых испытаниях в выражении (38) является равенство суммы всех членов разложения единице.

Окончательно имеем

$$P_n(k) = C_n^k \cdot q^{n-k} \cdot p^k, \quad (39)$$

где $P_n(k)$ — вероятность появления события k раз при n испытаниях,

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n по k ,

p — вероятность события,

q — вероятность противоположного события.

Совокупность вероятностей $P_n(k)$ носит название биномиального распределения вероятностей.

При больших значениях n и k (больше 10) для упрощения вычисления факториалов в формуле (39) применяют приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right). \quad (40)$$

Чаще формула Стирлинга еще более упрощается и применяется в виде

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (41)$$

Абсолютная ошибка вычислений факториалов по формуле (41) увеличивается с увеличением n . Относительная же точность (характеризуемая отношением абсолютной ошибки к значению факториала и выражаемая обычно в %) повышается с увеличением n . По этой причине формула Стирлинга принадлежит к числу асимптотических формул. Сравнивая формулы (40) и (41), легко подсчитать, что при $n = 10$ относительная ошибка вычислений составит 0,8%, при $n = 20$ она будет равна 0,4%.

Иногда для определения биномиальных коэффициентов при вычислениях по формуле (39) целесообразно воспользоваться треугольником Паскаля:

n	Коэффициенты								
0					1				
1				1		1			
2			1		2		1		
3		1		3		3		1	
4		1	4		6		4	1	
5	1		5	10		10	5		1
6	1	6	15		20		15	6	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Каждый биномиальный коэффициент в треугольнике Паскаля образуется сложением двух стоящих над ним коэффициентов слева и справа.

Заметим в заключение, что дополнительный контроль вычислений по формуле (38) может быть получен, исходя из свойств биномиальных коэффициентов, а именно: коэффициенты членов, равноотстоящих от начала и конца, равны, а сумма всех коэффициентов в бинOME n -й степени равна 2^n .

Пример. Определить вероятность получения трех пробоин в мишени при четырех выстрелах, если вероятность поразить мишень при одном выстреле постоянна и равна 0,4.

Решение. Обозначим вероятность поражения мишени при первом выстреле через p (A_1), при втором выстреле через p (A_2), при третьем выстреле через p (A_3), при четвертом выстреле через p (A_4), вероятность получения трех пробоин в мишени при четырех выстрелах через P_4 (3). По условию примера имеем

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = p(A_4) = p = 0,4; \quad q = 1 - p, \text{ т. е. } q = 0,6.$$

По формуле (39) имеем

$$P_4(3) = C_4^3 q^4 - 3p^3 = 4 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^3; \quad P_4(3) = 0,1536.$$

Этот результат может быть получен также путем применения теорем сложения и умножения вероятностей.

Событие «наличие в мишени трех пробоин» может наступить в следующих комбинациях:

$$1) B_1 = (A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4); \quad 3) B_3 = (A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4);$$

$$2) B_2 = (A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4); \quad 4) B_4 = (\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4).$$

Применяя теорему умножения для независимых событий, получим

$$1) p(B_1) = p(A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot p(\bar{A}_4) = 0,0384;$$

$$2) p(B_2) = p(A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\bar{A}_3) \cdot p(A_4) = 0,0384;$$

$$3) p(B_3) = p(A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4) = p(A_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot p(A_3) \cdot p(A_4) = 0,0384;$$

$$4) p(B_4) = p(\bar{A}_1 A_2 A_3 A_4) = p(\bar{A}_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot p(A_4) = 0,0384.$$

По условию примера появление одного из сложных событий — произведений 1—4 будет означать наступление ожидаемого события. Следовательно, по теореме сложения имеем

$$P_4(3) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) + p(B_4),$$

или

$$P_4(3) = 0,1536.$$

Получен тот же результат, что и по формуле (39).

По формуле (39) можно вычислить вероятность появления события k раз при n независимых многократных испытаниях, причем $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

В практических целях представляется полезным уметь вычислять вероятность появления события хотя бы один раз при выполнении данного комплекса условий. Поскольку сумма вероятностей противоположных событий равна 1, т. е.

$$q + p = 1,$$

вероятность того, что некоторое событие A ни разу не появится при n испытаниях, равна $[p(\bar{A})]^n$.

Следовательно, вероятность того, что событие A произойдет хотя бы один раз, равна

$$P_1(A) = 1 - [p(\bar{A})]^n, \quad (42)$$

или

$$P_1(A) = 1 - q^n. \quad (43)$$

Так, в предыдущем примере

$$P_1(A) = 1 - (0,6)^4 = 0,87.$$

§ 8. Вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях

При испытаниях новых инструментов или методов работ, а также при различных теоретических расчетах исследователь, естественно, ставит перед собой вопрос: какое число появлений ожидаемого события (при многократных испытаниях) наиболее возможно, если выполнен определенный комплекс условий, который в обобщающем виде характеризуется постоянством в процессе опыта вероятности появления события при одном испытании. Конечно, каждый раз, вычисляя все члены разложения в формуле (38) и зная из определения вероятности, что большая вероятность порождает большую уверенность в получении желаемого результата опыта, можно определить число появлений события, соответствующее этой вероятности. Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример.

П р и м е р. Произведено 8 независимых измерений одной и той же величины в одинаковых условиях. Вычислить вероятности появления отрицательных ошибок Δ : одной, двух, трех и т. д., восьми — из восьми, полагая, что

$$p(-\Delta) = p(+\Delta) = \frac{1}{2}; \quad p(-\Delta) = q; \quad p(+\Delta) = p.$$

Решение. Составим табл. 1.

Таблица 1

Число появлений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Контроль
n	$P_n(k)$									
	$C_0^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_1^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_2^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_3^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_4^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_5^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_6^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_7^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	$C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8$	Σ
8	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{256}{256}$

Из табл. 1 видно, что наибольшая вероятность $\left(\frac{70}{256}\right)$ соответствует появлению четырех отрицательных ошибок.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы найти способ отыскания в общем виде числа появлений события, соответствующего наибольшей вероятности, или так называемого вероятнейшего числа появлений события при многократных испытаниях. Обозначим вероятнейшее число через k_0 . Для решения поставленной задачи используем формулу (39) биномиального распределения вероятностей. Так как это распределение прерывное (дискретное), аппарат математического анализа непригоден для исследования изменения вероятностей $P_n(k)$ в зависимости от изменения числа появлений события k .

По определению вероятнейшего числа появлений события должны выполняться неравенства:

$$\left. \begin{aligned} P_n(k_0) &\geq P_n(k_0 + 1) \\ P_n(k_0) &\geq P_n(k_0 - 1) \end{aligned} \right\}. \quad (44)$$

Если условие (44) будет выполнено, k_0 будет вероятнейшим числом появлений события при многократных испытаниях.

Найдем k_0 , отвечающее первой части условия (44).

Для этого составим отношение

$$\frac{P_n(k_0 + 1)}{P_n(k_0)} \leq 1. \quad (45)$$

Пользуясь формулой (39), раскроем числитель и знаменатель левой части неравенства (45)

$$\frac{P_n(k_0 + 1)}{P_n(k_0)} = \frac{C_n^{k_0 + 1} \cdot q^{n - k_0 - 1} \cdot p^{k_0 + 1}}{C_n^{k_0} \cdot q^{n - k_0} \cdot p^{k_0}} = \frac{\frac{n!}{(k_0 + 1)! (n - k_0 - 1)!} \cdot p}{\frac{n!}{k_0! (n - k_0)!} \cdot q}. \quad (46)$$

Произведя соответствующие сокращения в (46) и имея в виду неравенство (45), получим

$$\frac{n - k_0}{k_0 + 1} \cdot \frac{p}{q} \leq 1. \quad (47)$$

Освободившись от знаменателя в левой части неравенства (47), запишем

$$(n - k_0) p \leq (k_0 + 1) q. \quad (48)$$

Но так как

$$q = 1 - p, \quad (49)$$

то, подставив значение q из (49) в (48), получим

$$np - k_0 p \leq k_0 - k_0 p + 1 - p$$

или

$$np - (1 - p) \leq k_0. \quad (50)$$

Таким образом, для выполнения первой части условия (44) достаточно определить k_0 под условием (50).

Найдем правую границу неравенства (50), т. е. k_0 , отвечающее второй половине условия (44), для чего составим отношение

$$\frac{P_n(k_0 - 1)}{P_n(k_0)} \leq 1. \quad (51)$$

Поступая аналогично, после несложных преобразований получим

$$\frac{P_n(k_0 - 1)}{P_n(k_0)} = \frac{k_0}{n - k_0 + 1} \cdot \frac{q}{p} \leq 1, \quad (52)$$

или

$$k_0 - k_0 p \leq np - k_0 p + p; \quad (53)$$

$$k_0 \leq np + p. \quad (54)$$

Окончательно, объединив неравенства (50) и (54), получим

$$np - (1 - p) \leq k_0 \leq np + p. \quad (55)$$

Неравенство (55) позволяет находить вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях, т. е. такое число, которое отвечает условию (44). Контролем вычислений k_0 является равенство единице разности, составленной из правой и левой частей неравенства (55). При вычислениях k_0 по формуле (55) n (число всех испытаний), как правило, известно по условию задачи (или им задаются произвольно); p (вероятность появления события) известна по условию задачи (или его надо найти, исходя из условия задачи).

При числе испытаний достаточно большом и при значении p не близком к нулю неравенство (55) можно превратить в равенство и для практических целей использовать для вычисления k_0 следующую приближенную формулу:

$$k_0 \approx np. \quad (56)$$

Формула (56) получена путем математических рассуждений, однако ее правильность легко обосновать логически. Для этого достаточно рассмотреть пример на многократное испытание с подбрасыванием монеты.

Следует подчеркнуть, что несмотря на свою простоту формула (56) имеет важное значение как для последующих теоретических выкладок, так и в особенности при решении задач на появление числа ошибок в заданных пределах.

Основную трудность при решении практических вопросов с использованием формулы (56) составляет определение вероятности появления события.

Г Л А В А И И

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 9. Понятие о случайной величине. Прерывные и непрерывные случайные величины

С л у ч а й н о й в е л и ч и н о й называют переменную величину, сопутствующую случайному событию и отражающую многообразие неучтенных колебаний условий, при которых производится данный опыт. Таким образом, при проведении опыта приходится иметь дело со случайной величиной, конкретное значение которой заранее неизвестно.

П р и м е р ы случайных величин, сопутствующих случайным событиям.

а) Число появлений события или относительная частота при многократных испытаниях.

б) Производится 4 выстрела по мишени. Ожидаемое событие: «попадание в мишень». Это событие может сопровождаться случайными величинами (числом попаданий) 0 или 1, или 2, или 3, или 4.

в) Производится измерение одной и той же величины в одинаковых условиях n раз; точное значение измеряемой величины известно. Результаты измерений будут колебаться около точного значения, причем заранее нельзя назвать ни одного результата измерения; можно лишь, исходя из опыта аналогичных измерений, указать границы изменения случайных величин — результатов измерений или их отклонений от точного значения.

Различают два типа случайных величин: прерывные (дискретные) и непрерывные.

П р е р ы в н о й случайной величиной называют такую случайную величину, возможные значения которой можно заранее указать (например, число попаданий при трех выстрелах — 0, 1, 2, 3; относительная частота попаданий при трех выстрелах — $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$; число появлений отрицательной ошибки при пяти измерениях —

0, 1, 2, 3, 4, 5; число появлений события при многократных испытаниях).

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток и не могут быть перечислены заранее.

Пример. Производится стрельба по цели, представляющей квадрат со стороной a . Начало координат x и y совпадает с центром квадрата. Событию «попадание в цель» соответствует условие

$$\left. \begin{aligned} |x| &\leq \frac{a}{2} \\ |y| &\leq \frac{a}{2} \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом, если случайное событие «попадание в цель» произойдет, можно утверждать, что координаты точки попадания x и y заключены в пределах от 0 до $\frac{a}{2}$, но нельзя перечислить возможные значения координат точек попадания.

Разумеется, конкретные значения случайной величины при ограниченном числе испытаний могут заметно отличаться друг от друга и в этом смысле она не является непрерывной, хотя эти значения и нельзя перечислить заранее. Однако речь идет о возможных значениях случайной величины, т. е. о таких, которые она может принимать в процессе опыта. Таким образом, число наблюдаемых значений случайной величины всегда конечное; однако возможное число значений непрерывной случайной величины — «несчетное множество»*.

Здесь и далее будем обозначать прописными латинскими буквами — прерывные случайные величины, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами (например, X — случайная величина; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — возможные значения случайной величины X при n испытаниях; $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — соответствующие величинам x_i вероятности).

§ 10. Законы распределения случайных величин

Для полной характеристики случайной величины недостаточно знать возможные ее значения, а необходимо также знать вероятности, соответствующие этим значениям, т. е. $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, или — ожидаемые относительные частоты этих значений.

Всякое соотношение, при помощи которого устанавливается связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называют законом распределения случайной величины.

* Здесь следует иметь в виду, что результаты измерений округляют до некоторого десятичного знака; поэтому практически совокупность всех возможных результатов измерений составляет прерывную случайную величину.

Закон распределения прерывной случайной величины может быть задан:

1. Аналитически в виде формулы

$$p(x_i) = f(x_i). \quad (57)$$

Примером аналитического выражения закона распределения для прерывных случайных величин может служить вероятность появления события k раз при n испытаниях, вычисляемая по формуле (39).

В этой формуле каждому возможному значению числа появлений события k_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) ставится в соответствие вероятность $P_n(k)$.

2. Численно в виде таблицы распределения (см. табл. 2), в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности.

Таблица 2

Таблица распределения

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
p_i	p_1	p_2	p_3		p_n

Таблицу распределения часто называют также рядом распределения случайной величины X .

3. Графически в виде так называемого многоугольника распределения.

Многоугольником распределения называется график в прямоугольных координатах, по оси абсцисс которого откладываются возможные значения x_i случайной величины X , а по оси ординат — соответствующие им вероятности p_i .

Пример. По данным табл. 1 (§ 8) построить многоугольник распределения.

Решение. По оси ординат (рис. 2) откладывают p_i , приняв 8 единиц числителя соответствующими 0,34 см, по оси абсцисс — числа ошибок, приняв одно появление ошибки соответствующим 0,68 см. Концы ординат на графике — многоугольнике распределения соединяют отрезками прямых.

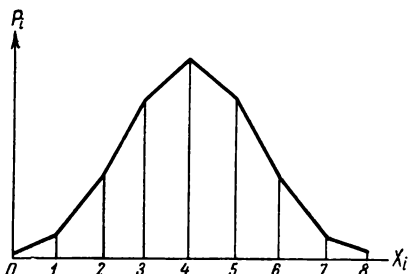


Рис. 2

Итак, формула вида (57), таблица распределения и многоугольник распределения в полной мере исчерпывают способы задания закона распределения прерывной случайной величины. Однако составить таблицу распределения или построить многоугольник

распределения для «несчетного множества» возможных значений непрерывной случайной величины невозможно, тем более, что отдельные значения непрерывной случайной величины соответствуют вероятности, стремящейся к нулю, т. е. вероятности бесконечно малой. В то же время при решении практических вопросов и при переходе к обобщениям часто пользуются понятием как непрерывной, так и прерывной случайной величины.

Следовательно, возникает необходимость получить способ задания закона распределения, который подходил бы как для прерывных, так и для непрерывных случайных величин. С этой целью удобно иметь дело с вероятностью события $X < x$ (а не $X = x$, как это имело место в законе распределения прерывных случайных величин).

Функцию вида

$$F(x) = P(X < x) \quad (58)$$

называют функцией распределения случайной величины X или интегральной функцией распределения.

Так, для случайной величины с биномиальным распределением функция распределения примет вид

$$F(x) = \sum_{k < x} C_n^k \cdot q^{n-k} \cdot p^k. \quad (59)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие непрерывные случайные величины, функция распределения которых непрерывна и дифференцируема, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x). \quad (60)$$

Производная функции распределения называется плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X^* .

§ 11. Интеграл вероятностей. Плотность нормального распределения вероятностей

Для вычисления вероятностей появлений события k раз при n независимых многократных испытаниях в § 7 была получена формула (39). Поставим задачу получить вероятность появления события, если k — число появлений изменяется в пределах от a до b , причем

$$a < k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_w < b. \quad (61)$$

Вероятность события ($a < k_i < b$) по теореме сложения вероятностей равна

$$P(a < k_i < b) = \sum_{k=a}^b P_n(k). \quad (62)$$

* Иногда ее называют: «плотность вероятности», «дифференциальная функция распределения», «дифференциальный закон распределения».

Подставив в формулу (39) факториалы $n!$, $k!$, $(n-k)!$, вычисленные по формуле (41), получим

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot q^{n-k} \cdot p^k =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k} \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi(n-k)} \cdot \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} \cdot q^{n-k} \cdot p^k. \quad (63)$$

После сокращений имеем

$$P_n(k) = \frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k(n-k)} \cdot k^k \cdot (n-k)^{n-k}} \cdot q^{n-k} \cdot p^k. \quad (64)$$

Приняв

$$n^n = n^k \cdot n^{n-k},$$

перепишем выражение (64)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \cdot \left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}. \quad (65)$$

Ранее, в § 8, для вероятнейшего числа появлений события при многократных испытаниях была выведена формула (56), в соответствии с которой $k_0 \approx np$. Вместо числа появлений события k будем рассматривать отклонение его от k_0 , т. е.

$$\Delta k = k - np. \quad (66)$$

С учетом (66) преобразуем (см. [40], стр. 130) формулу (65)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)}} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np - \Delta k} \cdot \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq + \Delta k}. \quad (67)$$

В предположении, что p и q не близки ни к нулю, ни к единице, при числе испытаний достаточно большом дроби $\frac{\Delta k}{np}$ и $\frac{\Delta k}{nq}$ будут малыми величинами, а следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)}} \approx 1. \quad (68)$$

Упростим в (67) последние два множителя

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np - \Delta k} &= -(np + \Delta k) \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq + \Delta k} &= (-nq + \Delta k) \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (69)$$

Раскладывая в ряды $\ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)$ и $\ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)$ по степеням $\frac{\Delta k}{np}$ и $\frac{\Delta k}{nq}$, получим

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right) &= \frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2 p^2} + \dots \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right) &= -\frac{\Delta k}{nq} - \frac{\Delta k^2}{2n^2 q^2} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (70)$$

Подставляя (70) в (69), имеем

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-np - \Delta k} &= \\ &= -(np + \Delta k) \left(\frac{\Delta k}{np} - \frac{\Delta k^2}{2n^2 p^2} + \dots\right) = -\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} \dots \\ \ln \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-nq + \Delta k} &= \\ &= -(nq - \Delta k) \left(-\frac{\Delta k}{nq} - \frac{\Delta k^2}{2n^2 q^2} + \dots\right) = \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} \dots \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Используя свойство логарифмов, можно на основании (71) записать

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta k}{np}\right)^{-(np + \Delta k)} &= e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \dots} \\ \left(1 - \frac{\Delta k}{nq}\right)^{-(nq - \Delta k)} &= e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \dots} \end{aligned} \right\}. \quad (72)$$

Подставляя соответствующие значения последних двух сомножителей в (67) из (72), получим

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \dots} \cdot e^{\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} + \dots}, \quad (73)$$

но

$$\begin{aligned} -\Delta k - \frac{\Delta k^2}{2np} + \Delta k - \frac{\Delta k^2}{2nq} &= \frac{-q \cdot \Delta k^2 - p \cdot \Delta k^2}{2npq} = \\ &= \frac{-(1-p) \Delta k^2 - p \cdot \Delta k^2}{2npq} = -\frac{\Delta k^2}{2npq}. \end{aligned} \quad (74)$$

Следовательно,

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{\Delta k^2}{2npq}}. \quad (75)$$

Подставим в (75) вместо Δk^2 выражение $(k - np)^2$; тогда

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}}. \quad (76)$$

Формула (76) служит для вычисления вероятности появления события k раз при n испытаниях.

В (76) примем

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \quad (77)$$

Изменим число появлений k на единицу и при этом условии по (77) определим приращение новой переменной x

$$\left. \begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{k - np + 1}{\sqrt{npq}} \\ x &= \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \end{aligned} \right\}. \quad (78)$$

Вычитая в (78) из верхнего выражения нижнее, получим

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}. \quad (79)$$

Формула (76) с учетом (77) и (79) примет вид

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \Delta x, \quad (80)$$

Подставим значение $P_n(k)$ из (80) в (62)

$$P(a < k_i < b) = \sum_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \Delta x. \quad (81)$$

Из (79) следует, что при $n \rightarrow \infty$ $\Delta x \rightarrow 0$.

Переходя к пределу и заменяя в (81) знак суммы знаком интеграла, запишем

$$P(a < k_i < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (82)$$

В формуле (82) пределы интегрирования a и b , относящиеся к переменной k_i , заменим пределами, относящимися к переменной

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

находящейся под знаком интеграла, для чего примем [29]

$$\left. \begin{aligned} a &= np + \alpha \sqrt{npq} \\ b &= np + \beta \sqrt{npq} \end{aligned} \right\}, \quad (83)$$

где α и β пока неизвестные сомножители.

Из (83) имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a - np}{\sqrt{npq}} \\ \beta &= \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \end{aligned} \right\}. \quad (84)$$

Сравнивая (84) с (77), видим, что если a и b — пределы изменения переменной k , то α и β пределы, в которых изменяется x .

Таким образом,

$$P(a < k_i < b) = P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (85)$$

Из (85) следует теорема Лапласа.

При достаточно большом числе независимых испытаний n вероятность появления события k_i раз (в границах изменения от a до b , где $a = np + \alpha \sqrt{npq}$ и $b = np + \beta \sqrt{npq}$) стремится к определенному значению, выражаемому соотношением (85).

При практическом использовании формулы (85) в преобладающем большинстве случаев приходится иметь дело с симметричными пределами. В соответствии с этим примем: $\alpha = -t$, $\beta = +t$.

Тогда формула (85) примет вид

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (86)$$

В силу четности подынтегральной функции $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\int_{-t}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (87)$$

Следовательно,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (88)$$

На основании теоремы Лейбница — Ньютона определенный интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная функция этого предела, первообразная по отношению к подынтегральной функции, т. е. можем записать

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx. \quad (89)$$

Функция $\Phi(t)$ называется интегралом вероятностей, или функцией нормального распределения. Таким образом, биномиальное распределение переменной величины

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

стремится к непрерывному, нормальному распределению, когда число испытаний неограниченно возрастает, а вероятности не близки ни к нулю, ни к единице. Графически это можно представить, например,

так: если число испытаний (см. рис. 2) увеличить до неограниченно большой величины, интервалы между соседними основаниями ординат на оси абсцисс уменьшатся и будут неограниченно малы. Ломаная линия при этом превратится в плавную колоколообразную кривую, так называемую кривую нормального распределения. Разумеется, для приведения этих рассуждений в соответствие с формулой (89) кривая на рис. 2 должна быть сдвинута влево так, чтобы она стала симметричной относительно оси ординат.

Геометрический смысл теоремы Лейбница — Ньютона состоит в том, что производная от переменной площади равна переменной конечной ординате.

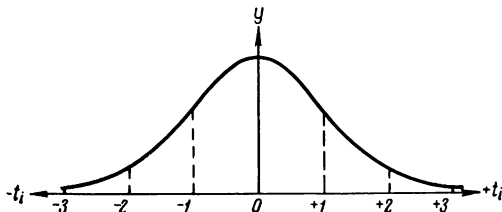


Рис. 3

В соответствии с этим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \Phi(t + \Delta t) - \frac{1}{2} \Phi(t)}{\Delta t} = y_1; \quad (90)$$

$$y_1 = \frac{d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \right)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (91)$$

Функцию $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$ обозначают через $\varphi(t)$ и называют плотностью нормального распределения вероятностей.

Иногда ее называют дифференциальной функцией нормального распределения. Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (92)$$

Построим график функции $y_1 = \varphi(t)$. Так как $\varphi(t)$ — функция четная, полученная кривая нормального распределения будет расположена симметрично относительно оси ординат (рис. 3). Свойства этой кривой более подробно будут рассмотрены ниже.

Как следует из вышеизложенного, интеграл вероятностей геометрически представляет площадь, заключенную между кривой

нормального распределения и осью абсцисс, в пределах от $-t$ до $+t$. При дальнейших рассуждениях полезно иметь в виду, что интеграл вероятностей принимает значения, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

t	$\Phi(t)$
1	0,683
2	0,954
2,5	0,988
3,0	0,9973
4,0	0,99994
5,0	0,9999994
8,0	0,9999999999999999

Рассмотрим основные свойства интеграла вероятностей $\Phi(t)$. 1. Функция $\Phi(t)$ есть функция нечетная, т. е. при замене аргумента t на $-t$ функция $\Phi(t)$ меняет знак, не меняя своего численного значения.

Для доказательства этого свойства запишем

$$\Phi(-t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{-t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \quad (93)$$

Произведя под знаком интеграла замену переменной $x = -z$, $dx = -dz$ находим, что при $x = -t$, $z = t$

$$\Phi(-t) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^0 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Следовательно,

$$\Phi(-t) = -\Phi(t). \quad (94)$$

2. С возрастанием аргумента t от нуля до бесконечности значение функции $\Phi(t)$ также возрастает, приближаясь асимптотически к своему предельному значению, равному единице, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1. \quad (95)$$

Записав функцию

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \quad (96)$$

видим, что интеграл в правой части (96) — это известный интеграл Эйлера — Пуассона, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (97)$$

Подставляя (97) в (96), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1, \quad (98)$$

что и требовалось доказать.

§ 12. Интегральная функция нормального распределения и связь ее с интегралом вероятностей

Для характеристики закона распределения часто вместо интеграла вероятностей $\Phi(t)$ применяют так называемую интегральную функцию нормального распределения, имеющую вид

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx. \quad (99)$$

Сравнивая формулы (89) и (99), нетрудно установить, что геометрически интегральная функция нормального распределения предста-

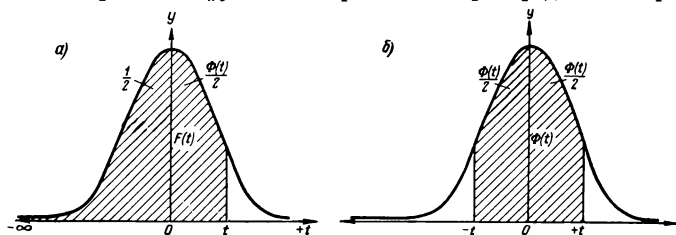


Рис. 4

вляет площадь, заключенную между кривой нормального распределения и осью абсцисс в пределах от $-\infty$ до t . Установим связь между интегралом вероятностей (89) и функцией $F(t)$, для чего интеграл (99) разобьем на два интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx. \quad (100)$$

На основании выражений (89) и (98) можем записать

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \Phi(t);$$

с учетом полученного перепишем формулу (100) в виде

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(t). \quad (101)$$

Однако при практическом использовании связи (101) чаще приходится вычислять $\Phi(t)$ через $F(t)$, а не наоборот. Имея в виду это обстоятельство, умножим левую и правую части выражения (101) на 2 и, решив его относительно $\Phi(t)$, получим

$$\Phi(t) = 2F(t) - 1. \quad (102)$$

Таким образом, если имеются таблицы для определения значения функции $F(t)$ по аргументу t , а необходимо найти значение

интеграла вероятностей $\Phi(t)$, достаточно выбранное табличное значение $F(t)$ умножить на 2 и полученный результат уменьшить на 1 ([36], стр. 588, 589).

Установленную связь (102) между функциями $\Phi(t)$ и $F(t)$ легко проверить графически на основании сравнения заштрихованных площадей на рис. 4, а и 4, б.

§ 13. Вычисление интеграла вероятностей

Функция $\Phi(t)$ имеет большое применение в теории вероятностей.

При вычислении значений этой функции для заданных значений аргумента t она не может быть выражена через элементарные функции, взятые в конечном числе.

Учитывая, что в практике приходится иметь дело с не очень большими значениями аргумента t (так, в расчетах, связанных с теорией ошибок, $t \leq 3$ практически исчерпывает все интересующие нас случаи; см. табл. 3), вычислим значение $\Phi(t)$ по формуле (89) путем

разложения подинтегральной функции $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ в ряд Маклорена и последующего интегрирования частной суммы.

Примем

$$-\frac{1}{2}x^2 = z.$$

Тогда, раскладывая e^z в ряд Маклорена, получим

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots,$$

или

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{1! \cdot 2} + \frac{x^4}{2! \cdot 4} - \frac{x^6}{3! \cdot 8} + \frac{x^8}{4! \cdot 16} - \frac{x^{10}}{5! \cdot 32} + \frac{x^{12}}{6! \cdot 64} \mp \dots,$$

т. е.

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080} \mp \dots \quad (103)$$

Этот ряд по теореме Абеля сходится равномерно в любом конечном интервале.

Подставив значение $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ из (103) в (89), получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} - \frac{x^{10}}{3840} + \frac{x^{12}}{46080} - \dots \right) dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^t dx - \frac{1}{2} \int_0^t x^2 dx + \frac{1}{8} \int_0^t x^4 dx - \frac{1}{48} \int_0^t x^6 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{384} \int_0^t x^8 dx - \frac{1}{3840} \int_0^t x^{10} dx + \frac{1}{46080} \int_0^t x^{12} dx - \dots \right); \end{aligned}$$

после интегрирования получим

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \frac{x^9}{3456} - \frac{x^{11}}{42\,240} + \right. \\ \left. + \frac{x^{13}}{599\,040} - \dots \right) \Big|_0^t,$$

или

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} - \frac{t^{11}}{42\,240} + \frac{t^{13}}{599\,040} - \dots \right). \quad (104)$$

Ряд в правой части (104) также сходится при всех конечных значениях t . Общий член этого ряда имеет вид

$$(-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n! (2n+1)}; \quad (105)$$

здесь $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ представляет показатель степени t в вычисляемом члене разложения (104), уменьшенный на единицу и деленный на 2 (например, для члена с t^{13} $n = 6$), или — порядковый номер дробного члена.

Для вычисления значения функции $\Phi(t)$ с учетом (105) может быть написана более общая формула

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n! (2n+1)}. \quad (106)$$

Пользуясь формулами (104) или (106), легко подсчитать, сколько членов разложения нужно удержать при вычислении значения функции $\Phi(t)$, чтобы в зависимости от аргумента t получить заданную точность.

Из анализа известно, что если в сходящемся знакочередующемся ряде отбросить все члены, начиная с $(n+1)$ -го, то остаток $R_n = S - S_n$ имеет знак первого отброшенного $(n+1)$ -го члена и будет меньше его по абсолютной величине.

Таким образом, ошибка вычисленного значения интеграла вероятностей $\Phi(t)$ будет удовлетворять условию

$$\Delta\Phi(t) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n! (2n+1)}. \quad (107)$$

Пример. Определить, каким членом разложения можно пренебречь при вычислении $\Phi(t)$ для $t = 2,0$, если ошибка вычислений задана и не должна превышать по модулю 0,015. Ставим условие в соответствии с формулой (106) и заданной ошибкой 0,015 и находим n .

$$\left| \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n! (2n+1)} \right| \leq \Delta\Phi(2,0);$$

$$\left| 0,798 (-1)^n \cdot \frac{(2,0)^{2n+1}}{2^n \cdot n! (2n+1)} \right| \leq 0,015.$$

Методом подбора определим n ; примем сначала $n = 5$, тогда

$$-0,798 \frac{(2,0)^{11}}{2^5 \cdot 5! \cdot 11} = -0,039,$$

что по абсолютной величине больше 0,015; примем $n = 6$, тогда

$$+ \left(0,798 \cdot \frac{(2,0)^{13}}{2^6 \cdot 6! \cdot 13} \right) = +0,011,$$

что по абсолютной величине меньше 0,015.

Поставленное условие: $\Delta \Phi(2,0) \leq 0,015$ будет выполнено, если при вычислении значения функции $\Phi(2,0)$ будут удержаны члены разложения в (104) или (106) с t^{11} (при $n = 5$) и не приняты во внимание члены, начиная с содержащего t^{13} (неучет члена с t^{15} вносит ошибку в $\Phi(t)$, равную $-0,0034$, а неучет члена с $t^{13} = +0,011$).

Очевидно, что вычисление значений $\Phi(t)$ даже для небольших аргументов t связано с большими техническими трудностями. Это обстоятельство потребовало составления таблиц интеграла вероятностей, первые из которых были составлены Крампом в 1799 г. ([30], стр. 26). В настоящее время во всех руководствах и пособиях по теории вероятностей помещаются таблицы значений интеграла вероятностей, составляемых непосредственно по таблицам академика А. А. Маркова. Марков составил таблицы значения интеграла

$$\Phi_M(t) = \int_t^{\infty} e^{-x^2} \cdot dx$$

для значений x от 0 до 4,8 с точностью до 11-й значащей цифры. От значений $\Phi_M(t)$ таблиц Маркова легко перейти к значениям $F(t)$ интегральной функции, так как (см. [30], стр. 31)

$$F(t\sqrt{2}) = \frac{1 + \Phi_M(t)}{2}.$$

Переход от значений функции $F(t)$ к значениям интеграла вероятностей $\Phi(t)$ осуществляется по формуле связи (102).

Таблицы значений интеграла вероятностей

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx$$

и таблицы плотности вероятности нормального распределения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

для t от 0 до 8 помещены в прилож. 1 и 2.

§ 14. Числовые характеристики случайных величин

При практическом использовании теории вероятностей для получения общей количественной характеристики случайных величин необходимо знать некоторые их числовые постоянные, основными

из которых являются математическое ожидание, моменты, среднее квадратическое отклонение (стандарт), дисперсия, эксцесс, асимметрия.

Математическое ожидание

Математическим ожиданием $M(X)$ прерывной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины, которые она может получить в процессе опыта, на соответствующие им вероятности.

Таким образом, при наличии таблицы распределения (см. табл. 2), по определению математического ожидания и при условии, что число возможных значений случайной величины x_i конечное, можно записать

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (108)$$

где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, поскольку учтены все возможные значения x .

Если выражение математического ожидания (108) распространить на дискретные величины, имеющие бесконечное число возможных значений x_i , то в этом случае

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (109)$$

Учитывая, что в (108) и (109) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, иногда пишут

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}. \quad (110)$$

Формула (110) позволяет дать механическую интерпретацию математического ожидания: $M(X)$ является абсциссой центра тяжести системы точек, абсциссы которых равны значениям случайной величины, которые она может принимать или принимает в процессе опыта, а массы, помещенные в эти точки, равны соответствующим вероятностям.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (111)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности распределения случайной величины X .

Для нормального распределения

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx, \quad (112)$$

где $\varphi(x)$ — плотность вероятности нормального распределения.

Пример. Вероятность попадания в цель при выстреле $p = 0,5$. Определить математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах.

Решение. Вероятности возможного числа попаданий 0, 1, 2, 3, 4 равны

$$P_4(0) = C_4^0 q^4 p^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(0) = 0,0625$$

$$P_4(1) = C_4^1 q^3 p^1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(1) = 0,2500$$

$$P_4(2) = C_4^2 q^2 p^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(2) = 0,3750$$

$$P_4(3) = C_4^3 q^1 p^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(3) = 0,2500$$

$$P_4(4) = C_4^4 q^0 p^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4; \quad P_4(4) = 0,0625$$

$$\text{Контроль: } \sum P_n(k) = 1,0000$$

Математическое ожидание числа попаданий при четырех выстрелах

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5;$$

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,250 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,250 + 4 \cdot 0,0625;$$

$M(X) = 2$ попадания (наиболее возможное $k_0 \approx np$; $k_0 \approx 4 \cdot 0,5 = 2$ попадания).

Реальный алгебраический смысл математического ожидания станет яснее, если установить его связь со средним арифметическим. Заметим, что средним арифметическим называют величину, вычисляемую по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (113)$$

Докажем, что при неограниченно большом числе испытаний пределом среднего арифметического является математическое ожидание случайной величины. Рассуждения будем вести применительно к формуле (108), т. е. для прерывных случайных величин, отметив при этом, что все полученные выводы можно распространить и на непрерывные случайные величины.

Пусть в процессе опыта случайная величина с численным значением

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{появилась} & M_1 \text{ раз} \\ x_2 & \text{»} & M_2 \text{ »} \\ x_3 & \text{»} & M_3 \text{ »} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & \text{»} & M_n \text{ »} \end{array}$$

На основании формулы (113) можем записать

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 M_3 + \dots + x_n M_n}{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n}. \quad (114)$$

Обозначим

$$M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = N;$$

N — число всех испытаний.

Тогда

$$\bar{x} = x_1 \frac{M_1}{N} + x_2 \frac{M_2}{N} + x_3 \frac{M_3}{N} + \dots + x_n \frac{M_n}{N}. \quad (115)$$

В (115) дроби

$$\frac{M_1}{N}, \quad \frac{M_2}{N}, \quad \frac{M_3}{N}, \quad \dots, \quad \frac{M_n}{N}$$

по определению (1) есть относительные частоты, т. е.

$$\frac{M_1}{N} = Q_1; \quad \frac{M_2}{N} = Q_2; \quad \frac{M_3}{N} = Q_3; \quad \dots; \quad \frac{M_n}{N} = Q_n.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + x_3 Q_3 + \dots + x_n Q_n. \quad (116)$$

На основании теоремы Бернулли (§ 3), переходя к пределу и заменяя в (116) Q_i соответствующими значениями p_i , получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = M(X). \quad (117)$$

Таким образом, математическое ожидание $M(X)$ является как бы теоретическим средним значением случайной величины ([40], стр. 138).

Рассмотрим свойства математического ожидания для прерывных случайных величин, вытекающие из определения $M(X)$.

Первое свойство. Математическое ожидание $M(X)$ имеет ту же размерность, что и значения случайной величины.

Это свойство очевидно, так как в (108) $x_1, x_2, \dots, x_n$ умножаются на вероятности, которые являются отвлеченными числами.

Второе свойство. Математическое ожидание $M(X)$ может быть как положительным, так и отрицательным числом в зависимости от знаков значений случайной величины. Это свойство также очевидно.

Третье свойство. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной, т. е.

$$M(C) = C,$$

где C — постоянная.

Это свойство также не требует доказательства.

Четвертое свойство (теорема сложения математических ожиданий). Математическое ожидание суммы двух или нескольких

независимых случайных величин равно сумме математических ожиданий этих случайных величин, т. е.

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y); \quad (118)$$

$$M(X + Y + \dots + W) = M(X) + M(Y) + \dots + M(W). \quad (119)$$

Доказательство. Докажем частный случай формулы (118). Для случайных величин X и Y запишем

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i);$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^k y_j p(y_j).$$

Для (118) по определению математического ожидания можно записать

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i + y_j) \cdot p(x_i y_j), \quad (120)$$

где $p(x_i y_j)$ — вероятность совместного появления возможных значений x_i и y_j .

Выражение (120) можно переписать так:

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^k p(x_i y_j) + \sum_{j=1}^k y_j \sum_{i=1}^n p(x_i y_j). \quad (121)$$

Для независимых событий

$$p(x_i y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j). \quad (122)$$

С учетом (122) выражение (121) примет вид

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \sum_{j=1}^k p(y_j) + \sum_{j=1}^k y_j p(y_j) \sum_{i=1}^n p(x_i). \quad (123)$$

Но в (123)

$$\sum_{j=1}^k p(y_j) = 1; \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1.$$

Следовательно,

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) + \sum_{j=1}^k y_j p(y_j),$$

или

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y), \quad (124)$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно распространить это доказательство на любое число слагаемых.

Пятое свойство (теорема умножения математических ожиданий). Математическое ожидание произведения двух или несколь-

ких независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих случайных величин, т. е.

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y); \quad (125)$$

$$M(X \cdot Y \cdot Z \cdot \dots \cdot W) = M(X) \cdot M(Y) \cdot M(Z) \cdot \dots \cdot M(W). \quad (126)$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (125). На основании определения математического ожидания можно записать

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h x_i y_j p(x_i y_j),$$

где x_i и y_j — различные значения величин X и Y соответственно; $p(x_i y_j)$ — вероятность произведения $x_i y_j$.

Для независимых случайных величин имеем

$$p(x_i y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j).$$

Или

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^h x_i y_j p(x_i) \cdot p(y_j) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \cdot \sum_{j=1}^h y_j \cdot p(y_j). \quad (127)$$

Окончательно, пользуясь определением математического ожидания и полученным выражением (127), имеем

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y), \quad (128)$$

что и требовалось доказать.

Полученный вывод (128) легко распространить на любое число независимых случайных величин.

Шестое свойство. Математическое ожидание произведения случайной величины на постоянную равно произведению математического ожидания случайной величины на постоянную величину, т. е.

$$M(CX) = C \cdot M(X), \quad (129)$$

где C — постоянная величина.

Доказательство. На основании пятого свойства можно для (129) записать

$$M(C \cdot X) = M(C) \cdot M(X).$$

Но по третьему свойству

$$M(C) = C.$$

Следовательно,

$$M(CX) = C \cdot M(X),$$

что и требовалось доказать.

Все свойства математического ожидания для прерывных случайных величин справедливы и для непрерывных случайных величин. Разумеется, при рассмотрении свойств математического ожидания в данном случае необходимо исходить из определения $M(X)$, выражаемого формулой (111).

В теории вероятностей различают начальные и центральные моменты.

Н а ч а л ь н ы м м о м е н т о м порядка k случайной величины X называют математическое ожидание k -й степени этой случайной величины, т. е.

$$\nu_k = M(X^k). \quad (130)$$

Ц е н т р а л ь н ы м м о м е н т о м порядка k случайной величины называют математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$, т. е.

$$\mu_k = M\{[X - M(X)]^k\}. \quad (131)$$

Для прерывной случайной величины X на основании (130) и (131) можно соответственно записать

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i, \quad (132)$$

где x_i — различные возможные значения случайной величины X ; p_i — соответствующие вероятности;

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n \{x_i - M(X)\}^k \cdot p_i. \quad (133)$$

На основании связи (117) среднего арифметического $\bar{x}$ с математическим ожиданием $M(X)$, в соответствии с которой

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = M(X),$$

для эмпирических распределений* формулы (132) и (133) можно упростить и записать

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k Q_i; \quad (134)$$

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k Q_i. \quad (135)$$

Здесь Q_i — относительные частоты появления значений случайной величины, получаемых из массовых наблюдений.

В частном случае, когда для возможных значений x_i относительные частоты Q_i одинаковы (например, каждое значение x_i

* Иногда для теоретических и эмпирических распределений моменты обозначают разными буквами, например для теоретического — μ_k , для эмпирического — m_k .

появилось один раз), формулы (134) и (135) еще упростятся и примут вид

$$v_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k;$$

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k.$$

Для непрерывной случайной величины X в соответствии с формулами (130), (131) для начального и центрального моментов запишем

$$v_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx; \quad (136)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - M(X)\}^k \cdot f(x) dx. \quad (137)$$

В (136) и (137) $f(x)$ — плотность вероятности распределения непрерывной случайной величины X .

Пользуясь формулами (132), (133), (134) и (135), легко установить, что

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= 1 \\ \mu_0 &= \bar{x} \\ v_1 &= \bar{x} \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= v_2 - v_1^2 \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 \end{aligned} \right\}; \quad (138)$$

$$\mu_{2i+2} = (2i+1) \cdot \mu_{2i} \cdot \mu_2 \quad (i = 1, 2, 3 \dots). \quad (139)$$

Формула (139) позволяет вычислять центральные моменты четного порядка для теоретической связи, начиная с момента четвертого порядка, через момент второго порядка.

Так, например,

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mu_{2i+2} = 3\mu_2^2 \quad (i = 1) \\ \mu_6 &= \mu_{2i+2} = 15\mu_2^3 \quad (i = 2) \\ \mu_8 &= \mu_{2i+2} = 105\mu_2^4 \quad (i = 3) \\ &\dots \end{aligned}$$

При использовании моментов обычно ограничиваются моментами 4-го порядка; для надежного определения моментов более высокого порядка необходимо число испытаний (наблюдений) довести до нескольких тысяч.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение (стандарт)

Дисперсия как одна из важнейших числовых характеристик случайной величины дает возможность оценить разброс значений этой случайной величины, вызываемый наличием при опыте ошибок наблюдений, неучетом колебаний условий и другими факторами.

При наличии двух рядов наблюдений одной и той же случайной величины X , в одном из которых разброс меньше, т. е. различные значения случайной величины теснее группируются около среднего значения, по самим отклонениям $X - M(X)$ можно составить некоторое суждение о точности наблюдений этих рядов. Заметим, однако, что во многих случаях ошибки наблюдений бывают ничтожно малы или даже отсутствуют совсем. (Например, при определении числа бракованных изделий в суточной выработке.)

Однако частные значения отклонений $X - M(X)$ сами по себе ничего не характеризуют, а математическое ожидание отклонения случайной величины, как легко убедиться, равно нулю вследствие взаимной компенсации отклонений положительных и отрицательных значений. Среднее значение из абсолютных значений этих отклонений также не всегда дает хороший результат при оценке разброса, так как результаты сильно сглаживаются и большие отклонения становятся мало ощутимыми, особенно при значительном числе испытаний.

С целью устранения указанных недостатков принято рассматривать не сами отклонения, а их вторые степени. В этом случае большие отклонения сказываются на конечном результате оценки значительно больше, чем малые. Привлечение для этой цели более высоких степеней $X - M(X)$ связано, как было отмечено выше, с дополнительной трудностью, вызываемой тем, что в практике приходится ограничиваться сравнительно небольшим числом испытаний (наблюдений).

Д и с п е р с и е й $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания, т. е.

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \quad (140)$$

Из формулы (140) следует, что дисперсия случайной величины есть не что иное, как центральный момент второго порядка, а именно

$$D(X) = \mu_2.$$

Для прерывной случайной величины X

$$D(X) = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i,$$

или в более простом виде, с учетом (117)

$$D(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (141)$$

Для непрерывной случайной величины X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \{x_i - M(X)\}^2 f(x) dx. \quad (142)$$

Иногда обозначают

$$D(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2. \quad (143)$$

Величина $\sigma = \sqrt{D(X)}$ называется средним квадратическим или стандартным отклонением (иногда — стандартом). Среднее квадратическое отклонение σ обладает по сравнению с дисперсией $D(X)$ несомненным преимуществом: оно имеет ту же размерность, что и случайная величина. Отметим, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины.

Часто пользуются относительной числовой характеристикой разброса или так называемым коэффициентом вариации γ , представляющим отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию, выраженное в процентах, т. е.

$$\gamma = \frac{\sigma}{M(X)} \cdot 100\%, \quad (144)$$

исключая, конечно, случай, когда $M(X) = 0$.

Если в формуле дисперсии (141) x_i — различные значения случайной величины, полученные из наблюдений, а $\bar{x}$ — точное (истинное) значение этой величины, то разность $\Delta_i = x_i - \bar{x}$ называют истинной ошибкой. Дисперсия $D(X)$ в этом случае будет представлять собой квадрат средней квадратической ошибки m^2 , т. е.

$$D(X) = m^2,$$

а

$$m = \sigma.$$

Формула средней квадратической ошибки, вычисленной по истинным ошибкам (так называемая формула Гаусса), имеет вид *

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (145)$$

где знак $[\]$ — Гауссова сумма,

$$[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2,$$

n — число всех ошибок (наблюдений).

В последующем изложении понятие средней квадратической ошибки используется более часто, чем понятие среднего квадратического отклонения.

* При получении численного значения средней квадратической ошибки обычно ему приписывают знаки « $\pm$ ».

Понятия математического ожидания и дисперсии нетрудно применить для биномиального распределения вероятностей.

Определим математическое ожидание числа появлений события $M(k)$.

По определению

$$M(k) = \sum_{i=1}^n k_i p_i. \quad (146)$$

Таблица распределения для данного случая примет вид табл. 4.

Т а б л и ц а 4

k_i	0	1	2	3	...	n
P_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	$P_n(3)$	...	$P_n(n)$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M(k) &= 0 \cdot P_n(0) + 1 P_n(1) + 2 P_n(2) + 3 P_n(3) + \dots + n P_n(n) = \\ &= 0 \cdot q^n + 1 \cdot n p q^{n-1} + 2 \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(k-1)!} p^k q^{n-k} + \dots + n(n-1) p^{n-1} \cdot q + n p^n. \end{aligned} \quad (147)$$

Вынесем в правой части выражения (147) произведение np за скобку

$$\begin{aligned} M(k) &= np \left\{ q^{n-1} + (n-1) p q^{n-2} + \frac{(n-1) \dots (n-k+1)}{(k-1)!} p^{k-1} \cdot q^{n-k} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (n-1) p^{n-2} \cdot q + p^{n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (148)$$

Но

$$\begin{aligned} \left\{ q^{n-1} + (n-1) p q^{n-2} + \frac{(n-1) \dots (n-k+1)}{(k-1)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k} + \dots + \right. \\ \left. + (n-1) p^{n-2} q + p^{n-1} \right\} = (q + p)^{n-1}. \end{aligned} \quad (149)$$

Вместе с тем

$$(q + p)^{n-1} = 1, \quad (150)$$

так как $q + p = 1$. С вероятностной точки зрения $(q + p)^{n-1}$ есть вероятность появления всевозможных комбинаций $(n-1)$ сложных событий, составляющих полную группу событий. Вероятность того, что при одном испытании какое-либо из $(n-1)$ сложных событий произойдет, равна единице, т. е. $(q + p)^{n-1} = 1$.

Из (148) с учетом (150) следует

$$M(k) = np. \quad (151)$$

Напомним, что вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях согласно формуле (56)

$$k_0 \approx np.$$

Отсюда вытекает, что математическому ожиданию соответствует наибольшая вероятность.

Определим теперь дисперсию числа появлений события при многократных испытаниях.

По определению (140)

$$D(k) = M\{[k - M(k)]^2\} = \sum_{i=0}^n (k_i - np)^2 \cdot p_i \quad (152)$$

или

$$D(k) = (0 - np)^2 \cdot P_n(0) + (1 - np)^2 P_n(1) + \dots + (n - np)^2 P_n(n). \quad (153)$$

Выполнив несложные преобразования в правой части формулы (153) ([10], стр. 146—147), которые здесь опущены, нетрудно установить, что

$$D(k) = npq, \quad (154)$$

а среднее квадратическое отклонение числа появлений для биномиального распределения

$$\sigma = \sqrt{npq}. \quad (155)$$

Экссесс

Экссесом в теории вероятностей называют величину, вычисляемую по формуле

$$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad (156)$$

и характеризующую положение вершины кривой эмпирического распределения относительно кривой нормального распределения.

В формуле (156) приняты следующие обозначения:

E — эксцесс;

μ_4 — четвертый центральный момент;

μ_2 — второй центральный момент ($\mu_2^2 = \sigma^4$).

Пользуясь формулой (139) для вычисления центральных моментов четного порядка

$$\mu_{2i+2} = (2i+1) \cdot \mu_{2i} \cdot \mu_2,$$

легко показать, что для теоретического (нормального) распределения эксцесс равен нулю, так как

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{(2i+1) \cdot \mu_{2i} \cdot \mu_2}{\mu_2^2} = 3 \quad (i=1).$$

Отклонение эксцесса эмпирического распределения от его теоретического значения, т. е. от нуля, будет указывать на отклонение эмпирического распределения от нормального, причем, если $E \geq 0$, распределение будет «высоковершинным», если $E < 0$ — «низковершинным» (рис. 5).

Не требует пояснений утверждение, что эмпирическое распределение может точно совпасть с нормальным по чистой случайности или при числе испытаний неограниченно большом. Таким образом, исследователь практически всегда при вычислении эксцесса эмпирического распределения получит величину, отличную от нуля.

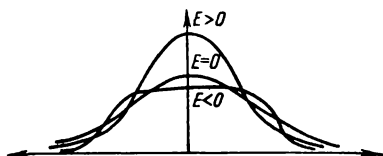


Рис. 5

Но дело заключается в том, можно ли считать полученное значение эксцесса несущественным при данных условиях, а, следовательно, отклонение вершины кривой эмпирического распределения от нормальной кривой — допустимым.

Для этой цели применяют следующую эмпирическую формулу, позволяющую вычислять среднее квадратическое отклонение эксцесса

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}}, \quad (157)$$

где n — число наблюдений (испытаний).

Если число наблюдений не очень мало ($n > 50$), эмпирическое распределение можно считать совпадающим с теоретическим (нормальным) с вероятностью 0,997 при условии

$$|E| \leq 3\sigma_E; \quad (158)$$

здесь

$|E|$ — абсолютное значение эксцесса,

σ_E — среднее квадратическое отклонение эксцесса, взятое со знаком «+».

Асимметрия

В практике встречаются случаи, когда эмпирическая кривая распределения является как бы скошенной. В качестве числовой характеристики в этом случае применяют так называемый показатель асимметрии

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (159)$$

где Sk — показатель асимметрии (Sk — первые буквы слова *skewness* — скошенность),

μ_3 — третий центральный момент,

σ^3 — третья степень среднего квадратического отклонения (очевидно, $\sigma^3 = \mu_2^{\frac{3}{2}}$).

Для симметричных распределений, каким является и нормальное, очевидно, что теоретическое значение $Sk = 0$, так как суммы положительных и отрицательных кубов отклонений при вычислении μ_3 по формуле (131) взаимно компенсируются. Когда Sk окажется больше нуля, кривая будет скошена влево, а когда Sk окажется меньше нуля — вправо (рис. 6).

Для нормального распределения при большом числе испытаний n среднее квадратическое отклонение показателя асимметрии может быть вычислено по эмпирической формуле

$$\sigma_{Sk} = \sqrt{\frac{6}{n}}.$$

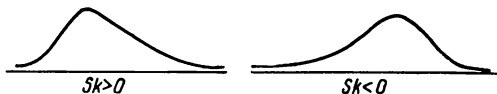


Рис. 6

Если будет выполнено условие

$$|Sk| \leq 3\sigma_{Sk}, \quad (160)$$

то эмпирическое распределение можно считать приближенно симметричным.

Иногда вместо показателя асимметрии Sk применяют постоянную Пирсона β_1 , называемую мерой скошенности, равную

$$\beta_1 = S^2k = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}.$$

Нетрудно установить, что ([4], стр. 55)

$$\sigma_{\beta_1}^2 = 4S^2k \sigma_{Sk}^2; \quad \sigma_{\beta_1} = \sqrt{\beta_1} \cdot \sqrt{\frac{24}{n}}.$$

Условию (160) аналогично условие

$$|\beta_1| \leq 3\sigma_{\beta_1}.$$

Недопустимые отклонения Sk от нуля в большинстве случаев означают наличие в результатах наблюдений односторонне действующих ошибок. Понятие односторонне действующих ошибок доступно без дополнительных пояснений, однако к ним мы еще вернемся ниже.

Пример. При исследовании светодальномера одна и та же линия была измерена 16 раз. Пользуясь данными, помещенными в таблице 5, вычислить центральные моменты $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, дисперсию $D(X)$, среднее квадратическое отклонение σ , эксцесс E , среднее квадратическое отклонение эксцесса σ_E , асимметрию Sk и среднее квадратическое отклонение асимметрии σ_{Sk} . В графе «Вычисление» табл. 5 приведен расчет числовых характеристик.

Таблица 5

№ по пор.	Результаты измерений S_i , м	$\delta S_i = S_i -$ $-S_{\text{ср}}, \text{ мм}$	δS_i^2	δS_i^3	Вычисление
1	6994,911	+17,8	316,84	+5639,8	$\mu_1 = \frac{-0,2}{16} = 0,0;$
2	,890	-3,2	10,24	-32,8	$\mu_2 = \frac{1186}{16} = 74,2;$
3	,879	-14,2	201,64	-2863,3	$\mu_3 = \frac{+653}{16} = +40,8;$
4	,895	+1,8	3,24	+5,8	
5	,882	-11,2	125,44	-1404,9	$\mu_4 = \frac{199\ 313}{16} = 12\ 457;$
6	,898	+4,8	23,04	+110,6	$\sigma = 8,6 \text{ мм};$
7	,885	-8,2	67,24	-551,4	
8	,883	-10,2	104,04	-1061,2	$E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3;$
9	,902	+8,8	77,44	+681,5	$E = \frac{12\ 457}{5506} - 3;$
10	,901	+7,8	60,84	+474,6	
11	,895	+1,8	3,24	+5,8	$E = -0,74;$
12	,894	+0,8	0,64	+0,5	$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{16}} = 1,22;$
13	,896	+2,8	7,84	+22,0	$ E < \sigma_E;$
14	,883	-10,2	104,04	-1061,2	$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3};$
15	,895	+1,8	3,24	+5,8	$Sk = \frac{40,8}{640} = 0,06;$
16	,902	+8,8	77,44	+681,5	$\sigma_{Sk} \approx \sqrt{\frac{6}{n}} = 0,61;$
					$ Sk < \sigma_{Sk} $
$S_{\text{ср}} = 6994,8932$		$\Sigma = -0,2$	$\Sigma = 1186,4$	$\Sigma = +653,1$	$\Sigma \delta S_i^4 = 199313$

Как нетрудно видеть из результатов вычислений, эксцесс и асимметрию здесь можно считать несущественными, а эмпирическое распределение — нормальным.

§ 15. Закон нормального распределения для случайных величин

До сих пор речь шла о законе нормального распределения вероятностей для числа появлений события при многократных испытаниях, точнее — для отклонений этого числа от его вероятнейшего

значения. В качестве аргумента функции распределения было принято значение

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad (77)$$

однако при наблюдениях каких-либо иных случайных величин (а не числа появлений события, в частности) аргумент x по формуле (77) определить нельзя. Найдем формулу, позволяющую определять аргумент x функции нормального распределения для любой многократно наблюдаемой случайной величины.

В основу вывода искомой формулы возьмем формулу (80)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \Delta x,$$

где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Перепишем формулу (80) в таком виде

$$P_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx, \quad (161)$$

где P_x — вероятность значения x .

Так как

$$dx = \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

то с увеличением числа испытаний n вероятность P_x будет неограниченно уменьшаться.

Представим теперь аргумент x в таком виде

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\frac{k}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \left(\frac{k}{n} - p \right).$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \frac{k}{n} - p &= z \\ \sqrt{\frac{n}{2pq}} &= h_0 \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Тогда можем написать

$$\left. \begin{aligned} x &= h_0 \sqrt{2} \cdot z \\ dx &= h_0 \sqrt{2} \cdot dz \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Подставляя значение x и dx из (163) в (161), получим

$$P_z = \frac{h_0}{\sqrt{\pi}} e^{-h_0^2 z^2} \cdot dz \quad (164)$$

и в интегральной форме

$$P_{z_1}^{z_2} = \frac{h_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-h_0^2 z^2} \cdot dz. \quad (165)$$

В качестве аргумента функции распределения, выраженной формулами (164) и (165), служит

$$z = \frac{k}{n} - p,$$

т. е. отклонение значения случайной величины (относительной частоты) от ее математического ожидания — вероятности

$$M\left(\frac{k}{n}\right) = p.$$

Учитывая рассмотренный частный случай, можем написать для любой случайной величины X , подчиняющейся закону нормального распределения

$$P_X = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} \cdot dz, \quad (166)$$

$$P_{x_1}^{x_2} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2 z^2} \cdot dz, \quad (167)$$

где

$$z = X - M(X),$$

$$z_i = x_i - M(X).$$

Однако если в формулах (164) и (165) параметр h_0 нам известен, то в формулах (166) и (167) параметр h остается пока неизвестным. Выясним его смысл.

Очевидно, что вероятности разных значений случайной величины зависят от степени разброса этих значений. Поэтому должна существовать связь параметра h с характеристикой указанного разброса, т. е. с дисперсией σ^2 . Установим эту связь.

По определению дисперсии (140) и (143)

$$D(X) = \sigma^2 = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

Но

$$X - M(X) = z,$$

поэтому

$$\sigma^2 = M(z^2),$$

т. е.

$$\sigma^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} \cdot dz. \quad (168)$$

Возьмем интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} \cdot dz = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{z} de^{-h^2 z^2} = -\frac{1}{2h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-h^2 z^2}, \quad (169)$$

учитывая, что

$$de^{-h^2 z^2} = -2h^2 z e^{-h^2 z^2} \cdot dz.$$

Выражение

$$z \cdot de^{-h^2 z^2}$$

можно проинтегрировать по частям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-h^2 z^2} = ze^{-h^2 z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} \cdot dz. \quad (170)$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\begin{aligned} ze^{-h^2 z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{e^{h^2 z^2}} - \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{z}{e^{h^2 z^2}} = \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{2h^2 z e^{h^2 z^2}} - \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{2h^2 z e^{h^2 z^2}} = 0. \end{aligned}$$

Равенство (170) теперь перепишем так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-h^2 z^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2} \cdot dz.$$

Обозначая

$$hz = u,$$

откуда

$$dz = \frac{du}{h},$$

и учитывая, что пределы интегрирования не изменятся, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z de^{-h^2 z^2} = -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du = -\frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cdot du$$

есть интеграл Пуассона, равный $\sqrt{\pi}$.

Обращаясь теперь к (169), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2} \cdot dz = \left(\frac{-1}{2h^2} \right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{h} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}$$

и, наконец, согласно (168)

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2h^2} \\ \text{или} \quad h^2 &= \frac{1}{2\sigma^2} \end{aligned} \right\}. \quad (171)$$

Формулы (171) устанавливают связь параметра закона нормального распределения значений любой случайной величины с ее дисперсией.

Выразим теперь h^2 через σ^2 и h через σ в (166)

$$P_X = \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \cdot dz.$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{\sigma} &= x \\ \frac{dz}{\sigma} &= dx \end{aligned} \right\}. \quad (172)$$

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} P_X &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \\ \text{и} \quad P_{\pm t} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \Phi(t) \end{aligned} \right\}, \quad (173)$$

где $\pm t$ — пределы интегрирования и аргумент функции интеграла вероятностей, значения которого даны в приложении 1, в соответствии с формулой (89).

Таким образом, для получения интегралов вероятностей для любой случайной величины X необходимо знать $M(X)$ и стандарт распределения σ . Тогда аргументами функции $\Phi(t)$, а стало быть, и соответствующих таблиц будут служить «н о р м и р о в а н н ы е з н а ч е н и я»

$$t = \frac{z}{\sigma},$$

где

$$z = X - M(X).$$

Полученные формулы имеют исключительно важное значение для практики. Они позволяют пользоваться законом нормального распределения для решения задач, связанных с любыми случайными величинами X , подчиняющимися этому закону. Для определения аргумента

$$t_i = \frac{x_i - M(X)}{\sigma}$$

интегральной функции распределения необходимо знать две основные характеристики

$$M(X)$$

и

$$\sigma^2 = M\{[X - M(X)]^2\}.$$

Точность этих двух параметров, а следовательно, и эффективность применения теории вероятностей зависит от числа наблюдений случайной величины. При малом числе наблюдений полученные результаты исследования будут ненадежны.

§ 16. Понятие о других видах распределения

Практика показывает, что при анализе экспериментальных данных рассмотренные выше распределения — биномиальное и нормальное — не исчерпывают вопроса, так как иногда приходится иметь дело с наблюдаемыми величинами, по своей природе не подчиняющимися этим законам. Примером могут служить ошибки округлений, которые в некотором интервале распределяются равномерно.

Рассмотрим некоторые из распределений, связанных с нормальным.

Распределение Пуассона

Вывод формулы (76)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

базируется на предположении, что вероятность p постоянна и не близка к нулю (или единице). Если последнее условие о величине p не выполнено, формулу (76) применять нельзя; в этом случае $P_n(k)$ следует вычислять по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{k_0^k \cdot e^{-k}}{k!}, \quad (174)$$

где k_0 — вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях.

Распределением Пуассона, или распределением редких событий, называется распределение случайной величины X , при котором она может принимать только целочисленные значения $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями, определяемыми формулой (174), причем $k_0 = np$ небольшое, а n — число испытаний очень велико.

Функция распределения в данном случае имеет вид

$$P(X = k) = e^{-k_0} \sum \frac{k_0^k}{k!}. \quad (175)$$

Заметим, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины в этом случае равны параметру распределения Пуассона, т. е.

$$M(X) = D(X) = np. \quad (176)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины в случае распределения Пуассона равно

$$\sigma = \sqrt{np}. \quad (177)$$

Пример ([23], стр. 263, 264). Предполагая, что число частиц золота, падающих во взвешенном состоянии в растворе, распределяется по закону Пуассона, найти выражение этого закона по распределению частиц золота, наблюдавшихся через 2 сек в оптически изолированной части пространства, приведенному в табл. 6.

Решение. Вычислим среднюю арифметическую (математическое ожидание) и дисперсию случайной величины. В соответствии с данными табл. 6 имеем

$$M(X) = \bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n}; \quad \bar{x} = \frac{2259}{1583} = 1,42703 \approx 1,43;$$

$$D(X) = \mu_2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i; \quad D(X) = \frac{2397,2}{1583} = 1,51.$$

Довольно хорошее совпадение математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$, равных 1,43 и 1,51 соответственно, подтверждает предположение о наличии распределения Пуассона. Выражение для закона Пуассона в данном случае примет вид

$$P(X = k) = \frac{(1,43)^k \cdot e^{-1,43}}{k!}, \quad (178)$$

Т а б л и ц а 6

Количество частиц x_i	Количество интервалов n_i	Вычисления		
		$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x}) n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
0	381	-1,42703	-543,7	775,9
1	568	-0,43703	-242,6	103,6
2	357	+0,57297	+204,6	117,2
3	175	+1,57297	+275,3	433,0
4	67	+2,57297	+172,4	443,6
5	28	+3,57297	+100,0	357,3
6	5	+4,57297	+22,9	104,7
7	2	+5,57297	+11,1	61,9
Итого	1583	Контроль $\sum x_i n_i = 2259$ $\bar{x} = 1,42703$	-786,3 +786,3 $\Sigma = 0,0$	$\Sigma = 2397,2$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ — возможное количество частиц золота, находящихся во взвешенном состоянии в растворе, наблюдавшееся через 2 сек в оптически изолированной части пространства. По формуле (178) можно вычислить вероятность для заданного числа k .

Распределение Шарлье

При рассмотрении количественных характеристик случайных величин отмечалось, что в практике встречаются случаи, когда распределения асимметричны и отличаются от нормального (показатель

асимметрии $Sk \neq 0$; эксцесс $E \neq 0$). При небольших показателях асимметрии Sk и эксцесса E такие распределения могут быть выравнены при помощи распределения Шарлье. Число появлений случайной величины x в заданном интервале Δx в этом случае вычисляется по формуле

$$M = \frac{N \cdot \Delta x}{\sigma} \varphi(t) \left[1 + \frac{Sk}{6} (t^3 - 3t) + \frac{E}{24} (t^4 - 6t^2 + 3) \right], \quad (179)$$

где N — число всех наблюдений;

Δx — величина интервала (x разбивается на одинаковые интервалы);

$\varphi(t)$ — плотность вероятности нормального распределения, равная

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}};$$

E — эксцесс;

t — коэффициент кратности (нормированное значение), равный

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

Затем вычисляется критерий χ^2 — «хи-квадрат»

$$\chi^2 = \sum \frac{(M' - M)^2}{M'}, \quad (180)$$

где M' — наблюдаемое число появлений случайной величины в интервале Δx .

По таблице, приведенной в приложении 4, пользуясь χ^2 и числом степеней свободы k как аргументами (число степеней свободы представляет разность между числом опытов и числом параметров: σ , Sk , E , $\bar{x}$), можно найти вероятность. Если вероятность окажется не мала, то расхождение между M' и M можно считать несущественным. Величины M' и M можно сравнить и непосредственно ([33], стр. 67).

Распределение Стьюдента

При использовании формул интеграла вероятностей и интегральной функции предполагается, что n (число испытаний) достаточно большое. В этом случае стандарт распределения будет определен надежно. Однако иногда среднее квадратическое отклонение определяется по небольшому числу наблюдений (10—20) и, следовательно, само значение σ (или m) будет ошибочным. Так, П. И. Шилов ([39], стр. 7), основываясь на зависимости средней квадратической ошибки от числа наблюдений, выражаемой формулой

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad (181)$$

приводит значения (в %) этой ошибки, приведенные в табл. 7.

Число наблюдений n	2	3	4	5	6	7	8	9
$m_n = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \cdot 100\%$	71	50	41	35	32	29	27	25

Из табл. 7 следует, что значение σ или m , определенное по небольшому числу наблюдений n , содержит большие ошибки (см. значение ошибок при $n = 2-10$).

В этих случаях, т. е. при малом числе испытаний ($n \leq 20$), рекомендуется пользоваться распределением Стьюдента.

Распределением Стьюдента при любом $n \geq 2$ называется распределение с плотностью распределения вероятностей

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad (182)$$

где Γ — гамма-функция;

$(n-1)$ — число степеней свободы (в теории ошибок — число избыточных измерений);

$t = \frac{X - M(X)}{\sigma}$ — нормированное значение случайной величины.

Как известно из алгебры, понятие факториала может быть распространено на любые числа x , в том числе и на комплексные, при помощи гамма-функции, определяемой выражением

$$\Gamma(x) \left\{ \begin{array}{l} = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{x-1} dz \quad (\text{только при } x > 0) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \quad (\text{для любых } x) \end{array} \right\}. \quad (183)$$

Гамма-функция обладает рядом свойств, в частности,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

при n целом положительном. Этими свойствами воспользуемся для дальнейших рассуждений. Для целых положительных x

$$\Gamma(x+1) = x!$$

Функция распределения

$$F_S(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot dt. \quad (184)$$

Таблица 7

10	12	14	16	18	20	25	30	40	50	75	100
24	21	20	18	17	16	14	13	11	10	8	7

Чаще функция распределения $F_S(t)$ записывается в виде

$$F_S(t) = C \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot dt,$$

где постоянный множитель

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Таблица значений

$$2C \int_0^{t_0} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot dt = p$$

приведена в приложении 5. С помощью таблиц значений t_p можно определять значение t_p по заданной вероятности p или вероятность p ($t < t_p$).

П. И. Шилов [39] приводит для $p = 0,95$ и $p = 0,99$ при $n \geq 2$ значения t_p , помещенные в табл. 8.

Таблица 8

n	t_p		n	t_p	
	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$		$t_{0,95}$	$t_{0,99}$
2	12,7	63,7	12	2,2	3,1
3	4,3	9,9	13	2,2	3,1
4	3,2	5,8	14	2,2	3,0
5	2,8	4,6	15	2,1	3,0
6	2,6	4,0	16	2,1	2,9
7	2,4	3,7	20	2,1	2,9
8	2,4	3,5	25	2,0	2,8
9	2,3	3,4	30	2,0	2,8
10	2,3	3,2	∞	1,96	2,58
11	2,2	3,2			

П. И. Шилов делает вывод, что к таблицам Стьюдента следует прибегать при $n \leq 10$; В. И. Романовский ([33], стр. 83) делает

аналогичный вывод для $n < 20$. Например, придерживаясь рекомендации П. И. Шилова для $n > 10$, можно прийти к выводу, что распределение Стьюдента мало отличается от нормального. В самом деле, при $n = 10$ $t_{0,95} = 2,3$ и $t_{0,99} = 3,2$; при $n = 20$ при тех же значениях $\Phi(t)$ находим: $t_{0,95} = 2,09$ и $t_{0,99} = 2,86$. Для нормального распределения, пользуясь таблицей значений интеграла вероятностей $\Phi(t)$ приложения 1, находим

$$\Phi(t_1) = 0,95, \quad t_1 = 1,96,$$

$$\Phi(t_2) = 0,99, \quad t_2 = 2,58.$$

При числе испытаний неограниченно большом, как следует из сравнения значений t_1 и t_2 с данными строки ∞ таблицы 8, коэффициенты совпадают точно, т. е. распределение Стьюдента совпадает с нормальным. Практически же при степенях свободы $(n-1) = 13$ с вероятностью 0,99, т. е. близкой к достоверности, $t = 3,012$. Следовательно, использование в качестве допусков (например, для предельного значения невязки) $2m$ и $3m$ с вероятностью 0,95 и 0,99 вполне оправдано уже при $n > 10$.

Равномерное распределение

При обработке результатов наблюдений часто приходится иметь дело со случайными величинами, возможные значения которых равновероятны в некотором конечном интервале. Выше указывалось, что таким распределением обладают, например, ошибки округлений. Такое распределение носит название *равномерного*. Плотность равномерного распределения случайной величины X выражается функцией

$$f_r(x) = \frac{1}{x_1 - x_2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{при } x_2 < x < x_1 \\ 0 & \text{вне этого интервала,} \end{cases} \quad (185)$$

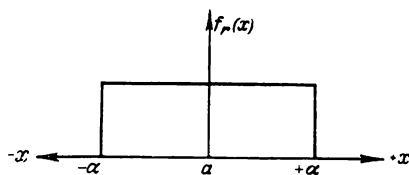


Рис. 7

где

$$x_1 = a - \alpha; \quad x_2 = a + \alpha,$$

a — абсцисса центра интервала.

График функции $f_r(x)$ представлен на рис. 7. Так как график функции $f_r(x)$ изображается прямоугольником,

распределение часто называют *прямоугольным*.

Функция распределения $F_r(x)$ имеет вид

$$F_r(x) = \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} \frac{dx}{2a} = 1. \quad (186)$$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. По определению математического ожидания (111) можем записать

$$M(X) = \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} x \frac{dx}{2\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} x dx = \frac{x^2}{4\alpha} \Big|_{a-\alpha}^{a+\alpha} = \\ = \frac{1}{4\alpha} [(a+\alpha)^2 - (a-\alpha)^2], \quad (187)$$

или

$$M(X) = \frac{1}{4\alpha} [(a+\alpha)^2 - (a-\alpha)^2] = a. \quad (188)$$

Дисперсия по (140) равна в этом случае

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = M\{X^2 - 2XM(X) + M(X) \cdot M(X)\} = \\ = M(X^2) - M[2X \cdot M(X)] + M[M(X) \cdot M(X)],$$

или

$$D(X) = M(X^2) - 2a^2 + a^2 = M(X^2) - a^2. \quad (189)$$

Но

$$M(X^2) = \int_{a-\alpha}^{a+\alpha} x^2 \frac{1}{2\alpha} \cdot dx = \frac{x^3}{6\alpha} \Big|_{a-\alpha}^{a+\alpha}; \quad (190) \\ M(X^2) = \frac{x^3}{6\alpha} \Big|_{a-\alpha}^{a+\alpha} = \frac{1}{6\alpha} [(a+\alpha)^3 - (a-\alpha)^3].$$

После несложных преобразований в правой части (190) получим

$$M(X^2) = a^2 + \frac{\alpha^2}{3}. \quad (191)$$

С учетом (191) дисперсия $D(X)$ из (189) будет равна

$$D(X) = M(X^2) - a^2 = a^2 + \frac{\alpha^2}{3} - a^2 = \frac{\alpha^2}{3}. \quad (192)$$

Среднее квадратическое отклонение σ , следовательно, равно

$$\sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (193)$$

Напомним, что α — это наибольшая величина, на которую может отклоняться значение случайной величины от ее математического ожидания, т. е. α — это абсолютное значение предельного отклонения.

ЭЛЕМЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

§ 17. Понятие о статистических связях

При математической обработке результатов наблюдений, производимых при конструировании и исследовании новых инструментов и методов работ, а также при решении ряда других научно-технических задач часто приходится устанавливать зависимость полученных результатов от какой-либо главной причины (фактора) или от главного источника ошибок. Если зависимость между наблюдаемыми величинами будет установлена и выражена формулой, то ее можно использовать при предвычислении ожидаемой точности исследуемого прибора или для надлежащей организации наблюдений и обработки их результатов. При этом могут встретиться две формы связи между количественными или качественными признаками: функциональная и статистическая. Ограничимся рассмотрением связей лишь между двумя величинами.

Функциональной связью между двумя переменными величинами x и y называют такую связь, при которой каждому значению x соответствует одно определенное значение y . Так, например, между объемом шара V и его радиусом R существует функциональная связь

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Статистической связью между двумя переменными x и y называют такую связь, при которой каждому значению x соответствует распределение значений y , изменяющееся вместе с изменением x .

Пример ([5], стр. 89). При испытании светодальномера СВВ-1 в 1953 г. были получены результаты, приведенные в табл. 9.

Таблица 9

№ серий	Число наблюдений в серии	Расстояние, измеренное СВВ-1, D , км	Средняя ошибка одного приема, вычисленная как среднее арифметическое из абсолютных значений ошибок в серии, Δ , см
1	30	0,4	21
2	106	0,8	31
3	91	1,0	35
4	131	2,7	52
5	36	4,5	40

Если бы была возможность вместо табл. 9 привести все значения ошибок для каждого отдельного наблюдения, связь между D и Δ вообще не усматривалась бы. По данным же таблицы, в которой выписаны средние значения ошибок,

можно видеть, что с увеличением D ошибка Δ растет при $D = 0,4 \div 2,7$ и только при переходе D от 2,7 к 4,5 уменьшается. Следовательно, несмотря на имеющееся отклонение от выявленной закономерности, можно утверждать, что с увеличением измеряемого расстояния абсолютное значение средней ошибки имеет тенденцию увеличиваться.

Выше рассмотрен пример, когда между средними значениями двух переменных величин существует статистическая корреляционная связь. Задача исследователя сводится к тому, чтобы установить тесноту связи, т. е. оценить при помощи так называемого коэффициента корреляции степень близости корреляционной связи к функциональной и установить форму этой связи, выражаемую формулой, позволяющей предвычислять средние значения одной переменной по заданным значениям другой. Различают линейные и нелинейные корреляционные связи; в дальнейшем будут рассмотрены только линейные связи.

§ 18. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции является мерой тесноты линейной корреляционной связи и вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y}, \quad (194)$$

где

$$\frac{x_i \mid x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n}{y_i \mid y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n}$$

различные значения переменных x_i и y_i , полученные из наблюдений,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ — среднее арифметическое величины } x;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \text{ — среднее арифметическое величины } y;$$

σ_x — среднее квадратическое отклонение x (стандарт x);

σ_y — среднее квадратическое отклонение y (стандарт y);

n — число наблюдений (значений x_i, y_i). Величины σ_x и σ_y вычисляются по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}. \quad (195)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \quad (196)$$

Таким образом, если предварительные графические построения покажут, что связь между x и y близка к линейной (точки на графике располагаются в прямолинейной области), то вычисляют средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$, разности $x_i - \bar{x}$ и $y_i - \bar{y}$ и по ним, пользуясь формулами (195) и (196), вычисляют средние квадратические отклонения σ_x и σ_y (положительные значения корней) и, наконец, по формуле (194) вычисляют коэффициент корреляции.

§ 19. Свойства коэффициента корреляции

Рассмотрим основные свойства коэффициента корреляции.

1) Коэффициент корреляции изменяется в пределах от -1 до $+1$, т. е.

$$-1 \leq r \leq +1.$$

2) Когда коэффициент корреляции равен $+1$ или -1 , между x и y существуют точные прямолинейные связи, т. е.

$$y = ax + c,$$

$$x = by + d.$$

В случае, когда $r = +1$, с увеличением или уменьшением x увеличивается или уменьшается y . В случае, когда $r = -1$ с увеличением x уменьшается y и с уменьшением x увеличивается y .

3) Если $r = 0$, между x и y прямолинейной корреляционной связи не существует (нелинейная связь может существовать).

4) Чем ближе коэффициент корреляции r к $+1$ или -1 , тем ближе корреляционная связь между переменными x и y к функциональной; чем ближе коэффициент корреляции к 0, тем, соответственно менее связаны между собой переменные x и y .

Естественно возникает вопрос: с какой надежностью вычисляется само значение коэффициента корреляции и при каком минимальном абсолютном его значении еще можно считать связь существующей, и наоборот.

Возникает, таким образом, необходимость оценки надежности коэффициента корреляции.

При числе наблюдений $n \geq 50$ В. И. Романовский ([33], стр. 184) рекомендует для среднего квадратического отклонения коэффициента корреляции применять формулу

$$\sigma_r \approx \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}. \quad (197)$$

Связь считается установленной, если выполняется условие

$$|r| \geq 3\sigma_r. \quad (198)$$

Наименьшая величина коэффициента корреляции $r_{\min}$, удовлетворяющего условию (198), в зависимости от числа наблюдений n может быть вычислена по формуле ([21], стр. 241)

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}.$$

Пример. Пусть при вычислениях коэффициент корреляции оказался равным $r = +0,26$; $n = 394$.

Оценим точность коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1 - (0,26)^2}{\sqrt{394}} = 0,05.$$

С вероятностью 0,997 можно ожидать, что

$$r \pm 3\sigma_r = 0,26 \pm 3 \cdot 0,05 \\ + 0,11 \leq r \leq + 0,41. \quad (199)$$

Вычислим

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{394 + 36} - \sqrt{394}}{6} = 0,17.$$

Нижняя граница коэффициента корреляции r в (199) оказалась меньше минимального значения ($0,11 < 0,17$); следовательно, линейную корреляционную связь нельзя считать установленной, хотя условие (198) выполнено ($0,26 > 0,15$).

Для оценки надежности коэффициента корреляции при $n < 50$ пользуются специальной функцией, так называемым критерием Фишера (см. [21], стр. 242)

$$z = \frac{1}{2} \{ \ln(1 + r) - \ln(1 - r) \}, \quad (200)$$

которая подчиняется закону нормального распределения. Среднее квадратическое отклонение величины z вычисляется по формуле

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (201)$$

Значения величин z по вычисленным из опыта значениям коэффициента корреляции r могут быть вычислены непосредственно по формуле или по таблицам, приведенным в приложении 6.

Пример. В табл. 10 помещены результаты испытания СВВ-1 в 1955 г. ([5], стр. 91). Определить коэффициент корреляции, характеризующий тесноту связи между измеренными длинами линий D и их ошибками $|m_{20}|$, и оценить точность коэффициента корреляции, используя критерий Фишера. На основании данных табл. 10 имеем

$$\sigma_D = 2,12; \quad \sigma_m = 1,75; \quad r = +0,68; \\ z = 0,83 \text{ (найден по таблицам);} \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 3}} = 0,41.$$

С вероятностью 0,68 ($t = 1$) величина z может принять значения

$$0,42 \leq z \leq 1,24. \quad (202)$$

По той же таблице (прилож. 6), пользуясь крайними значениями z из (202), находим соответствующие им значения коэффициента корреляции

$$+0,40 \leq r \leq +0,85. \quad (203)$$

Следовательно, с вероятностью 0,68 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между 0,40 и 0,85.

Вычислим минимально допустимое значение коэффициента корреляции

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{9 + 36} - \sqrt{9}}{6} = 0,62.$$

№ по пор.	Результаты наблюдений		Вычисление				
	$D, \text{ км}$	$ m_{20} , \text{ см}$	$\delta D = D_i - \bar{D}$	$\delta m = m_i - \bar{m}$	δD^2	δm^2	$\delta D \cdot \delta m$
1	3,0	2,0	-2,6	-2,2			
2	3,6	5,0	-2,0	+0,8			
3	4,2	3,0	-1,4	-1,2			
4	4,6	4,0	-1,0	-0,2			
5	5,6	6,0	0,0	+1,8			
6	5,7	3,0	+0,1	-1,2			
7	5,8	3,0	+0,2	-1,2			
8	8,0	4,0	+2,4	-0,2			
9	10,2	8,0	+4,6	+3,8			
	$\bar{D} = 5,6$	$ \bar{m} = 4,2$	-7,0 +7,3	-6,2 +6,4	$\Sigma 40,7$	27,6	+22,6

Суммы Σ вычислены на арифмометре набором результатов

Так как нижний предел r в (203) меньше $r_{\min}$ ($0,40 < 0,62$), вопрос об установлении линейной корреляционной зависимости нуждается в дополнительном исследовании.

Использование же формулы (197) для оценки надежности коэффициента корреляции в этом примере приводит к результату

$$\sigma_r = 0,18; \quad 0,18 \times 3 < 0,68,$$

т. е. связь как бы установлена. Из этих противоречивых выводов следует, что при малом числе n оценка точности по формуле (197), впрочем как и по любой другой формуле, ненадежна.

§ 20. Уравнение регрессии

Для вывода эмпирической формулы, отражающей прямолинейную корреляционную связь между переменными x и y , применяется уравнение

$$y_i - \bar{y} = Q_{y/x} \cdot (x_i - \bar{x}), \quad (204)$$

где

$Q_{y/x}$ — коэффициент регрессии y на x , вычисляемый по формуле

$$Q_{y/x} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

При прямолинейной корреляционной связи между переменными x и y существует уравнение регрессии x на y , имеющее вид

$$x_i - \bar{x} = Q_{x/y} (y_i - \bar{y}), \quad (205)$$

где $Q_{x/y}$ — коэффициент регрессии x на y , равный

$$Q_{x/y} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.$$

Однако во многих случаях уравнение вида (205), если исследовалась зависимость y от x , не имеет смысла; например, никто не станет по ошибкам измерений m_D (в рассмотренном выше примере) определять расстояние D .

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов регрессии при большом n вычисляется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{q_{y/x}} &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \\ \sigma_{q_{x/y}} &= \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \end{aligned} \right\}. \quad (206)$$

Уравнение (204) при практическом использовании целесообразно привести к виду

$$y_i = q_{y/x} \cdot x_i + (\bar{y} - q_{y/x} \cdot \bar{x}). \quad (207)$$

Из формулы (207) легко видеть, что коэффициент регрессии — это тангенс угла наклона прямой, а постоянное слагаемое $(\bar{y} - q_{y/x} \times \bar{x})$ — это отрезок, отсекаемый этой прямой на оси ординат.

Пример. В табл. 11 приведены расстояния D , измеренные светодальномером СВВ-1, и ошибки этих сторон Δ .

По данным табл. 11 вычислить коэффициент корреляции, коэффициент регрессии, оценить их точность с вероятностью не менее 0,90 и составить уравнение регрессии.

По данным, полученным при вычислении в табл. 11, имеем

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{61,48}{20}} = 1,75; \quad \sigma_\Delta = \sqrt{\frac{39,22}{20}} = 1,40;$$

коэффициент корреляции по (194) равен

$$r = \frac{+38,66}{20 \cdot 1,75 \cdot 1,40} = +0,79.$$

Оценим надежность коэффициента корреляции. Так как число наблюдений n сравнительно небольшое, для оценки надежности применим критерий Фишера z .

По таблице, помещенной в приложении 6, пользуясь коэффициентом корреляции $r = +0,79$, как аргументом, находим

$$z = 1,0714.$$

Оценим надежность z по формуле (201)

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 3}} = 0,243.$$

С вероятностью 0,90 ($t = 1,65$) величина z может принять значения

$$\begin{aligned} 1,0714 - t \cdot \sigma_z &\leq z \leq 1,0714 + t \cdot \sigma_z, \\ 0,6705 &\leq z \leq 1,4723. \end{aligned}$$

Из таблицы (прилож. 6) находим соответствующие крайним значениям z (0,60 и 1,34) значения коэффициента корреляции

$$+0,59 \leq r \leq +0,90. \quad (208)$$

№ по пор.	Результаты наблюдений		Вычисления				
	D, км	\Delta , см	\delta D	\delta \Delta	\delta D^2	\delta \Delta^2	\delta D \cdot \delta \Delta
1	8,7	7,0	+3,8	+3,2	14,44	10,24	+12,16
2	3,7	3,0	-1,2	-0,8	1,44	0,64	+0,96
3	6,0	4,0	+1,1	+0,2	1,21	0,04	+0,22
4	3,3	3,0	-1,6	-0,8	2,56	0,64	+1,28
5	5,1	4,0	+0,2	+0,2	0,04	0,04	+0,04
6	6,1	4,0	+1,2	+0,2	1,44	0,04	+0,24
7	2,7	3,0	-2,2	-0,8	4,84	0,64	+1,76
8	4,9	4,0	0,0	+0,2	0,0	0,04	0,00
9	3,1	4,0	-1,8	+0,2	3,24	0,04	-0,36
10	3,7	2,0	-1,2	-1,8	1,44	3,24	+2,16
11	5,7	6,0	+0,8	+2,2	0,64	4,84	+1,76
12	4,9	5,0	0,0	+1,2	0,0	1,44	0,00
13	5,6	3,0	+0,7	-0,8	0,49	0,64	-0,56
14	7,6	4,0	+2,7	+0,2	7,29	0,04	+0,54
15	4,2	3,0	-0,7	-0,8	0,49	0,64	+0,56
16	2,0	2,0	-2,9	-1,8	8,41	3,24	+5,22
17	4,0	2,0	-0,9	-1,8	0,81	3,24	+1,62
18	6,5	5,0	+1,6	+1,2	2,56	1,44	+1,92
19	7,2	6,0	+2,3	+2,2	5,29	4,84	+5,06
20	2,7	2,0	-2,2	-1,8	4,84	3,24	+3,96
Ср.	4,9	3,80	+14,4	+11,2	$\Sigma = 61,47$	39,20	+38,54
			-14,7	-11,2			
			$\Sigma = -0,3$	0,0			

Следовательно, с вероятностью не менее 0,90 действительный коэффициент корреляции может быть заключен между +0,59 и +0,90.

Минимальное значение r (при данном числе наблюдений $n = 24$)

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{20+36} - \sqrt{20}}{6} = 0,50.$$

Так как $0,50 < 0,59$, прямолинейную корреляционную связь можно считать установленной.

Определим σ_r по формуле (197), хотя, как было отмечено выше, она не совсем подходит в данном случае ($n < 50$).

$$\sigma_r \approx \left(\frac{1 - 0,79^2}{\sqrt{20}} \right) = \left(\frac{1 - 0,62}{\sqrt{20}} \right) = 0,085.$$

Как следует из неравенства (208), учитывая, что $t = 1,65$, σ'_r , определенное с помощью критерия Фишера, равно

$$\sigma'_r \approx \left(\frac{0,90 - 0,59}{2 \cdot 1,65} \right) = 0,094.$$

Из сравнения σ'_r и σ_r следует, что формула (197) дает хорошие результаты при $n = 20$, хотя принято считать необходимым условием для ее применения $n \geq 50$.

Составим теперь уравнение регрессии Δ на D

$$\Delta_i - \bar{\Delta} = q_{\Delta/D}(D_i - \bar{D}),$$

$$\Delta_i = q_{\Delta/D} \cdot D_i + (\bar{\Delta} - q_{\Delta/D} \cdot \bar{D}), \quad (209)$$

Подставляя в (209) численные значения r , σ_{Δ} , σ_D , $\bar{\Delta}$, $\bar{D}$, получим

$$\Delta_i = +0,79 \frac{1,40}{1,75} \cdot D_i + \left(3,8 - 0,79 \cdot \frac{1,40}{1,75} \cdot 4,9 \right);$$

$$\Delta_i = (0,63 \cdot D_i + 0,71) \text{ см},$$

где D_i — расстояния в километрах.

Оценим приближенно надежность коэффициента регрессии $q_{\Delta/D} = +0,64$:

$$\sigma_{q_{\Delta/D}} = \left(\frac{\sigma_{\Delta}}{\sigma_D} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}} \right),$$

$$\sigma_{q_{\Delta/D}} = \left(\frac{1,40}{1,75} \sqrt{\frac{1-0,79^2}{20-3}} \right) = 0,12.$$

Следовательно,

$$q_{\Delta/D} \pm \sigma_{q_{\Delta/D}} = 0,63 \pm 0,12.$$

Г Л А В А V

**ОШИБКИ НАБЛЮДЕНИЙ.
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК
И КРИТЕРИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ**

§ 21. Предмет и задачи теории ошибок

При осуществлении наблюдений исследуемых объектов наблюдатель обычно получает ряд значений некоторых физических величин, которые затем используются при расчетах, проектировании и т. д. Следует отметить, что наблюдатель при этом ставит перед собой задачу получить указанные значения физических величин с возможно большей точностью, или, иначе говоря, с возможно меньшей ошибкой. Однако понятия «возможно большая точность», «возможно меньшая ошибка» неконкретны, так как не сопровождаются числовыми характеристиками. Очевидно, при числовой характеристике ошибки, равной нулю, наблюдения следует считать выполненными безошибочно (идеальный случай). Вместе с тем опыт свидетельствует, что безошибочных наблюдений не бывает, какими бы точными инструментами они ни производились. Совершенствование инструментов и методики работ, выбор наилучших условий наблюдений могут привести к повышению точности, т. е. к уменьшению отклонений полученных значений наблюдаемой величины от ее точного (истинного) значения. Вопрос, следовательно, сводится к определению порядка величин ошибок, ожидаемых при данных условиях наблюдений.

Предполагается, что определяемая величина в процессе наблюдений остается постоянной. Если наблюдают переменную величину, то результат наблюдения должен быть отнесен к точно обозначенному моменту времени. Причины возникновения ошибок наблюдений весьма разнообразны и зависят от точности инструментов, внешних условий, при которых производятся наблюдения, от опытности наблюдателя, от характера определяемых физических величин и т. д.

В теории ошибок изучают причины возникновения и законы распределения ошибок наблюдений, а также свойства различных видов ошибок и разрабатывают методику наблюдений, позволяющую удерживать эти ошибки в заданных пределах.

Задачи, решаемые теорией ошибок, можно сформулировать следующим образом:

1. Изучение законов распределения ошибок наблюдений и определение способа (критерия) оценки точности полученных результатов.

2. Установление допусков, ограничивающих использование результатов наблюдений в заданных пределах точности.

3. Отыскание наиболее надежного значения определяемой величины по результатам ее многократных наблюдений.

4. Оценка и предвычисление точности как отдельных наблюдений, так и окончательного их результата.

Перед теорией ошибок стоит также целый ряд других (общих и частных) задач, выходящих за рамки перечисленных выше вопросов.

Перейдем к рассмотрению видов ошибок, наиболее часто встречающихся при наблюдениях.

§ 22. Классификация ошибок наблюдений

По своим свойствам, а также по характеру влияния на результаты наблюдений и их функции ошибки подразделяют на грубые, систематические и случайные.

Грубые ошибки

К грубым ошибкам относят промахи в наблюдениях, вызываемые невнимательностью наблюдателя, неисправностью инструмента, плохой организацией работы, неучетом влияния резко изменившихся внешних условий (температуры, ветра, видимости и т. п.).

Примером грубой ошибки может служить просчет при измерении угла (с отсчитыванием десятых долей минуты) на один градус, десять градусов и т. д.

Задача наблюдателя сводится к такой организации контроля наблюдений, чтобы грубые ошибки вовсе не имели места при исследовании объекта.

Для обнаружения грубых ошибок используют геометрические свойства наблюдаемых объектов (например, сумму углов в треугольнике), а также повторные наблюдения, которые можно выполнять с меньшей точностью, чем контролируемые результаты, но другим инструментом или методом. Так, например, при линейных измерениях для обнаружения промаха-пропуска целого пролета, равного длине мерного прибора, достаточно измерить линию нитяным дальномером, иногда даже — шагами.

Систематические ошибки

К систематическим относят такие ошибки наблюдений, которые входят в результат наблюдения по тому или иному закону в зависимости от источника возникновения ошибки. Систематические

ошибки подразделяют на постоянные и односторонне действующие *.

К постоянным систематическим ошибкам относят такие ошибки, которые в процессе наблюдений сохраняют свою величину и знак. Например, между действительной длиной мерного прибора и его номинальным значением существует какая-то разность. Эта разность будет постоянна для всех измерений, она будет искажать результаты этих измерений. Такого рода ошибку можно в значительной степени устранить из результатов измерений путем предварительного определения величины этой ошибки и введения поправки, примерно равной по величине постоянной систематической ошибке, но противоположной по знаку. Однако останется неустраненной ошибка определения указанной поправки — ошибка эталонирования. Эта ошибка останется как систематическая, хотя ее величина, по модулю, будет уже значительно меньшей.

Односторонне действующие ошибки — это более сложные систематические ошибки, которые при определенных условиях сохраняют знак, но изменяют свою величину в зависимости от изменения причины, которая их вызывает. Примером такого рода ошибки может служить ошибка, вызываемая неучетом температуры при измерении расстояния стальной лентой (рулеткой), если температура при этом колебалась в некоторых заметных пределах, но была, например, ниже температуры, при которой определялась эталонная длина ленты. Ошибка в этом случае все время будет сохранять один знак («+»), но величина ее в каждом пролете будет изменяться с изменением температуры. Односторонне действующие систематические ошибки могут быть изучены, предварительно определены или вычислены по данным, характеризующим причину, от которой они зависят, а основная часть их может быть исключена из результатов наблюдений путем введения поправок. Некоторые систематические ошибки могут быть устранены из результатов наблюдений путем организации «симметричных» наблюдений, в которых эти ошибки, примерно одинаковые по абсолютной величине, действуют во взаимно противоположных направлениях. В этом случае среднее из полученных результатов почти свободно от систематических ошибок. Следует подчеркнуть, что полностью устранить систематические ошибки из результатов наблюдений практически невозможно.

В любом случае наблюдатель должен стремиться обеспечить условия, при которых основная часть систематической ошибки была бы исключена из результатов наблюдений, а остаточное влияние систематических ошибок было бы ничтожно малым. Это, конечно, удастся сделать далеко не всегда, подчас приходится перестраивать организацию работ с целью выявления систематических ошибок. Более подробно свойства систематических ошибок изложены в [18].

* Строго говоря, систематические ошибки могут возникать и по другим законам, например периодическому, однако в данном пособии рассматриваются лишь постоянные и односторонне действующие ошибки.

Случайные ошибки

С л у ч а й н ы е ошибки наблюдений могут служить одним из наиболее ярких примеров случайной величины.

Под случайной ошибкой здесь и далее будем подразумевать разность между наблюдаемым значением случайной величины x_i и истинным (точным) значением X при условии исключения из результатов наблюдения влияния систематических ошибок, т. е.

$$\Delta_i = x_i - X. \quad (210)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

В зависимости от применяемого при наблюдениях инструмента, его точности, метода работ, внешних условий, квалификации наблюдателя и т. д. величина случайной ошибки будет меняться в процессе наблюдений, причем заранее нельзя указать, какое именно значение примет эта ошибка при данном наблюдении. Неучтенные колебания факторов, обуславливающих весь комплекс условий наблюдений, приводят к случайному изменению получаемых результатов.

Для дальнейшего изложения условно примем, что в любых результатах наблюдений грубые ошибки отсутствуют, основная часть систематических ошибок исключена из этих результатов, а остаточные систематические ошибки ничтожно малы.

Свойства случайных ошибок наблюдений проявляются при массовых испытаниях и могут быть характеризованы следующим образом.

Первое свойство. Для ряда результатов наблюдений с известным параметром распределения абсолютные величины случайных ошибок с заданной вероятностью p не превосходят определенного предела.

Очевидно, абсолютные величины ошибок с вероятностью $q = 1 - p$ превысят этот предел или будут равны ему.

Так, например, из 100 ошибок 32 в среднем превышают m (m — средняя квадратическая ошибка), 5 из 100 превышают $2m$; 1 из 100 превышает $2,5m$; 3 из 1000 превышают $3m$ и т. д.

В зависимости от комплекса условий наблюдений принимают такое значение вероятности q , которое считают ничтожно малым.

Второе свойство. Положительные и отрицательные случайные ошибки, равные по абсолютной величине, равновозможны, т. е.

$$p(+\Delta) = p(-\Delta) = \frac{1}{2}. \quad (211)$$

Третье свойство. Среднее арифметическое из значений случайной ошибки при неограниченном возрастании числа наблюдений имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \quad (212)$$

№ по пор.		Номера участков											Всего	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12
1	Средняя квадратическая ошибка обобщения рельефа в сантиметрах	$\pm 3,5$	$\pm 5,2$	$\pm 5,4$	$\pm 7,0$	$\pm 8,0$	$\pm 4,0$	$\pm 4,7$	$\pm 5,1$	± 4	$\pm 5,4$	$\pm 8,0$	$\pm 8,1$	
2	Число всех ошибок	220	161	115	100	59	95	93	104	115	353	236	108	1759
3	Число положительных ошибок	112	75	48	45	30	59	45	45	54	150	119	53	835
4	Число отрицательных ошибок	95	82	63	50	29	33	40	56	55	185	110	53	851
5	Число нулевых ошибок	13	4	4	5	0	3	8	3	6	18	7	2	73
6	Число ошибок в интервалах: $0 - m$ $m - 2m$ $2m - 3m$	162 47 9	108 46 7	81 29 5	73 21 5	37 21 1	69 23 3	66 20 7	67 35 2	74 35 6	256 76 17	169 54 13	73 31 4	1235 438 79
	Число ошибок, превышающих по абсолютной величине $3m$	2	0	0	1	0	0	0	0	0	4	0	0	7
7	Сумма положительных ошибок в сантиметрах	352	351	248	307	189	192	182	178	226	657	782	369	
8	Сумма отрицательных ошибок в сантиметрах	254	358	220	225	208	113	154	278	270	793	719	336	
9	Алгебраическая сумма ошибок в сантиметрах	+98	-7	+28	+82	-19	+79	+28	-100	-44	-136	+63	+33	
10	Среднее арифметическое из сумм ошибок в сантиметрах	+0,4	0	+0,2	+0,8	-0,3	+0,8	+0,3	-1,0	-0,4	-0,4	+0,3	+0,3	

На основании формул (117) и (212) можем записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = M(\Delta) = 0. \quad (213)$$

Отсюда третье свойство случайных ошибок окончательно можно сформулировать так: *математическое ожидание случайной ошибки равно нулю.*

Четвертое свойство. *Малые по абсолютной величине случайные ошибки встречаются при наблюдениях чаще, чем большие.*

В подавляющем большинстве случаев, встречающихся в практике обработки результатов наблюдений, случайные ошибки подчиняются закону нормального распределения вероятностей. Наглядным проявлением этого закона являются перечисленные выше свойства случайных ошибок, которым почти всегда достаточно хорошо отвечают исследуемые ряды ошибок наблюдений.

Пример. При исследовании точности съемки рельефа в разных условиях и на разных участках было получено 1759 ошибок обобщения рельефа при съемке ([7], стр. 18). Не вдаваясь в природу происхождения этих ошибок, приведем табл. 12, по данным которой проследим закономерности ошибок в опытном ряду.

Как видно из таблицы, во всех 12 опытных рядах ошибки обобщения рельефа хорошо отвечают свойствам случайных ошибок, а именно: почти не превышают величины, равной утроенной средней квадратической ошибки $3m$; число положительных и отрицательных ошибок примерно одинаково; среднее арифметическое из алгебраической суммы случайных ошибок (212) во всех рядах может считаться малым, по сравнению со средней квадратической ошибкой m ; малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие.

Способы оценки приближения действительного распределения к нормальному позволяют дать количественные характеристики степени этого приближения, приведенные в табл. 13.

Таблица 13

Интервалы ошибок	Число ошибок			Относитель- ная частота	Вероятность
	в опытном ряде D	в теоретиче- ском ряде T	разность $D - T$		
$0 - m$	1235	1206	+29	0,702	0,686
$m - 2m$	438	481	-43	0,249	0,272
$2m - 3m$	79	70	+9	0,045	0,039
$> 3m$	7	2	+5	0,004	0,003
Σ	1759	1759	0	1,000	1,000

Данные этой таблицы позволяют считать рассматриваемое распределение нормальным.

§ 23. Распределение вероятностей случайных ошибок

Возможные значения случайной ошибки нельзя предвычислить заранее, можно лишь указать границы, в которых она изменяется. Следовательно, случайная ошибка, как непрерывная случайная

величина, может вполне характеризоваться законом распределения вероятностей случайных ошибок. Этот закон, как известно, характеризует объективно существующую связь между возможными значениями случайной величины и относительной частотой их появления при многократных испытаниях.

Закон распределения случайной ошибки, представленный в виде функции распределения, может быть записан в следующем общем виде

$$F(\Delta) = P(\alpha \leq \Delta), \quad (214)$$

где $F(\Delta)$ — интегральная функция распределения ошибок Δ .

Таким образом, функцией распределения $F(\Delta)$ случайной ошибки α является вероятность того, что случайная ошибка α не превысит величины Δ .

Плотность вероятности распределения случайной ошибки по определению будет равна

$$\lim_{\delta\Delta \rightarrow 0} \frac{F(\Delta + \delta\Delta) - F(\Delta)}{\delta\Delta} = \varphi(\Delta), \quad (215)$$

где $\delta\Delta$ — приращение случайной ошибки.

Согласно рис. 8 вероятность того, что случайная ошибка α примет значение, заключенное между $\Delta + \delta\Delta$ и Δ , может быть представлена в следующем виде:

$$P(\Delta \leq \alpha \leq \Delta + \delta\Delta) = \varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta. \quad (216)$$

Примем обозначение для $\varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta$, которого и будем придерживаться,

$$p = \varphi(\Delta) \cdot \delta\Delta. \quad (217)$$

Геометрически вероятность p в (217) представляет на рис. 8 площадь заштрихованного элементарного участка при бесконечно малом значении $\delta\Delta$.

Прежде чем перейти к дальнейшим рассуждениям, приведем без доказательства важную теорему: «Если случайные ошибки удовлетворяют постулату Гаусса, то законом распределения случайных ошибок является нормальный закон». Постулат Гаусса состоит в свою очередь в том, что наиболее вероятным значением искомой величины является среднее арифметическое из результатов ее повторных наблюдений (если учитывать только случайные ошибки).

Производная (215) от непрерывной площади $F(\Delta)$, согласно теореме Лейбница — Ньютона, как известно, есть ордината. Воспользуемся этим положением для получения формулы для вычисле-

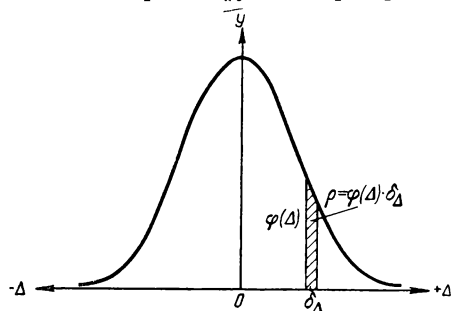


Рис. 8

ния ординат кривой ошибок (кривой нормального распределения) по заданным значениям Δ .

Обратимся к понятию нормированной случайной ошибки, введенному раньше (§ 15), т. е. примем, что

$$t = \frac{\Delta}{m}. \quad (218)$$

Пусть

$$dF(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt. \quad (219)$$

Тогда, принимая во внимание (218), имеем

$$dF(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{m}\right)^2} \cdot \frac{d\Delta}{m}. \quad (220)$$

Ордината кривой ошибок, как функция значений случайных ошибок Δ , равна

$$y = \frac{dF\left(t = \frac{\Delta}{m}\right)}{d\Delta} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{m}\right)^2}. \quad (221)$$

Обозначим в соответствии с (171)

$$\frac{1}{m\sqrt{2}} = h. \quad (222)$$

Смысл постоянной h , обычно называемой мерой точности, выясним несколько позднее.

С учетом (222) уравнение для ординаты y примет вид

$$\varphi(\Delta) = y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}. \quad (223)$$

Пример. Вычислить значения ординат кривой нормального распределения для ошибок $\Delta = 0, m, m\sqrt{2}, 2m, 3m$, если средняя квадратическая ошибка $m = \pm 0''{,}47$, и построить кривую ошибок.

Вычисления y проконтролировать по таблицам приложения 3.

Решение. а) Вычисление ординат по формуле (223)

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}. \quad (e = 2.718)$$

Составим табл. 14.

Таблица 14

№ по пор.	Заданное значение Δ_i	h	y	y'	Вспомогательные вычисления	
					$-h^2\Delta_i^2$	t_i
1	0	1,507	$\frac{1,507}{\sqrt{\pi}} \cdot e^0 = 0,851$	0,5641	0	0
2	m	1,507	$\frac{1,507}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-0,50} = 0,516$	0,342	-0,50	1

№ по пор.	Заданное значение Δ_i	h	y	y'	Вспомогательные вычисления	
					$-h^2 \Delta_i^2$	t_i
3	$m \sqrt{2}$	1,507	$\frac{1,507}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-1,0} = (-) 0,315$	0,209	-1,0	1,41
4	$2m$	1,507	$\frac{1,507}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-2,0} = (-) 0,115$	0,076	-2,0	2,0
5	$3m$	1,507	$\frac{1,507}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-4,5} = (-) 0,0095$	0,0063	-4,5	3,0

Примечание. $\lg e^{4,5} = 4,5 \lg e$; $\lg e^{4,5} = 4,5 \times 0,434 = 1,95$; $e^{4,5} = 89$;
 $e^{-4,5} = \frac{1}{89}$.

б) Построение кривой ошибок (рис. 9).

При построении кривой примем следующие масштабы:

$y = 0,851$ соответствует 3,35 см;

$\Delta = m \quad \rightarrow \quad 1,0 \text{ см.}$

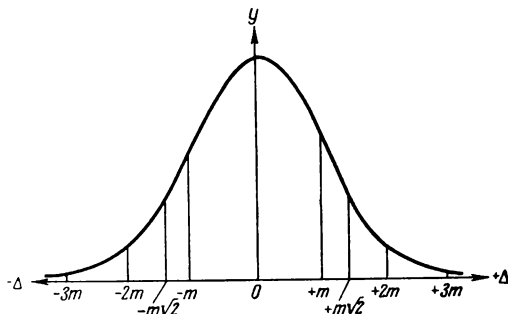


Рис. 9

Произведем вспомогательные вычисления; в соответствии с принятыми масштабами, получим табл. 15.

Таблица 15

Ордината		Абсцисса	
y	$y, \text{ см}$	Δ	$\Delta, \text{ см}$
0,851	3,35	0	0
0,516	2,03	m	1,00
0,315	1,24	$m \sqrt{2}$	1,41
0,115	0,45	$2m$	2,00
0,0095	0,037	$3m$	3,00

Заменяя в (217) $\delta \Delta$ на $d \Delta$ (при $\delta \Delta \rightarrow 0$), получим

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d\Delta. \quad (224)$$

Здесь p — вероятность появления случайной ошибки Δ , для каждого отдельного ее значения, стремящаяся к нулю.

Исходя из формулы (224), получим интеграл ошибок, выражающий вероятность того, что случайная ошибка будет заключена между $-\alpha$ и $+\alpha$, и равный

$$P_\alpha = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d\Delta. \quad (225)$$

Однако в расчетах рекомендуется пользоваться нормированной случайной ошибкой и для вычисления вероятностей применять интеграл вероятностей (89), для которого составлена таблица, приведенная в приложении 1.

§ 24. Свойства кривой ошибок (кривой Гаусса)

Кривая ошибок, как было указано ранее, задается уравнением (223) и показана на рис. 10.

Эта кривая обладает следующими свойствами:

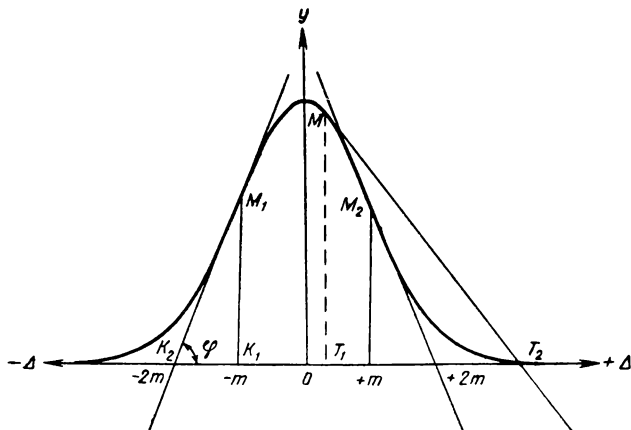


Рис. 10.

Первое свойство. Функция $\varphi(\Delta)$ четная, т. е.

$$\varphi(+\Delta) = \varphi(-\Delta) \quad (226)$$

и кривая ошибок в силу этого симметрична относительно оси ординат. Свойство очевидно.

Второе свойство. Так как ни при каких значениях Δ , положительных или отрицательных, функция $\varphi(\Delta)$ отрицательных значений не принимает

и в нуль не обращается, кривая ошибок лежит над осью абсцисс. Свойство очевидно.

Третье свойство. Функция $\Phi(\Delta)$ имеет максимум при значении случайной ошибки, равном нулю ($\Delta = 0$).

Докажем это свойство, для чего найдем первую производную $y' = \Phi'(\Delta)$ и приравняв ее к нулю, определим значение переменной Δ , обращающей первую производную в нуль. Итак, согласно (223),

$$\Phi'(\Delta) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \Delta \cdot e^{-h^2\Delta^2}. \quad (227)$$

Приравняв правую часть (227) к нулю

$$-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \Delta \cdot e^{-h^2\Delta^2} = 0, \quad (228)$$

видим, что условие (228) может быть выполнено только при $\Delta = 0$, что и требовалось доказать.

Четвертое свойство. Кривая ошибок имеет две точки перегиба: одну справа и одну слева от оси ординат, причем эти точки соответствуют значению случайной ошибки, равному средней квадратической ошибке, т. е. $|\Delta| = m$.

Для отыскания абсциссы точек перегиба найдем вторую производную $\Phi''(\Delta)$, для чего воспользуемся первой производной $\Phi'(\Delta)$ из (228)

$$\Phi''(\Delta) = \{\Phi'(\Delta)\}' = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2} + \frac{4h^5\Delta^2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}. \quad (229)$$

Преобразуем правую часть производной $\Phi''(\Delta)$ в (229) и, приравняв ее к нулю, найдем значение переменной Δ , обращающее вторую производную в нуль, т. е.

$$\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2} \cdot (2h^2\Delta^2 - 1) = 0. \quad (230)$$

Условие (230) будет выполнено, если один из сомножителей равен нулю. Из простого анализа левой части условия (230) вытекает, что единственно возможно

$$(2h^2\Delta^2 - 1) = 0. \quad (231)$$

Из (231) находим

$$\Delta = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \quad (232)$$

Но, так как мера точности

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}},$$

то с учетом этого по (232) имеем

$$\Delta = m. \quad (233)$$

Таким образом, абсцисса точек перегиба M_1 и M_2 (см. рис. 10) равна средней квадратической ошибке.

Пятое свойство. Касательные к кривой в точках перегиба отсекают на оси абсцисс отрезки, равные удвоенной средней квадратической ошибке ($2m$).

Докажем это свойство. Из рис. 10 следует, согласно четвертому свойству кривой, что отрезок прямой, концами которого являются начало координат (точка O) и основание ординаты точки перегиба (точка M_1), равен m . Для доказательства пятого свойства остается определить, чему равен отрезок

$$K_1K_2 = x = ?$$

Из прямоугольного треугольника $M_1K_1K_2$, в котором известны

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \varphi'(\Delta) \\ y &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \quad (\text{причем } \Delta = m) \end{aligned} \right\}, \quad (234)$$

имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (235)$$

или

$$\varphi'(\Delta) = \frac{y}{x}.$$

Из (235) и (227) следует

$$x = \frac{y}{\varphi'(\Delta)} = \frac{\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}}{-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \Delta \cdot e^{-h^2 \Delta^2}}; \quad x = \pm \frac{1}{2h^2 \Delta}. \quad (236)$$

В (236), как известно,

$$h = \frac{1}{m \sqrt{2}}, \quad \Delta = m,$$

следовательно,

$$x = m. \quad (237)$$

В более общем виде пятое свойство формулируется следующим образом ([36], стр. 527):

Произведение абсциссы на подкасательную в любой точке кривой ошибок есть величина постоянная, равная квадрату средней квадратической ошибки.

В вышеприведенных рассуждениях подкасательной является отрезок K_1K_2 (для точки кривой M_1), абсцисса этой точки $OK_1 = m$, но так как доказано, что $K_1K_2 = m$, то

$$K_1K_2 \cdot OK_1 = m^2. \quad (238)$$

Для произвольной точки M можем записать

$$T_1T_2 \cdot OT_1 = m^2. \quad (239)$$

Сопоставляя свойства кривой ошибок и свойства случайных ошибок (§ 22), легко установить между ними непосредственную связь.

В силу того, что кривая ошибок является частным случаем кривой нормального распределения, рассмотренные выше свойства кривой ошибок можно распространить на кривую нормального распределения с параметром $\sigma = 1$.

Выясним смысл и значение меры точности h . Если в (224) для ординаты кривой ошибок принять, что $\Delta = 0$, то легко видеть, что ордината

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}, \quad (240)$$

т. е. положение вершины кривой в полной мере определяется величиной h .

Из формулы (240) нетрудно установить, что если $h_3 < h_2 < h_1$ (рис. 11), то параметру h_1 соответствует более высокое положение вершины кривой ошибок и h_3 — более низкое, чем параметру h_2 . Но так как площадь кривой ошибок во всех трех случаях равна единице, то большему параметру соответствует более «узкая» в направлении оси ординат кривая, т. е. меньший разброс (рассеивание)

ошибок, более высокая точность наблюдений. Таким образом, большому параметру h_1 соответствует большая точность наблюдений, т. е. меньшие средние квадратические ошибки. Поэтому параметр h и называют мерой точности. Для вычисления ординат кривой ошибок по формуле (224) можно воспользоваться таблицами, приведенными в приложении 3.

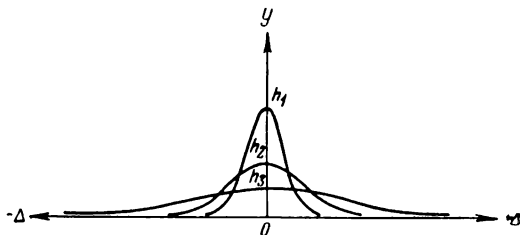


Рис. 11.

§ 25. Другие критерии, применяемые при оценке точности наблюдений

Кроме средней квадратической ошибки m , при оценке точности применяются иногда и другие критерии, а именно: средняя ошибка и вероятная ошибка.

Средней ошибкой ϑ называется среднее арифметическое из суммы абсолютных значений случайных ошибок, т. е.

$$\vartheta = \frac{[|\Delta|]}{n},$$

где

$$[|\Delta|] = |\Delta_1| + |\Delta_2| + \dots + |\Delta_n| -$$

сумма абсолютных значений случайных ошибок.

Вероятной ошибкой r называется такая величина, больше которой и меньше которой (по абсолютной величине) ошибки в ряде наблюдений равновозможны. Как следствие, вероятность вероятной ошибки

$$p(|\Delta| \leq r) = \frac{1}{2}. \quad (244)$$

Из определения вероятной ошибки вытекает способ ее отыскания: если все полученные ошибки

$$\Delta_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

расположить в ряд по убывающим или возрастающим значениям абсолютных величин, то вероятная ошибка окажется в середине ряда при n нечетном или берется как среднее из двух ближайших ошибок, расположенных по обе стороны середины ряда, при n четном.

По этой причине, т. е., исходя из способа отыскания, вероятную ошибку часто называют серединой.

Пример. Дан ряд случайных ошибок измерения размера некоторого изделия (ошибки в миллиметрах): $+8, -1, +13, -5, +6, -10, +4$.

Вычислить среднюю ϑ и вероятную r ошибки.

Решение. Складывая абсолютные значения всех ошибок, получим $[|\Delta|] = 47$ мм.

Следовательно,

$$\vartheta = \pm \left(\frac{47}{7} \right) = \pm 6,7 \text{ мм.}$$

Определим вероятную ошибку, для чего запишем: 1, 4, 5, 6, 8, 10, 13. Так как $n = 7$ нечетное, середина ряда приходится на число 6; следовательно, $r = \pm 6$ мм. Если бы измерений было 8 и, например, прибавилась бы еще ошибка, равная 10, то середина ряда пришлось бы в промежуток между ошибками 6 и 8; в этом случае

$$r = \pm \left(\frac{6+8}{2} \right) = \pm 7,0 \text{ мм.}$$

При нормальном распределении вероятностей ошибок наблюдений средняя квадратическая ошибка m , с одной стороны, и средняя ϑ и вероятная r ошибки, с другой стороны, связаны между собой определенным образом. Так как эти связи имеют очень важное значение для решения ряда теоретических и практических вопросов, в частности для оценки степени приближения действительного распределения к нормальному, установим форму связей между m и ϑ , m и r .

§ 26. Связь средней квадратической ошибки со средней ошибкой

Для установления связи между m и ϑ воспользуемся математическим ожиданием абсолютного значения случайной ошибки $|\Delta|$. По определению математического ожидания имеем

$$M(|\Delta|) = \sum_{-\Delta \text{ пред}}^{+\Delta \text{ пред}} |\Delta| \cdot p \quad (242)$$

или с учетом того, что

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d\Delta,$$

для случайной ошибки, как непрерывной случайной величины, запишем

$$M(|\Delta|) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta \text{ пред}}^{+\Delta \text{ пред}} |\Delta| \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d\Delta. \quad (243)$$

Расширив пределы интегрирования до $\pm \infty$ с учетом четности подинтегральной функции, из (243) получаем

$$M(|\Delta|) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} |\Delta| \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d\Delta. \quad (244)$$

Для интегрирования в формуле (244) подведем величину $-h^2 \Delta^2$ под знак дифференциала

$$d(-h^2 \Delta^2) = -2h^2 \cdot \Delta \cdot d\Delta,$$

откуда

$$d\Delta = \frac{d(-h^2 \Delta^2)}{-2h^2 \Delta}. \quad (245)$$

Подставив значение $d\Delta$ из (245) в (244), получим

$$M(|\Delta|) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty |\Delta| \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \cdot \frac{d(-h^2 \Delta^2)}{-2h^2 \Delta} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d(-h^2 \Delta^2),$$

или

$$M(|\Delta|) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-h^2 \Delta^2} \cdot d(-h^2 \Delta^2) = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2} \Big|_0^\infty. \quad (246)$$

Подставляя верхний и нижний пределы в (246), имеем

$$M(|\Delta|) = 0 - \left(-\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \quad (247)$$

На основании (117), при n неограниченно большом, средняя ошибка

$$\vartheta = M(|\Delta|). \quad (248)$$

Тогда (247) примет вид

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \quad (249)$$

Но так как $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$, то на основании (249)

$$m = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \cdot \vartheta,$$

или

$$m = 1,2532 \dots \vartheta.$$

Для практических целей достаточно принять

$$m \approx 1,25 \vartheta. \quad (250)$$

§ 27. Связь средней квадратической ошибки с вероятной ошибкой

По определению, вероятность вероятной ошибки

$$P(|\Delta| \leq r) = \frac{1}{2}.$$

Если воспользуемся нормированной вероятной ошибкой, то интеграл

$$\Phi\left(t = \frac{r}{m}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}. \quad (251)$$

Но, так как в этом случае

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} - \dots\right) = \frac{1}{2}, \quad (252)$$

то, ограничившись пока членом t^3 в (252), вычислим коэффициент t , связывающий r и m ,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} t \left(1 - \frac{t^2}{6} + \dots \right) \approx \frac{1}{2}. \quad (253)$$

В качестве первого приближения t для вычисления значения скобки в (253) примем

$$t' \approx \frac{0,500}{2} \sqrt{2\pi}. \quad (254)$$

Подставив t' из (254) в (253), имеем

$$t \approx \frac{0,500}{2 \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{0,500}{2} \sqrt{2\pi} \right)^2}{6} \right\}} \cdot \sqrt{2\pi} \approx 0,67.$$

Далее,

$$t \approx \frac{0,500}{2 \left(1 - \frac{0,67^2}{6} + \frac{0,67^4}{40} \right)} \approx 0,674. \quad (255)$$

Беря несколько приближений, можно вычислить таким образом коэффициент

$$t = \frac{r}{m}$$

с любой заданной точностью.

Более просто значение t можно определить по таблицам, приведенным в приложении 1. Найдя в таблицах значение интеграла вероятностей, равное 0,5000, находим $t = 0,6745$.

Следовательно,

$$m = \frac{1}{0,6745 \dots} \cdot r,$$

или

$$m = 1,4825 \dots \cdot r.$$

В большинстве случаев достаточно

$$m \approx 1,48 \cdot r. \quad (256)$$

§ 28. Использование соотношений между m , ϕ и r для оценки степени приближения действительного распределения к нормальному

Как уже было отмечено выше, формулы (250) и (256) применяют при теоретических расчетах и при оценке степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному.

Для этих целей, вычислив m , ϕ , r по данным опытного ряда, вычисляют коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{m}{\phi} \\ k_2 &= \frac{m}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (257)$$

Сравнивая вычисленные по формулам (257) коэффициенты с их теоретическими значениями ($k_1 = 1,25$, $k_2 = 1,48$), по отклонениям (k_1 вычисленное — 1,25) и (k_2 вычисленное — 1,48) судят о степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному.

П р и м е р. При исследовании точности съемки рельефа (см. табл. 12) для 12 участков были получены: средняя квадратическая, средняя и вероятная ошибки, приведенные в табл. 16. По данным табл. 16 вычислить коэффициенты k_1 и k_2 и сравнить их с теоретическими значениями.

Т а б л и ц а 16

№ участ- ков	Критерии точности, см			Коэффициенты и их истинные ошибки				Число ошибок по участ- ку
	m	ϑ	r	k_1	Δk_1	k_2	Δk_2	
1	$\pm 3,5$	$\pm 2,8$	$\pm 2,0$	1,25	0,00	1,75	+0,27	220
2	5,2	4,4	4,0	1,18	—0,07	1,30	—0,18	161
3	5,4	4,1	4,0	1,32	+0,07	1,35	—0,13	115
4	7,0	5,3	4,5	1,32	+0,07	1,55	+0,07	100
5	8,0	6,7	5,5	1,20	—0,05	1,46	—0,02	59
6	4,0	3,2	2,5	1,25	0,00	1,60	+0,12	95
7	4,7	3,6	3,0	1,31	+0,06	1,57	+0,09	93
8	5,1	4,4	4,0	1,16	—0,09	1,28	—0,20	104
9	5,4	4,3	3,5	1,26	+0,01	1,54	+0,06	115
10	5,4	4,1	3,5	1,32	+0,07	1,54	+0,06	353
11	8,0	6,4	5,0	1,25	0,00	1,60	+0,12	236
12	8,1	6,5	5,5	1,24	—0,01	1,47	—0,01	108
		Среднее арифметиче- ское Должно быть	Σ 1,255 (1,253)	+0,005		1,501 (1,483)	+0,021	1759

Вычисления, выполненные в табл. 16, показывают, что коэффициенты k_1 и k_2 достаточно хорошо совпадают с их теоретическими значениями. Большой разброс, соответствующий вероятной ошибке, обусловлен тем, что этот критерий для оценки точности из вышеперечисленных трех (m , ϑ и r) наименее надежен в силу способа его определения (как срединной ошибки).

§ 29. Свойства средней квадратической ошибки и точность ее определения

Следует отметить, что для оценки точности наблюдений наиболее часто применяют среднюю квадратическую ошибку m , которая по сравнению со средней и вероятной обладает следующими преимуществами.

1. На величину средней квадратической ошибки m наибольшее влияние оказывают большие по абсолютной величине ошибки,

т. е. те, которые и характеризуют реальную точность наблюдений. Это происходит вследствие того, что при вычислении m суммируются квадраты ошибок Δ_i , в то время как при вычислении, например, средней ошибки суммируются первые степени Δ_i по модулю. При большом n в последнем случае происходит сглаживание, т. е. крупные ошибки выступают в значении Φ в завуалированном виде.

2. Средняя квадратическая ошибка связана с предельной простыми соотношениями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{с вероятностью } 0,95 \dots \dots \Delta_{\text{пред}} \leq 2m \\ \text{с вероятностью } 0,9973 \dots \dots \Delta_{\text{пред}} \leq 3m \end{array} \right\}. \quad (258)$$

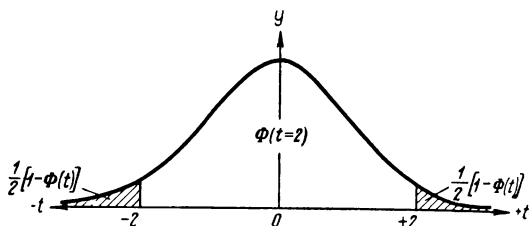


Рис. 12.

Выражения (258) принято называть **допусками**, причем в качестве служебного допуска рекомендуется

$$\text{с вероятностью } 0,99 \dots \dots \Delta_{\text{пред}} \leq 2,5 m; \quad (259)$$

$$\text{для теоретических расчетов} \quad \Delta_{\text{пред}} \leq 3m. \quad (260)$$

Пример. Вычислить наиболее возможное (вероятнейшее) число ошибок из общего их числа n :

$$\left. \begin{array}{l} p(\Delta_1 \geq m) \\ p(\Delta_2 \geq 2m) \\ p(\Delta_3 \geq 2,5m) \end{array} \right\} \text{ при } n = 100,$$

$$p(\Delta_4 \geq 3m) \text{ при } n = 1000.$$

Решение. Если по оси абсцисс (рис. 12) отложить значение

$$\frac{\Delta_i}{m} = t_i,$$

то интеграл вероятностей $\Phi(t_i)$ представляет вероятность появления ошибок в пределах от 0 до $\pm t$.

Так как общая площадь между осью абсцисс и кривой Гаусса равна 1, то, следовательно, вероятность ошибок, не меньших заданного значения Δ_i , представляет сумму заштрихованных площадей, или $1 - \Phi(t_i)$.

Определяя $\Phi(t_i)$ по таблице, приведенной в приложении 1, сведем результаты вычислений в табл. 17.

Полученные результаты хорошо иллюстрируют первое свойство случайных ошибок (§ 22).

№ по пор.	Число ошибок n	Заданное предельное значение, Δ_i пред.	$\Delta_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$\Phi(t_i)$	$p(\Delta_i \geq t_i m) = 1 - \Phi(t_i)$	Число ошибок, превышающих заданные, Δ_i : $k_0 \approx n \{1 - \Phi(t_i)\}$	Число ошибок, укладываемых в пределах от 0 до $\pm \Delta_i$	Контроль
1	100	1 m	1	0,6827	0,3173	32	68	100
2	100	2 m	2	0,9545	0,0455	5	95	100
3	100	2,5 m	2,5	0,9876	0,0124	1	99	100
4	1000	3,0 m	3,0	0,9973	0,0027	3	997	1000

3. Средняя квадратическая ошибка определяется достаточно надежно при ограниченном числе наблюдений.

Надежность средней квадратической ошибки характеризуется величиной

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}, \quad (261)$$

где m_m — средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки.

Пример. Дано:

$$m = \sqrt{\frac{81}{9}} = \pm 3,0; \quad m_m = \frac{\pm 3,0}{\sqrt{2 \cdot 9}} = \pm 0,8.$$

Получаем надежность

$$m = \pm 3,0 \pm 0,8.$$

При оценке точности по ограниченному числу наблюдений принято считать ее надежной, если средняя квадратическая ошибка m определена с ошибкой m_m , не превышающей $\frac{1}{4} m$, т. е.

$$m_m \leq \frac{1}{4} m. \quad (262)$$

Условие (262) выполняется при

$$n \geq 8. \quad (263)$$

Следовательно, минимально необходимым числом наблюдений для надежной оценки точности является $n = 8$.

Дадим формуле (261) теоретическое обоснование. Средняя квадратическая ошибка m , вычисляемая по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (264)$$

при ограниченном числе наблюдений n ошибочна вследствие ограниченности этого числа. Задача состоит в том, чтобы получить выражение, при помощи которого можно было бы оценить надежность средней квадратической ошибки, вычисляемой по формуле (264). Обозначим показатель надежности через m_m и назовем его средней квадратической ошибкой самой средней квадратической ошибки. Пусть случайное значение ошибки (264), вычисляемой по ограниченному числу n , будет m , а «точное» его значение (при $n \rightarrow \infty$) — m_* . По определению, дисперсия величины m^2

$$D(m^2) = M\{[m^2 - M(m^2)]^2\}. \quad (265)$$

Будем при этом иметь в виду, что

$$D(m^2) = \sigma_{m^2}^2 = m_*^2 \sigma_a^2. \quad (266)$$

Итак, по (265), с учетом (264)

$$\begin{aligned} D(m^2) &= M\left\{\left[\frac{[\Delta^2]}{n} - M(m^2)\right]^2\right\} = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right) \cdot m_*^2 + m_*^4\right\} = \\ &= M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - 2M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right) \cdot m_*^2\right\} + M(m_*^4). \end{aligned} \quad (267)$$

Но

$$M\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right) = m_*^2. \quad (268)$$

Следовательно, из (267) имеем

$$D(m^2) = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - 2m_*^4 + m_*^4 = M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} - m_*^4. \quad (269)$$

Найдем математическое ожидание [38]

$$\begin{aligned} M\left\{\left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2\right\} &= \left\{\frac{1}{n^2} (\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \dots + \Delta_n^4)\right\} + \left\{\frac{2\Delta_1^2}{n^2} (\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_n^2)\right\} + \\ &+ \left\{\frac{2\Delta_2^2}{n^2} (\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \dots + \Delta_n^2)\right\} + \\ &+ \dots + \left\{\frac{2\Delta_{n-1}^2}{n^2} \cdot \Delta_n^2\right\}. \end{aligned} \quad (270)$$

Число членов, представляющих удвоенные произведения в правой части выражения (270), равно

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (271)$$

Необходимо также учитывать, что

$$\left\{\frac{1}{n^2} (\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \dots + \Delta_n^4)\right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^4}{n} = \frac{\mu_4}{n} = \frac{3m_*^4}{n}, \quad (272)$$

где μ_4 — четвертый центральный момент, равный, как известно,

$$\mu_4 = 3\mu_2^2 = 3m_*^4. \quad (273)$$

Справедливость формулы (272) нетрудно установить из доказательства, воспользовавшись для этой цели понятием математического ожидания $M\left(\frac{\Delta^4}{n}\right)$.

Учитывая, что среднее значение Δ_i^2 при n большом обращается в m_*^2 , сумма всех удвоенных произведений в (270), согласно (274) и (271), будет равна

$$\frac{2m_*^4}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{n} \cdot m_*^4. \quad (277)$$

Подставляя (272) и (277) в (270), получим

$$M \left\{ \left(\frac{[\Delta^2]}{n} \right)^2 \right\} = \frac{3m_*^4}{n} + \frac{(n-1)}{n} \cdot m_*^4 = \frac{3m_*^4 + nm_*^4 - m_*^4}{n};$$

$$M \left\{ \left(\frac{[\Delta^2]}{n} \right)^2 \right\} = \frac{2m_*^4}{n} + m_*^4. \quad (278)$$

Подставив значение

$$M \left\{ \left(\frac{[\Delta^2]}{n} \right)^2 \right\}$$

из (278) в (269), имеем

$$D(m^2) = \frac{2m_*^4}{n} + m_*^4 - m_*^4 = \frac{2m_*^4}{n}. \quad (279)$$

Средняя квадратическая ошибка m_{m^2} отсюда

$$m_{m^2} = \sqrt{D(m^2)} = m_*^2 \sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (280)$$

Из (280) следует

$$m_{m^2} = \frac{d(m_*^2)}{dm_*} \cdot m_m,$$

откуда

$$m_m = \frac{m_{m^2}}{d(m_*^2)} \cdot dm_* = \frac{m_{m^2}}{2m_* \cdot dm_*} \cdot dm_* = \frac{m_{m^2}}{2m_*}. \quad (281)$$

Подставляя в (281) значение m_{m^2} из (280) и заменяя неизвестное значение m_* через m , получим

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}. \quad (282)$$

Следовательно, если средняя квадратическая ошибка m вычислена по ограниченному числу ошибок n , то средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки, обозначенная выше через m_m , в $\sqrt{2n}$ раз меньше величины m .

Примеры. 1. Выполнить исследование ряда истинных ошибок на нормальное распределение вероятностей.

При испытании дальномера двойного изображения типа ДНБ получено 36 значений параллактического угла β_i , помещенных в табл. 18. Точное значение угла β_0 вычислено на основании линейных измерений.

По данным табл. 18 вычислить:

истинные ошибки Δ_i ;

среднюю квадратическую ошибку

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

$$\beta_0 = 573''.23$$

№ по пор.	Углы, β_i	Истинные ошибки, $\Delta_i = \beta_i - \beta_0$	№ по пор.	Углы, β_i	Истинные ошибки, $\Delta_i = \beta_i - \beta_0$
1	573,5	+27 · 10 ⁻²	19	573,7	+47 · 10 ⁻²
2	3,2	-3	20	3,0	-23
3	3,1	-13	21	3,1	-13
4	2,7	-53	22	2,9	-33
5	3,6	+37	23	3,3	+7
6	3,0	-23	24	3,2	-3
7	2,8	-43	25	3,0	-23
8	3,4	+17	26	3,3	+7
9	3,2	-3	27	3,6	+37
10	4,4	+117	28	4,0	+77
11	2,8	-43	29	2,7	-53
12	3,5	+27	30	2,8	-43
13	2,5	-73	31	3,4	+17
14	3,2	-3	32	4,4	+117
15	3,1	-13	33	2,8	-43
16	4,1	+87	34	2,8	-43
17	2,7	-53	35	2,6	-63
18	3,5	+27	36	3,0	-23

$$\Delta_i^2 = 79404 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \sum &+ 648 \cdot 10^{-2} \\ \sum &- 686 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

с оценкой ее надежности

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}};$$

среднюю и вероятную ошибки ϑ и r ;
теоретическое k_0 и действительное g число ошибок в интервалах через $\pm 0,5 m$ от $-\Delta = -3,0 m$ до $+\Delta = +3,0 m$;
разности $g - k_0$;
коэффициенты

$$k_1 = \frac{m}{\vartheta}, \quad k_2 = \frac{m}{r}$$

и сравнить их с теоретическими 1,25 и 1,48 соответственно).

Решение. Истинные ошибки Δ_i даны в табл. 18 и выражены в секундах. Вычислим

$$m = \sqrt{\frac{79404 \cdot 10^{-4}}{36}}; \quad m = \pm 0''.47; \quad m_m = \frac{\pm 0''.47}{\sqrt{2 \cdot 36}};$$

$$m_m = \pm 0''.056;$$

$$\vartheta = \frac{1334'' \cdot 10^{-2}}{36}; \quad \vartheta = \pm 0''.37.$$

При определении вероятной ошибки получено для значения № 18 — 0'',27, а для № 19 — 0'',33.

Поэтому имеем $r = \pm 0'',30$.

Составим табл. 19 и в ней вычислим теоретическое число ошибок k_0 .

Т а б л и ц а 19

$$n = 36; m = \pm 0'',47$$

№ по пор.	Интервал Δ_i		Аргумент $t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$p_i = \Phi(t_i)$	$p_i - p_{i-1}$	$k_0 = n(p_i - p_{i-1})$
	в общем виде	в секундах				
1	$\pm 0,5 m$	$\pm 0,24$	0,5	0,383	0,383	14
2	1,0 m	0,47	1,0	0,683	0,300	11
3	1,5 m	0,70	1,5	0,867	0,184	7
4	2,0 m	0,94	2,0	0,954	0,087	3
5	2,5 m	1,17	2,5	0,988	0,034	1
6	3,0 m	1,41	3,0	0,9973	0,0093	0
Контроль					0,9973	36

П р и м е ч а н и е. $\Phi(t_i)$ выбрано из таблиц приложения 1.

Подсчитаем по табл. 20 действительное число ошибок g и разности $g - k_0$.

Т а б л и ц а 20

№ по пор.	Интервалы через $\pm 0,5 m$ от $-\Delta = -3 m$ до $+\Delta = +3 m$	Число ошибок		
		g	k_0	$g - k_0$
1	От 0 до $0'',24$	15	14	+1
2	» $\pm 0,25$ » $0,47$	12	11	+1
3	» 0,48 » 0,70	4	7	-3
4	» 0,71 » 0,94	3	3	0
5	» 0,95 » 1,17	2	1	+1
6	» 1,18 » 1,41	0	0	0
7	более $\pm 1,41$	0	0	0
Контроль		36	36	0

П р и м е ч а н и е. g определено непосредственным подсчетом по данным таблицы, приведенным в условии задачи.

Далее вычислим:

$$k_1 = \frac{0'',47}{0'',37} = 1,27; \quad k_2 = \frac{0'',47}{0'',30} = 1,56.$$

Сведем в табл. 21 ординаты, вычисленные по таблицам приложения 3.

В результате выполненного исследования рассматриваемый ряд ошибок можно считать удовлетворяющим нормальному распределению, так как он обладает следующими свойствами:

Таблица 21

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = 1,50$$

№ по пор.	$t_i = \frac{\Delta_i}{m}$	y'	$y = y' \cdot h$
1	0	0,564	0,85
2	0,5	0,498	0,75
3	1,0	0,342	0,52
4	1,5	0,183	0,28
5	2,0	0,076	0,11
6	2,5	0,025	0,04
7	3,0	0,006	0,01

а) среднее арифметическое из алгебраической суммы ошибок практически равно нулю*

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{-38'' \cdot 10^{-2}}{36} = -1'',1 \cdot 10^{-2};$$

б) ни одна из ошибок ряда не превышает 3,0 m ;

в) разности $g - k_0$ при данном числе ошибок можно считать несущественными;

г) коэффициенты k_1 и k_2 сходятся с их теоретическими значениями удовлетворительно.

2. Проанализируем результаты исследования опытных рядов ошибок с использованием метода моментов, приведенные в табл. 22 [7]. Исследование производилось в рядах ошибок определения отметок точек по карте крупного масштаба.

Из результатов исследований, помещенных в табл. 22, со всей очевидностью вытекает, что ошибки определения отметок точек по горизонталям плана обладают нормальным распределением вероятностей.

3. В каких пределах можно с вероятностью $p = 0,954$ ожидать появление ошибки Δ , если средняя ошибка $\Phi = \pm 8'',0$?

Решение.

Получим

$$m = 1,25 \Phi; \quad m = \pm 8'' \cdot 1,25 = \pm 10''; \quad \Delta = t \cdot m.$$

По $\Phi(t) = p = 0,954$ в таблице (прилож. 1) находим: $t = 2$.

$$\text{Ответ: } -20'' \leq \Delta \leq +20''.$$

4. Сколько ошибок из 100 будут превышать удвоенную вероятную ошибку?

Решение. Запишем

$$\Delta = 2r; \quad p(\Delta \geq 2r) = ?$$

$$t = \frac{2r}{m}; \quad t = \frac{2r}{1,48r} = 1,35; \quad \Phi(t) = 0,823;$$

$$p(\Delta \geq 2r) = 1 - \Phi(t); \quad p = 0,177; \quad k_0 \approx n \cdot p; \quad k_0 = 18.$$

$$\text{Ответ: } k_0 = 18.$$

* В работе [18], стр. 56, указывается, что отклонение от нуля среднего арифметического из алгебраической суммы случайных ошибок при достаточно большом их числе может считаться допустимым, если выполняется условие $\frac{[\Delta]}{n} \leq \frac{m}{5}$. В противном случае, нельзя полагать, что систематические ошибки пренебрегаемо малы.

	Номера участков			
	1	2	3	4
Число ошибок n	34	64	39	47
Средняя квадратическая ошибка $m_{см}$	$\pm 8,5$	$\pm 7,5$	$\pm 7,8$	$\pm 8,8$
Средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки $m_m, см$	$\pm 1,5$	$\pm 0,94$	$\pm 1,25$	$\pm 1,28$
Средняя ошибка ϑ , см	7,0	6,7	6,3	6,9
Вероятная ошибка r , см	5,0	6,0	5,0	5,0
Первый момент μ_1 , см	+3,1	-0,6	-1,0	+1,7
Второй момент μ_2	0,0073	0,0056	0,0061	0,0077
Третий момент μ_3	+0,0003	+0,00013	-0,00059	+0,00046
Четвертый момент μ_4	0,00014	0,00006	0,00015	0,00015
Экссесс E	-0,36	-1,09	+1,16	-0,66
Мера скошенности β_1	+0,26	+0,09	+3,33	+0,48
Среднее квадратическое отклонение эксцесса σ_E	$\pm 0,83$	$\pm 0,62$	$\pm 0,79$	$\pm 0,72$
Допустимое отклонение эксцесса от нуля $E_{доп}$	$\pm 2,49$	$\pm 1,86$	$\pm 2,37$	$\pm 2,16$
Среднее квадратическое отклонение меры скошенности σ_{β_1}	$\pm 0,43$	$\pm 0,19$	$\pm 1,46$	$\pm 0,50$
Допустимое отклонение меры скошенности $\beta_{1 доп}$	$\pm 1,29$	$\pm 0,57$	$\pm 4,38$	$\pm 1,50$
Коэффициент перехода от средней ошибки к средней квадратической k_1	1,21	1,12	1,24	1,28
Коэффициент перехода от вероятной ошибки к средней квадратической k_2	1,70	1,25	1,56	1,76

§ 30. Абсолютные и относительные ошибки

Такие ошибки, как средняя квадратическая (m), средняя (ϑ), вероятная (r), истинная (Δ_i) и предельная ($\Delta_{пред}$), называются абсолютными ошибками. Относительной ошибкой называют отношение соответствующей абсолютной ошибки к полученному значению измеренной величины.

Относительную ошибку обычно выражают в виде дроби с числителем, равным единице.

Наименование абсолютной ошибки, использованной при вычислении, определяет собой и название соответствующей относительной ошибки.

Пусть x — полученное значение некоторой физической величины. Тогда

$\frac{m}{x} = \pm \frac{1}{s_1}$ — средняя квадратическая относительная ошибка;

$\frac{\vartheta}{x} = \pm \frac{1}{s_2}$ — средняя относительная ошибка;

$\frac{r}{x} = \pm \frac{1}{s_3}$ — вероятная относительная ошибка;

$\frac{\Delta}{x} = \frac{1}{s_4}$ — истинная относительная ошибка (сопровождается знаком ошибки Δ);

$\frac{\Delta_{\text{пред}}}{x} = \pm \frac{1}{s_5}$ — предельная относительная ошибка.

Знаменатель относительной ошибки s_i целесообразно округлять до двух значащих цифр с нулями.

Пример. $m_x = \pm 0,3$ м; $x = 152,0$ м; $\frac{m_x}{x} = \pm \frac{1}{510}$.

$m_x = \pm 0,25$ м; $x = 643,00$ м; $\frac{m_x}{x} = \pm \frac{1}{2600}$.

$m_x = \pm 0,033$ м; $x = 795,000$ м; $\frac{m_x}{x} = \pm \frac{1}{24\,000}$.

Г Л А В А VI

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ВЕЛИЧИН, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ЗАВИСИМЫХ И НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 31. Постановка задачи

В инженерной практике часто возникают задачи, когда интересующую наблюдателя величину непосредственно измерить нельзя. В таких случаях приходится измерять некоторые величины (в последующем будем называть эти величины а р г у м е н т а м и), связанные с искомой величиной функционально, а искомую величину — вычислять. Предполагается, что точность аргументов, т. е. их средние квадратические ошибки, известны.

Естественно ожидать, что искомая величина (будем называть ее ф у н к ц и е й), вычисленная по аргументам, содержащим некоторые ошибки, тоже будет содержать ошибки. Очевидно, что ошибка функции в полной мере будет зависеть от ошибок аргументов, по которым она вычислялась, и от вида функции.

Пусть для определения длины окружности s по некоторому сечению вала измерен его диаметр d с точностью, характеризуемой средней квадратической ошибкой m_d . Вычислив длину окружности $s = \pi d$, определим, чему будет равна средняя квадратическая ошибка m_s , вычисленная по результатам измерения диаметра d . В данном случае ответ очевиден:

$$m_s = \pi \cdot m_d.$$

Но функция может иметь и более сложный вид. Например:

$$u = \frac{x \cdot y \cdot z \cdot t^2}{\cos \alpha},$$

где x, y, z, t, α — аргументы, полученные из измерений со средними квадратическими ошибками $m_x, m_y, m_z, m_t, m_\alpha$. Здесь ответ при определении m_u не является очевидным.

Сформулируем задачу в общем виде. Дана функция

$$u = f(x, y, z, \dots, w),$$

где $x, y, z, \dots, w$ — наблюдаемые аргументы, точность которых характеризуется средними квадратическими ошибками $m_x, m_y, m_z, \dots, m_w$. Необходимо найти среднюю квадратическую ошибку функции u в зависимости от ошибок аргументов $x, y, z, \dots, w$ (определение самой величины функции u не требует рассмотрения, хотя очевидно, что в первую очередь вычисляется сама функция u , затем — ее средняя квадратическая ошибка). При решении поставленной задачи может встретиться два случая: случай зависимых аргументов и случай независимых аргументов.

В качестве меры парной зависимости между случайными величинами (например, x и y , y и z и т. д.) используем коэффициент корреляции r (194), т. е. будем полагать, что если случайные величины и связаны, то связь эта прямолинейна.

Из свойств коэффициента корреляции r (§ 18) следует, что если $r = 0$, то прямолинейная связь между x и y отсутствует. Отсюда следует:

1) Если прямолинейная связь между случайными величинами характеризуется коэффициентом корреляции, равным нулю, случайные величины **н е з а в и с и м ы**.

2) Если коэффициент корреляции прямолинейной связи между x и y не равен нулю ($r \neq 0$), случайные величины x и y **з а в и с и м ы**.

Как известно, корреляционная связь по условию (198) считается установленной, если

$$|r| \geq 3\sigma_r,$$

причем

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{n+36} - \sqrt{n}}{6}.$$

В силу этого, для случаев, когда $r \neq 0$, но $|r| < 3\sigma_r$ или нижний предел $|r| \geq |r|_{\min}$, случайные величины x и y также следует считать независимыми.

Л. Н. Большев, выполнивший перевод книги [14], в примечании на стр. 362 отмечает: «Практически использование коэффициента корреляции в качестве меры зависимости оправдано лишь тогда,

когда предполагается, что случайные величины распределены нормально. В общем случае коэффициент корреляции как мера зависимости может оказаться неудовлетворительным». Это важное обстоятельство необходимо иметь в виду при рассмотрении поставленной задачи.

§ 32. Средняя квадратическая ошибка функции зависимых аргументов

Итак, пусть дана функция

$$u = f(x, y, z, \dots, w), \quad (283)$$

где $x, y, z, \dots, w$ — попарно зависимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками $m_x, m_y, m_z, \dots, m_w$.

Обозначим: $X, Y, Z, \dots, W$ — истинные (точные) значения аргументов.

Необходимо определить m_u — среднюю квадратическую ошибку функции u .

Придадим аргументам малые приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots, \Delta w$ — истинные ошибки аргументов, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x - X \\ \Delta y &= y - Y \\ \Delta z &= z - Z \\ \dots &\dots \dots \\ \Delta w &= w - W \end{aligned} \right\}. \quad (284)$$

В соответствии с этим функция u также получит приращение, которое назовем истинной ошибкой функции и обозначим через Δu .

Итак, имеем

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots, w + \Delta w). \quad (285)$$

Найдем линейную зависимость между малыми приращениями аргументов и функции, для чего в полном дифференциале функции (283) дифференциалы аргументов и функции заменим конечными приращениями. Полный дифференциал функции (283), как известно, равен

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial f}{\partial w} dw, \quad (286)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial w}$$

— частные производные функции по каждому из аргументов.

Окончательно

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2 +} \\ + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{x,y} \cdot |m_x| \cdot |m_y| + \dots \quad (297)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка функции коррелятивно-зависимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические ошибки соответствующих аргументов и удвоенных произведений частных производных на соответствующие средние квадратические ошибки по парнозависимых аргументов и коэффициенты корреляции парной зависимости.

Для практического использования формулы (297) коэффициенты корреляции попарно-зависимых аргументов должны быть определены из специальных исследований. Примером таких исследований является ряд работ доцента Скиданенко К. К., в частности [34].

§ 33. Средняя квадратическая ошибка функции независимых аргументов

При организации наблюдений одним из основных требований является обеспечение таких условий, при которых результаты многократных наблюдений одной и той же величины (или разных величин) были бы по возможности независимы один от другого. Это требование не имеет в научной практике точных рамок и исчерпывающих указаний, которые позволяли бы обеспечить полную независимость результатов наблюдений. Тем не менее любая методика наблюдений в той или иной мере рассчитана на выполнение этого требования.

Во многих случаях, особенно когда есть возможность рассредоточить наблюдения во времени, или поручить их выполнение разным наблюдателям, или выполнить разными инструментами, эти результаты практически можно считать независимыми.

Стремление обеспечить независимость результатов наблюдений вполне понятно: ведь все вероятностно-статистические расчеты в теории ошибок базируются на гипотезе, что случайные ошибки подчиняются нормальному закону, а математическое ожидание $M(\Delta) = 0$.

Исходя из этого, обратившись к удвоенному произведению в формуле (293) для независимых случайных величин, по пятому свойству математического ожидания (125) и теореме (117) можем записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta x \cdot \Delta y]}{n} = M(\Delta x \cdot \Delta y) = M(\Delta x) \cdot M(\Delta y). \quad (298)$$

Но по третьему свойству случайных ошибок

$$M(\Delta) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta x \cdot \Delta y|}{n} = 0. \quad (299)$$

Формула (297) с учетом (299) для функции независимых аргументов примет вид

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2}. \quad (300)$$

Таким образом, средняя квадратическая ошибка функции независимых аргументов равна корню квадратному из суммы квадратов произведений частных производных функции по каждому из аргументов на средние квадратические ошибки соответствующих аргументов.

Формулы (297) и (300) решают поставленную в § 31 задачу оценки точности функций независимых и зависимых аргументов полностью, т. е. все другие функции могут рассматриваться при оценке точности как частные случаи функции общего вида (283).

В классической теории ошибок перед рассмотрением вопроса об оценке точности функции общего вида рассматривают простейшие случаи ([36], стр. 61—68) оценки точности функций

1. $u = kx$.
2. $u = x \pm y$.
3. $u = x \pm y \pm z$.
4. $u = x \pm y \pm \dots \pm w$.
5. $u = k_1 x \pm k_2 y \pm \dots \pm k_n w$.

Посмотрим, как решается вопрос об оценке точности функций (случаи 1—5), если аргументы независимы один от другого, а средние квадратические ошибки $m_x, m_y, \dots, m_w$ и коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_n$ известны.

Применяя формулу (300), получим для каждого из указанных случаев:

1. Пусть

$$u = kx.$$

Даны x, k, m_x .

Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 m_x^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k;$$

следовательно,

$$m_u = k \cdot m_x.$$

2. Пусть

$$u = x \pm y.$$

Даны x, y, m_x, m_y .

Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot m_y^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2, \\ m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}.$$

3. Пусть

$$u = x \pm y \pm z.$$

Даны x, y, z, m_x, m_y, m_z .

Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2, \\ m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}.$$

4. Пусть

$$u = x \pm y \pm \dots \pm w.$$

Даны

$$x, y, \dots, w, m_x, m_y, \dots, m_w.$$

Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)^2 m_w^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial w} = 1;$$

следовательно,

$$m_u^2 = m_x^2 + m_y^2 + \dots + m_w^2, \\ m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + \dots + m_w^2}.$$

В частном случае при

$$m_x = m_y = \dots = m_w = m$$

имеем

$$m_u = m \sqrt{n},$$

где n — число аргументов.

5. Пусть

$$u = k_1 x \pm k_2 y \pm \dots \pm k_n w.$$

Даны

$$x, y, \dots, w, k_1, k_2, \dots, k_n, m_x, m_y, \dots, m_w.$$

Тогда

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)^2 m_w^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = k_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = k_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial w} = k_n;$$

следовательно,

$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2 + \dots + k_n^2 m_w^2,$$

$$m_u = \sqrt{k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2 + \dots + k_n^2 m_w^2}.$$

В частном случае при

$$m_x = m_y = \dots = m_w = m$$

имеем

$$m_u = m \sqrt{[k^2]}.$$

§ 34. Примеры оценки точности функций

Пример 1. Дана функция

$$u = \frac{x^2}{2y^2} \cdot z,$$

где x, y, z — независимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z . Определить m_u .

Решение. По формуле (300) имеем

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y^2} \cdot z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^3} \cdot z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2}{2y^2}.$$

Ответ:

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{x}{y^2} \cdot z\right)^2 m_x^2 + \left(-\frac{x^2}{y^3} \cdot z\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{x^2}{2y^2}\right)^2 m_z^2},$$

или

$$m_u = \frac{x}{y^2} \sqrt{(z \cdot m_x)^2 + \left(\frac{x \cdot z}{y} \cdot m_y\right)^2 + \left(\frac{x}{2} \cdot m_z\right)^2}.$$

Пример 2. Дана функция

$$u = \frac{x \cdot y \cdot z}{t \cdot h}, \quad (301)$$

где x, y, z, t, h — независимые аргументы, полученные из наблюдений со средними квадратическими ошибками m_x, m_y, m_z, m_t, m_h . Определить m_u .

Решение. По формуле (300) имеем

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 m_t^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)^2 m_h^2.$$

Но

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yz}{th}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x \cdot z}{t \cdot h}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{xy}{th}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{xyz}{t^2 h}; \quad \frac{\partial u}{\partial h} = -\frac{xyz}{th^2}.$$

Ответ:

$$m_u^2 = \left(\frac{yz}{th}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{xz}{th}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{th}\right)^2 m_z^2 + \left(-\frac{xyz}{t^2 h}\right)^2 m_t^2 + \left(-\frac{xyz}{th^2}\right)^2 m_h^2; \quad (302)$$

$$m_u = \frac{1}{th} \sqrt{(yzm_x)^2 + (xzm_y)^2 + (xym_z)^2 + \left(-\frac{xyzm_t}{t}\right)^2 + \left(-\frac{xyzm_h}{h}\right)^2}.$$

Иногда удобнее функцию (301) приводить к линейному виду, логарифмируя ее (здесь по основанию e)

$$\ln u = \ln x + \ln y + \ln z - \ln t - \ln h.$$

Далее

$$m_{\ln u}^2 = m_{\ln x}^2 + m_{\ln y}^2 + m_{\ln z}^2 + m_{\ln t}^2 + m_{\ln h}^2;$$

$$\left(\frac{m_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{m_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{z}\right)^2 + \left(\frac{m_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{m_h}{h}\right)^2. \quad (303)$$

Так как

$$m_{\ln u} = \frac{m_u}{u},$$

то

$$m_{\lg u} = \left(\frac{d}{du} \lg u\right) m_u,$$

где

$$\frac{d}{du} \lg u = 0,4343 \dots \frac{1}{u};$$

следовательно,

$$m_{\lg u} = \frac{0,4343 \dots}{u} m_u; \quad \frac{m_u}{u} = \frac{m_{\lg u}}{0,4343 \dots}.$$

(0,4343 — модуль десятичных логарифмов).

В формуле (303) $\frac{m_u}{u}$, $\frac{m_x}{x}$, ... — средние квадратические относительные ошибки.

Для сравнения полученных результатов (302) и (303) умножим левую и правую части выражения (303) на

$$u^2 = \left(\frac{xyz}{th}\right)^2$$

и получим тот же ответ (302)

$$m_u^2 = \left(\frac{yz}{th}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{xz}{th}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{xy}{th}\right)^2 m_z^2 + \left(-\frac{xyz}{t^2 h}\right)^2 m_t^2 + \left(-\frac{xyz}{th^2}\right)^2 m_h^2.$$

Пример 3. Коэффициент k нитяного дальномера теодолита определяется на базисе, длина которого $s = 250,00$ м, измеренного со средней квадратической ошибкой $m_s = \pm 0,052$ м.

Из многократных измерений был получен средний дальномерный отсчет $l = 249,0$ см со средней квадратической ошибкой $m_l = \pm 0,30$ см.

Определить $k = \frac{s}{l}$ (постоянное слагаемое дальномера $c = 0$) и m_k .

Решение. Имеем функцию $k = f(s, l)$, т. е. $k = \frac{s}{l}$.

Согласно (300) получим

$$m_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right)^2 m_s^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right)^2 m_l^2}.$$

Но

$$\left(\frac{\partial k}{\partial s}\right) = \frac{1}{l}; \quad \left(\frac{\partial k}{\partial l}\right) = -\frac{s}{l^2};$$
$$m_k = \sqrt{\left(\frac{5,2}{249}\right)^2 + \left(\frac{25\,000}{249^2} \cdot 0,30\right)^2}.$$

Ответ:

$$m_k = \pm 0,12; \quad k = 100,40 \pm 0,12.$$

Пример 4. Определить превышение и среднюю квадратическую ошибку превышения

$$h' = s \cdot \operatorname{tg} \nu,$$

где $s = 143,5$ м (горизонтальное проложение);

$\nu = 2^\circ 30'$ (угол наклона);

если $m_s = \pm 0,5$ м; $m_\nu = \pm 1', 0$.

Решение.

$$h' = s \cdot \operatorname{tg} \nu;$$

$$m_{h'} = \sqrt{m_s^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \nu + \frac{s^2}{\cos^4 \nu} \cdot \frac{m_\nu^2}{Q^2}};$$

$$m_{h'} = \sqrt{(0,5 \cdot 0,044)^2 + \left(\frac{144}{0,99} \cdot \frac{1'}{3438}\right)^2};$$

$$m_{h'} = \sqrt{4,84 \cdot 10^{-4} + 17,9 \cdot 10^{-4}};$$

Ответ:

$$m_{h'} = \pm 4,8 \cdot 10^{-2}; \quad m_{h'} = \pm 0,048 \text{ м.}$$

Пример 5. Емкость конденсатора C определена по формуле

$$C = \frac{Q}{U},$$

где Q — абсолютная величина заряда (в кулонах);

U — напряжение (в вольтах).

Определить (в общем виде) среднюю квадратическую ошибку m_C , если известны Q , U , m_Q , m_U .

Решение. По формуле (300) имеем

$$m_C^2 = \left(\frac{\partial C}{\partial Q}\right)^2 \cdot m_Q^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial U}\right)^2 \cdot m_U^2.$$

Но

$$\left(\frac{\partial C}{\partial Q}\right) = \frac{1}{U}; \quad \left(\frac{\partial C}{\partial U}\right) = -\frac{Q}{U^2}.$$

Ответ:

$$m_C = \sqrt{\left(\frac{m_Q}{U}\right)^2 + \left(-\frac{Q}{U^2} \cdot m_U\right)^2};$$

$$m_C = \frac{1}{U} \sqrt{m_Q^2 + \left(-\frac{Q}{U^2} \cdot m_U\right)^2}.$$

(m_C будет выражена в единицах емкости C , т. е. в данном случае в фарадах.)

Пример 6. Определить среднюю квадратическую ошибку вычисленной длины волны модулированного светового потока, если скорость света $c = 299\,792,5$ км/сек $\pm 0,4$ км/сек (m_c), а частота, равная $f = 10\,000,0$ кГц, определена со средней квадратической ошибкой $m_f = \pm 0,15$ кГц.

Решение.

Так как

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

то

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial c}\right)^2 m_c^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial f}\right)^2 m_f^2},$$

или

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{m_c}{f}\right)^2 + \left(-\frac{c}{f^2} m_f\right)^2}. \quad (304)$$

Подставим значения c , f , m_c , m_f в (304), имея в виду, что если скорость света c дана в км/сек, а частота f в кГц, то λ будет получено в м.

Предварительно преобразуем формулу (304)

$$m_\lambda = \sqrt{\left(\frac{m_c}{f}\right)^2 + \left(-\lambda \cdot \frac{m_f}{f}\right)^2} = \sqrt{\frac{m_c^2}{f^2} + \lambda^2 \frac{m_f^2}{f^2}}.$$

Итак,

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{0,4^2}{10000^2} + 30^2 \cdot \frac{0,15^2}{10\,000^2}} \approx \pm \left(30 \cdot \frac{0,15}{10\,000}\right) \text{ м.}$$

Ответ:

$$m_\lambda = \pm 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ м} = \pm 0,45 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая относительная ошибка

$$\frac{m_\lambda}{\lambda} = \pm \frac{0,45 \text{ мм}}{30 \text{ м}} \approx \pm \frac{1}{67\,000}.$$

Пример 7. В радио- и светолокации время t распространения волн в прямом и обратном направлениях определяется по формуле

$$t = \frac{\Phi}{2\pi f},$$

где Φ — разность фаз (фазовый сдвиг);

f — частота колебаний (модуляции).

Определить среднюю квадратическую ошибку времени m_t , если $m_\Phi = \pm 1^\circ$, $f = 10 \text{ МГц}$, $m_f = \pm 0,15 \text{ кГц}$ ($0,15 \cdot 10^3 \text{ Гц}$).

Решение. Принимая, что Φ и f измерены независимо, по формуле (300) получим

$$\begin{aligned} m_t &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f} \cdot m_\Phi\right)^2 + \left(-\frac{\Phi}{2\pi f^2} \cdot m_f\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f} \cdot m_\Phi\right)^2 + \left(-t \cdot \frac{m_f}{f}\right)^2}. \end{aligned} \quad (305)$$

Подставив в (305) соответствующие значения π , f , m_Φ , m_f , t , примем, что двойное расстояние равно 30 км, тогда получим

$$t = \frac{30 \text{ км}}{299\,792,5 \text{ км/сек}} = 1,01 \cdot 10^{-4} \text{ сек},$$

$$\begin{aligned} m_t &= \sqrt{\left(\frac{1}{360} \cdot 10^{-7}\right)^2 + (-1,01 \cdot 10^{-4} \cdot 0,15 \cdot 10^{-3})^2} = \\ &= \sqrt{(2,8 \cdot 10^{-10})^2 + (-151 \cdot 10^{-10})^2}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$m_t = \pm 12,3 \cdot 10^{-10} \text{ сек.}$$

Пример 8. Горизонтальная дальность полета артиллерийского снаряда в безвоздушном пространстве на плоской невращающейся земле вычисляется по формуле

$$s = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\theta_0, \quad (306)$$

где v_0 — начальная скорость снаряда;

θ_0 — угол возвышения;

g — ускорение силы тяжести.

Определить среднюю квадратическую ошибку m_s дальности s , если аргументы v_0 и θ_0 независимы и получены со средними квадратическими ошибками $m_{v_0} = 0,2\% v_0$, $m_{\theta_0} = \pm 2',5$; при этом $v_0 = 700$ м/сек, $\theta_0 = 15^\circ$.

Решение. По формуле (300) получим

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial v_0}\right)^2 \cdot m_{v_0}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \theta_0}\right)^2 \cdot \frac{m_{\theta_0}^2}{Q^2}}.$$

По формуле (306) находим

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v_0}\right) = \frac{2v_0}{g} \cdot \sin 2\theta_0; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \theta_0}\right) = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta_0.$$

Следовательно,

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{2v_0}{g} \cdot \sin 2\theta_0 \cdot m_{v_0}\right)^2 + \left(\frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta_0 \cdot \frac{m_{\theta_0}}{Q}\right)^2},$$

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 700}{9,81} \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,4\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 700 \cdot 700}{9,81} \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{2',5}{3438'}\right)^2},$$

$$m_s = \sqrt{100^2 + 63^2}.$$

Ответ:

$$m_s = \pm 118 \text{ м } (s = 24\,975 \text{ м}).$$

Пример 9. Сторона треугольника вычислена по теореме синусов

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B},$$

где b , A , B получены из независимых измерений со средними квадратическими ошибками m_b , m_A , m_B .

Определить в общем виде среднюю квадратическую ошибку m_a вычисленной стороны a .

Решение. В соответствии с формулой (300) имеем

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial A}\right)^2 m_A^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\right)^2 m_B^2}.$$

Ответ:

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{\sin A}{\sin B}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{b \cdot \cos A}{\sin B}\right) \frac{m_A^2}{Q^2} + \left(-\frac{b \cdot \sin A \cos B}{\sin^2 B}\right)^2 \frac{m_B^2}{Q^2}}.$$

(здесь Q — радиан; $Q^\circ = 57^\circ,3$; $Q' = 3438'$; $Q'' = 206\,265''$).

Пример 10. Известна средняя квадратическая ошибка измерения угла способом повторений $m_\beta = \pm 6''$. Определить среднюю квадратическую ошибку суммы двух смежных углов β_1 и β_2 .

Решение. Составим функцию

$$f(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 + \beta_2. \quad (307)$$

Как известно, ошибки значений смежных углов, измеренных способом повторений, коррелятивно связаны (через систематическую ошибку общего направления). В соответствии с [34] $r_{\beta_1, \beta_2} = -0,25$. Применяя для оценки точности формулу (297), для функции (307) запишем

$$M_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right)^2 m_{\beta}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)^2 m_{\beta}^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right) r_{\beta_1, \beta_2} \cdot m_{\beta}^2},$$

или

$$M_f = \sqrt{2m_{\beta}^2 - 2 \cdot 0,25 m_{\beta}^2} = m_{\beta} \sqrt{1,5} \approx \pm 7'',3.$$

Если бы не была учтена корреляция ошибок, тогда было бы получено

$$M_f = \pm 8'',5.$$

Г Л А В А VII

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ РАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 35. Простая арифметическая середина — наиболее надежное значение наблюдаемой величины

Пусть для определения значения некоторой величины X произведено n независимых равноточных наблюдений и получены результаты

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n. \quad (308)$$

С вероятностной точки зрения полученные из наблюдений результаты (308) представляют ряд значений случайной величины. Наиболее надежный окончательный результат, являющийся, очевидно, функцией величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ и приближенным значением неизвестной величины X , тоже является случайной величиной. Хотя понятие равноточности наблюдений общедоступно, заметим, что равноточными наблюдениями одной и той же величины или однородных величин называют такие наблюдения, которые выполнены одним инструментом или инструментами одинаковой точности, равным числом приемов, в примерно равных условиях и одним и тем же наблюдателем (или одинаково опытными наблюдателями).

С формальной вероятностно-статистической точки зрения *результаты наблюдений равноточны, если их средние квадратические ошибки одинаковы*, т. е.

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = \dots = m_{x_n} = m. \quad (309)$$

Перейдем к вопросу определения из результатов многократных равноточных наблюдений наиболее надежного окончательного результата.

При рассмотрении вопроса о связи среднего арифметического с математическим ожиданием (§ 14), было установлено, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x} = M(X). \quad (117)$$

Доказательство справедливости (117) базировалось на основании закона больших чисел — теореме Бернулли. Одним из важнейших следствий закона больших чисел является теорема Чебышева об устойчивости среднего арифметического.

Т е о р е м а Ч е б ы ш е в а: *При достаточно большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию* [16], т. е.

$$P \left\{ \left| \frac{[x]}{n} - M(X) \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \delta, \quad (310)$$

где $\frac{[x]}{n} = x_0$ — среднее арифметическое из результатов наблюдений (308), которое будем называть простой арифметической серединой и обозначать через x_0 ;

ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Принимая во внимание, что математическое ожидание $M(X)$ есть истинное значение случайной величины, которое мы выше обозначили через X , теорему Чебышева применительно к результатам равноточных наблюдений запишем в виде

$$P \{ |x_0 - X| < \varepsilon \} > 1 - \delta. \quad (311)$$

Выражение «сходится по вероятности» означает следующее: при увеличении числа наблюдений n вероятность того, что значение случайной величины x_0 и ее истинное значение X будут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину ε , сколь угодно близка к единице. Таким образом, исходя из теоремы Чебышева, в качестве приближенного значения неизвестной величины X , если получены результаты независимых равноточных наблюдений (308), следует рекомендовать простую арифметическую середину.

Формулу (117) можно доказать также чисто арифметически, опираясь на свойство компенсации случайных ошибок, согласно которому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0.$$

В самом деле, записав ряд истинных ошибок

$$\left. \begin{aligned} x_1 - X &= \Delta_1 \\ x_2 - X &= \Delta_2 \\ &\dots \dots \dots \\ x_n - X &= \Delta_n \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

и сложив левые и правые части равенств (312), имеем

$$[x] - n \cdot X = [\Delta]. \quad (313)$$

Разделив на n — число наблюдений — левую и правую часть (313), получим

$$\frac{[x]}{n} - X = \frac{[\Delta]}{n}. \quad (314)$$

Или, по свойству компенсации случайных ошибок, принимая обозначение

$$x_0 = \frac{[x]}{n}, \quad (315)$$

будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_0 = X. \quad (316)$$

Выражение (316) отражает так называемый принцип арифметической середины, сущность которого может быть сформулирована следующим образом: *при числе равнооточных наблюдений одной и той же величины неограниченно большом и при отсутствии систематических ошибок простая арифметическая середина стремится к истинному значению.*

Недостатком доказательства (316), равно как и теоремы (311) в применении к обработке результатов наблюдений, является то, что в практике число наблюдений — отнюдь не бесконечно большое, в большинстве же случаев — весьма ограниченное *.

Поставим вопрос несколько иначе, а именно: является ли простая арифметическая середина наиболее надежным, т. е. обладающим наибольшей при данных условиях вероятностью, значением?

Предположим, что ошибки наблюдений в ряде (308) случайны и подчиняются закону нормального распределения.

Итак, имеем:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ — результаты наблюдений,
 $v_1 = x_1 - x_0, v_2 = x_2 - x_0, \dots, v_n = x_n - x_0$ — их случайные ошибки,
представляющие отклонения значений x_i от наиболее надежного значения x_0 .

Вероятность попадания случайной ошибки в интервал dv , как известно по (224), равняется

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 v^2} \cdot dv.$$

Вероятность того, что при n равнооточных наблюдениях появятся ошибки $v_1, v_2, \dots, v_n$ по теореме умножения независимых событий (§ 6), равна

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n \cdot e^{-h^2 (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)} \cdot dv_1 \cdot dv_2 \cdot \dots \cdot dv_n.$$

* Вторым и не менее существенным недостатком принципа арифметической середины является то, что при наличии односторонне действующих систематических ошибок среднее арифметическое перестает практически заметно приближаться к истинному значению, начиная с некоторого значения n .

или

$$P = \left(\frac{h}{V\pi} \right)^n \cdot e^{-h^2 [v^2]} \cdot dv_1 \cdot dv_2 \cdot \dots \cdot dv_n. \quad (317)$$

Из (317) вытекает, что при любом значении меры точности h вероятность P будет максимальной, если

$$[v^2] = \min, \quad (318)$$

так как все множители в (317), кроме $e^{-h^2 [v^2]}$, не зависят от отклонений v_i .

Множитель $e^{-h^2 [v^2]}$ в свою очередь принимает максимальное значение при условии (318), так как

$$e^{-h^2 [v^2]} = \frac{1}{e^{h^2 [v^2]}}. \quad (319)$$

Таким образом, наиболее надежным значением из ряда независимых равнооточных наблюдений одной и той же величины является такое значение x , для которого сумма квадратов отклонений $(x_i - x)$ минимальна, т. е.

$$(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \dots + (x_n - x)^2 = [v^2] = \min. \quad (320)$$

Условие (321) носит название принципа наименьших квадратов.

Определим значение x , которое отвечает условию (320), для чего найдем первую производную $\frac{d}{dx} [v^2]$ и приравняем ее к нулю.

Итак,

$$\frac{d}{dx} [v^2] = \frac{d}{dx} [(x_i - x)^2] = -2 [(x_i - x)] = 0. \quad (321)$$

Условие (320) выполняется, если вместо x подставить простую арифметическую средину x_0 из (315):

В самом деле,

$$\begin{aligned} -2 \left(x_1 - \frac{[x]}{n} \right) - 2 \left(x_2 - \frac{[x]}{n} \right) - \dots - 2 \left(x_n - \frac{[x]}{n} \right) &= -2x_1 + \\ + 2 \frac{[x]}{n} - 2x_2 + 2 \frac{[x]}{n} - \dots - 2x_n + 2 \frac{[x]}{n} &= -2(x_1 + x_2 + \dots \\ \dots + x_n) + 2[x] &= -2[x] + 2[x] = 0. \end{aligned} \quad (322)$$

Таким образом, если случайные ошибки Δ независимых равнооточных наблюдений имеют $M(\Delta) = 0$ и подчиняются нормальному закону, то наиболее надежным значением определяемой величины является простая арифметическая средина.

Иногда вместо простой арифметической средины используют так называемую медиану — срединное значение случайной величины, способ отыскания которого аналогичен описанному в § 25 способу отыскания вероятной ошибки. Как совершенно справедливо

отмечают А. Д. Бродский и В. Л. Кан ([13], стр. 61), «медиана менее достоверна, чем арифметическое среднее, так как зависит от чувствительности метода измерений и от случайности появления в середине ряда того или иного результата».

При вычислении значения простой арифметической середины x_0 полезно иметь в виду следующие практические рекомендации. В большинстве случаев неудобно вычислять значение x_0 по формуле (315), так как в сумму $[x]$ входит большая неизменяющаяся часть x_i . Для упрощения вычислений рекомендуется вводить приближенное значение измеренной величины x' , равное, например, одному из значений ряда $x_1, x_2, \dots, x_n$ (предпочтительнее наименьшему); тогда все операции по вычислению x_0 сведутся практически к операциям с остатками $\varepsilon_i = x_i - x'$. В самом деле, если

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x' &= \varepsilon_1 \\ x_2 - x' &= \varepsilon_2 \\ &\dots \dots \dots \\ x_n - x' &= \varepsilon_n \end{aligned} \right\}, \quad (323)$$

то, суммируя левую и правую части равенств (323) и разделив полученные суммы на число наблюдений n , получим

$$\frac{[x]}{n} - x' = \frac{[\varepsilon]}{n},$$

или

$$x_0 = x' + \frac{[\varepsilon]}{n}. \quad (324)$$

Удобство выбора в качестве x' наименьшего значения из ряда $x_1, x_2, \dots, x_n$ состоит в том, что все остатки ε_i в данном случае будут положительными и возможность допустить просчет при вычислениях уменьшается, по сравнению со случаем выбора в качестве приближенного значения x' произвольного числа.

§ 36. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины

Если при равноточных наблюдениях одной и той же величины получен ряд результатов

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$$

то в качестве обобщенной характеристики равноточности всего ряда наблюдений можно принять, как отмечалось выше, среднюю квадратическую ошибку m , характеризующую точность любого из результатов ряда. Будем в последующем эту ошибку называть средней квадратической ошибкой одного наблюдения. Простая арифметическая середина x_0 в общем случае вычисляется, как известно, по формуле (315).

Возникает вопрос: как определить среднюю квадратическую ошибку простой арифметической середины m_{x_0} , т. е. как оценить ее надежность, если известна средняя квадратическая ошибка m одного наблюдения.

Для определения m_{x_0} представим x_0 в следующем виде

$$x_0 = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n. \quad (325)$$

Полагая результаты равнооточных наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимыми, определим m_{x_0} по формуле средней квадратической ошибки функции общего вида (300).

$$m_{x_0}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m_{x_n}^2, \quad (326)$$

где

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_2}\right) = \dots = \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_n}\right).$$

В силу равнооточности наблюдений в (325) можем принять

$$m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_n} = m; \quad (327)$$

следовательно,

$$m_{x_0}^2 = \frac{m^2}{n}.$$

Обозначим

$$m_{x_0} = M$$

и окончательно запишем

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (328)$$

Итак, средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины меньше средней квадратической ошибки одного наблюдения в корень квадратный раз из числа наблюдений.

Формула (328) имеет весьма важное значение и широкое применение в практике оценки точности наблюдений.

Однако следует иметь в виду, что увеличение числа наблюдений n с целью повышения точности окончательного результата — простой арифметической середины — должно быть ограничено разумными пределами, обусловленными наличием в результатах наблюдений систематических ошибок. Так, например, совместное влияние случайных ошибок наблюдений и постоянной систематической ошибки может быть выражено формулой

$$M' = \sqrt{\frac{m^2}{n} + a^2}, \quad (329)$$

где a — систематическая ошибка.

Очевидно, что при любом числе n , как бы велико оно ни было, M' не может стать меньше a . Отсюда следует, что и число повтор-

ных наблюдений n сверх некоторого предела не приводит к повышению точности простой арифметической середины. Так, при измерении углов однократным теодолитом точность измерений практически не повышается после 8—10 повторных измерений, так как при дальнейшем увеличении числа приемов влияние систематических ошибок (боковая рефракция, центрировка, инструментальные ошибки и пр.) начинает заметно превышать влияние ошибок случайных.

Таким образом, чтобы повысить точность окончательных результатов измерений, необходимо выбрать соответствующий инструмент, правильно установить число измерений и организовать эти измерения надлежащим образом, например распределить наблюдения на разное время и т. п. В этом случае увеличение числа приемов может повысить точность. При сравнении же по точности двух однотипных инструментов следует сравнивать показатели точности одного измерения (например, средние квадратические ошибки одного измерения m) или показатели точности (например, M) арифметических средних, полученных из равного числа измерений, выполненных сравниваемыми инструментами.

После оценки точности арифметической середины производится запись

$$x_0 \pm M.$$

Границы, в которых может быть заключено точное значение измеренной величины, с вероятностью $\Phi(t)$ равны

$$x_0 - t \cdot M \leq X \leq x_0 + t \cdot M.$$

Например, из 12 измерений угла получено значение $x_0 = 57^\circ 23' 44''.7$, $M = \pm 0''.75$. С вероятностью 0,9973 измеренный угол заключен в пределах

$$57^\circ 23' 42''.5 \leq X \leq 57^\circ 23' 46''.9.$$

§ 37. Отклонения результатов равноточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической середины

При оценке точности результатов наблюдений формулу (145)

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$$

в большинстве случаев использовать не представляется возможным, так как точное (истинное) значение наблюдаемой величины неизвестно. В силу этого, следовательно, невозможно вычислить истинные ошибки

$$\Delta_i = x_i - X,$$

необходимые для вычисления суммы $[\Delta^2]$ в упомянутой формуле. Простую арифметическую середину x_0 можно вычислить всегда, когда наблюдение одной и той же величины выполнено два и более раз. Для надежной оценки точности, в соответствии с формулой (181), необходимо, чтобы число наблюдений n удовлетворяло условию $n \geq 8 \div 10$.

Произведя n повторных наблюдений одной и той же величины, можно вычислить n отклонений результатов этих наблюдений от простой арифметической середины

$$v_i = x_i - x_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Задача состоит в том, чтобы получить формулу для оценки точности наблюдений, которая позволяла бы вычислять среднюю квадратическую ошибку m по отклонениям v_i результатов равноточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической середины. Прежде чем решить поставленную задачу, рассмотрим свойства отклонений v_i .

Первое свойство. Алгебраическая сумма отклонений результатов равноточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической середины равна нулю при любом числе наблюдений, т. е. $[v] = 0$.

Докажем это свойство, для чего по определению v_i запишем

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= x_1 - x_0 \\ v_2 &= x_2 - x_0 \\ &\dots \dots \dots \\ v_n &= x_n - x_0 \end{aligned} \right\}. \quad (330)$$

Суммируя левую и правую части равенств (330), получим

$$[v] = [x] - n \cdot x_0. \quad (331)$$

Но в (331) сумма $[x] = n \cdot x_0$ (по определению простой арифметической середины), следовательно,

$$[v] = 0. \quad (332)$$

При вычислении отклонений v_i (330) часто используют округленное значение простой арифметической середины. Легко показать, что если ошибка округления x_0

$$\beta = x_{0 \text{ округл}} - x_0,$$

то условию (332) будет соответствовать

$$[v] = n \cdot \beta. \quad (333)$$

Свойство (332) или (333) чисто арифметическое и выполняется при любом распределении ошибок. Формула (333) используется для контроля вычислений простой арифметической середины x_0 .

Второе свойство. Сумма квадратов отклонений результатов равноточных наблюдений от простой арифметической середины меньше суммы квадратов отклонений этих же результатов наблюдений от любой другой величины, не равной простой арифметической середине, т. е. если $x' \neq x_0$, то

$$[v^2] < [\varepsilon^2], \quad (334)$$

где

$$\begin{aligned} v_i &= x_i - x_0, \\ \varepsilon_i &= x_i - x'. \end{aligned}$$

Докажем второе свойство отклонений v_i алгебраическим путем. Для этой цели, вычитая в (334) по частям из нижнего равенства верхнее, получим

$$\varepsilon_i - v_i = x_i - x' - x_i + x_0 = x_0 - x' = c. \quad (335)$$

На основании (335), для случая, когда число наблюдений равно n , можем записать

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_1 + c \\ \varepsilon_2 &= v_2 + c \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varepsilon_n &= v_n + c \end{aligned} \right\}. \quad (336)$$

Возведем в квадрат равенства (336) и, суммируя левую и правую части, получим

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n \cdot c^2 + 2c[v]. \quad (337)$$

Но член $2c[v] = 0$ по первому свойству отклонений v_i , тогда

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n \cdot c^2. \quad (338)$$

Из (338) следует, что

$$[\varepsilon^2] > [v^2]$$

на положительное число $n \cdot c^2$, вне зависимости от того, $x' > x_0$ или $x' < x_0$.

Таким образом, при $x' \neq x_0$

$$[v^2] < [\varepsilon^2], \quad (339)$$

что и требовалось доказать.

Доказательство свойства отклонений v_i , приведшее к неравенству (339), подтверждает справедливость условия (318), а следовательно, и справедливость утверждения (§ 35), что наиболее надежным значением из ряда независимых равноточных наблюдений одной и той же величины является простая арифметическая середина.

Перейдем к решению поставленной выше задачи, т. е. найдем способ оценки точности результатов наблюдений с использованием v_i .

§ 38. Средняя квадратическая ошибка одного наблюдения, вычисленная по отклонениям результатов равноточных наблюдений от простой арифметической середины

Для решения поставленной в § 37 задачи установим связь между истинными ошибками Δ_i и отклонениями v_i . С этой целью запишем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i &= x_i - X \\ v_i &= x_i - x_0 \end{aligned} \right\}. \quad (340)$$

Составим разность

$$\Delta_i - v_i = x_i - X - x_i + x_0 = x_0 - X = \eta.$$

Здесь η — истинная ошибка простой арифметической середины.

Для случая, когда число измерений n , можем записать

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= v_1 + \eta \\ \Delta_2 &= v_2 + \eta \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \Delta_n &= v_n + \eta \end{aligned} \right\}. \quad (341)$$

Возведем в квадрат равенства (341)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^2 &= v_1^2 + \eta^2 + 2v_1 \eta \\ \Delta_2^2 &= v_2^2 + \eta^2 + 2v_2 \eta \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n^2 &= v_n^2 + \eta^2 + 2v_n \eta \end{aligned} \right\}. \quad (342)$$

Суммируя левую и правую части равенств (342), получим

$$[\Delta^2] = [v^2] + n \cdot \eta^2 + 2\eta [v]. \quad (343)$$

Или по первому свойству отклонений

$$[\Delta^2] = [v^2] + n \cdot \eta^2. \quad (344)$$

Выражение (344) позволяет перейти к вычислению средней квадратической ошибки по отклонениям v_i вместо истинных ошибок Δ_i .

Разделив левую и правую части равенства (344) на число измерений n , получим

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2, \quad (345)$$

или с учетом формулы (145)

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \eta^2. \quad (346)$$

По определению истинной ошибки

$$\Delta_i = x_i - X,$$

истинная ошибка η простой арифметической середины в соответствии с (314) может быть выражена формулой

$$\eta = \frac{[\Delta]}{n}. \quad (347)$$

Следовательно,

$$\eta^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n)^2}{n^2} \quad (348)$$

Далее

$$\eta^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 + 2\Delta_1\Delta_2 + 2\Delta_2\Delta_3 + \dots}{n^2},$$

или

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + 2 \frac{\sum \Delta_i \Delta_k}{n^2}. \quad (349)$$

Так как

$$\frac{1}{n} \sum \Delta_i \Delta_k = M(\Delta_i \Delta_k) = 0,$$

то по (349) имеем

$$\eta^2 = \frac{m^2}{n}. \quad (350)$$

Подставляя значение η^2 из (350) в (346), получим

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n},$$

или

$$m^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{[v^2]}{n}. \quad (351)$$

Окончательно

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \quad (352)$$

Формулу (352) часто называют формулой Бесселя.

Когда простую арифметическую среднюю вычисляют с введением приближенного значения x' по формуле (324), контролем вычисления $[v^2]$ может служить равенство

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

что очевидно, так как

$$v_i = x_i - x_0 = x_i - \left\{x' + \frac{[\varepsilon]}{n}\right\} = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n}. \quad (353)$$

В самом деле, по (353) можем записать

$$v_i^2 = \varepsilon_i^2 + \left\{\frac{[\varepsilon]}{n}\right\}^2 - 2\varepsilon_i \frac{[\varepsilon]}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или

$$[v^2] = [\varepsilon^2] + n \left\{\frac{[\varepsilon]}{n}\right\}^2 - 2 \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Таким образом,

$$[v^2] = [\varepsilon^2] + \frac{[\varepsilon]^2}{n} - 2 \frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

или

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}, \quad (354)$$

что и требовалось доказать.

Существуют также и другие способы контроля вычислений $[v^2]$.

Вычислив среднюю квадратическую ошибку m по формуле (352), среднюю квадратическую ошибку простой арифметической середины, в соответствии с формулой (328), вычисляют по формуле

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \quad (355)$$

Средняя квадратическая ошибка самой средней квадратической ошибки, вычисленной по формуле (352), в соответствии с формулой (181), равна

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (356)$$

Разность $(n-1)$ в формуле (352) называют числом избыточных (добавочных) наблюдений.

Практически достаточно как для формулы (145), так и для формулы (352) m_m вычислять по формуле (261)

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2n}}.$$

Для оценки степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному, как уже отмечалось в § 29, вычисляют коэффициент

$$k_1 = \frac{m_{\text{эмп}}}{\vartheta_{\text{эмп}}}$$

соотношения средней квадратической и средней ошибки. В случае, когда истинные ошибки наблюдений неизвестны, среднюю ошибку можно вычислить по абсолютным значениям отклонений v_i по формуле

$$\vartheta \approx \pm \frac{[|v|]}{n-0,5}. \quad (357)$$

Формула (357) получена на основании формулы, предложенной Петерсом

$$m \approx \pm 1,25 \frac{[|v|]}{n-0,5}. \quad (358)$$

В основу вывода формулы (358) положена теоретическая связь между средней и средней квадратической ошибками, выраженная формулой

$$m \approx 1,25 \vartheta. \quad (359)$$

Иногда среднюю квадратическую ошибку одного наблюдения, наряду с формулой (352), вычисляют по формуле (358). Совпадение или значительное расхождение полученных результатов, равно как и совпадение или значительное расхождение значения коэффициента

$$k_1 = \frac{m_{\text{эмп}}}{\vartheta_{\text{эмп}}},$$

с его теоретическим значением 1,25, являются количественными показателями сходимости действительного и теоретического распределений ошибок наблюдений.

§ 39. Порядок математической обработки ряда равнооточных наблюдений

Получив в результате повторных равнооточных наблюдений одной и той же величины ряд результатов

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

вычисляют:

1) простую арифметическую средину по формуле (315) или (324) с контролем: $[v] = 0$ (или $[v] = n\beta$, где β — ошибка округления значения x_0);

2) среднюю квадратическую ошибку одного измерения по формуле (352) с оценкой ее надежности по формуле (261) и с контролем вычисления суммы квадратов отклонений

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}; \quad (360)$$

иногда вычисляют также

$$m \approx 1,25 \frac{[|v|]}{n-0,5}; \quad (361)$$

3) среднюю квадратическую ошибку простой арифметической середины по формуле (355) с оценкой ее надежности по формуле

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2n}}. \quad (362)$$

Примеры. 1. Даны результаты равнооточных измерений одного и того же угла. Определить x_0 , m и M .

Решение. Составим табл. 23.

Т а б л и ц а 23

№ по пор.	Результаты измерений x_i	v_i	v_i^2	ε_i	ε_i^2	Решение
1	57° 23' 44"	-0,7	0,49	+4	16	Контроль $[v^2]$; $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}$; $[v^2] = 334 - \frac{56^2}{12} = 72$. $m = \sqrt{\frac{72,9}{11}}$, $m = \pm 2",6$ [по формуле (358)] $m = \pm 2",7$; $m_m = \pm 0",55$. $M = \frac{\pm 2",6}{\sqrt{12}}$; $M = \pm 0",75$; $m_M = \pm 0",15$.
2	40	-4,7	22,1	0	0	
3	43	-1,7	2,89	+3	9	
4	45	+0,3	0,09	+5	25	
5	46	+1,3	1,69	+6	36	
6	43	-1,7	2,89	+3	9	
7	48	+3,3	10,9	+8	64	
8	45	+0,3	0,09	+5	25	
9	48	+3,3	10,9	+8	64	
10	46	+1,3	1,69	+6	36	
11	47	+2,3	5,29	+7	49	
12	41	-3,7	13,7	+1	1	
$x' = 57^\circ 23' 40"$ $x_0 = 57^\circ 23' 44",7$		$-12,5$ $+12,1$ $-0,4$	72,9	+56	334	$x_0 = 57^\circ 23' 44",7 \pm 0",75$

Примечание. Отклонение $[v]$ от нуля ($-0,4$) вызвано округлением арифметической середины.

В самом деле, $x_0 = 57^\circ 23' 44",67$, а следовательно, $\beta = x_0$ округл. $-x_0 = -0",03$; $[v] = n\beta = -0",03 \cdot 12 = -0",4$.

2. В табл. 24 приведены из [13] результаты ряда равнооточных измерений сопротивления при эталонировании платинового термометра № 318 (ВНИИМ) в точке кипения кислорода (при $t^\circ = -182^\circ, 97\text{C}$). Вычислить окончательный результат исследования и оценить его точность.

№ по пор.	Сопротивле- ние R_i , ом ($R_i = x_i$)	$\varepsilon_i = x_i -$ $-x'$, ом	$v_i = x_i -$ $-x$, ом	Решение
1	6,2114	$+14 \cdot 10^{-4}$	$-0,1 \cdot 10^{-4}$	Контроль $[v^2]$: $[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} =$ $= 1,149 \cdot 10^{-4} - \frac{(650 \cdot 10^{-4})^2}{46};$ $[v^2] = 0,231 \cdot 10^{-4}.$ $m = \sqrt{\frac{0,230 \cdot 10^{-4}}{46}};$ $m = \pm 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$ [по формуле (358)] $m = \pm 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ ом}.$ $m_m \approx \frac{\pm 7,1 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{92}};$ $m_m = \pm 0,74 \cdot 10^{-4} \text{ ом};$ $M = \frac{\pm 7,1 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{46}};$ $M = \pm 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ ом}.$ $m_M \approx \frac{\pm 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ ом}}{\sqrt{92}};$ $m_M = \pm 0,11 \cdot 10^{-4} \text{ ом}.$
2	111	$+11$	$-3,1$	
3	099	-1	$-15,1$	
4	092	-8	$-22,1$	
5	125	$+25$	$+10,9$	
6	126	$+26$	$+11,9$	
7	127	$+27$	$+12,9$	
8	125	$+25$	$+10,9$	
9	116	$+16$	$+1,9$	
10	112	$+12$	$-2,1$	
11	110	$+10$	$-4,1$	
12	112	$+12$	$-2,1$	
13	114	$+14$	$-0,1$	
14	105	$+5$	$-9,1$	
15	115	$+15$	$+0,9$	
16	116	$+16$	$+1,9$	
17	117	$+17$	$+2,9$	
18	116	$+16$	$+1,9$	
19	112	$+12$	$-2,1$	
20	125	$+25$	$+10,9$	
21	120	$+20$	$+5,9$	
22	121	$+21$	$+6,9$	
23	122	$+22$	$+7,9$	
24	129	$+29$	$+14,9$	
25	114	$+14$	$-0,1$	
26	109	$+9$	$-5,1$	
27	119	$+19$	$+4,9$	
28	110	$+10$	$-4,1$	
29	108	$+8$	$-6,1$	
30	111	$+11$	$-3,1$	
31	111	$+11$	$-3,1$	
32	113	$+13$	$-1,1$	
33	116	$+16$	$+1,9$	
34	111	$+11$	$-3,1$	
35	113	$+13$	$-1,1$	
36	103	$+3$	$-11,1$	
37	111	$+11$	$-3,1$	
38	106	$+6$	$-8,1$	
39	114	$+14$	$-0,1$	
40	110	$+10$	$-4,1$	
41	112	$+12$	$-2,1$	
42	113	$+13$	$-1,1$	
43	113	$+13$	$-1,1$	
44	121	$+21$	$+6,9$	
45	115	$+15$	$+0,9$	
46	116	$+16$	$+1,9$	
$x' = 6,2100 \text{ ом}$ $x_0 = 6,211413$		$\sum +650 \cdot 10^{-4}$ $\varepsilon^2 = 1,149 \cdot 10^{-4}$	$-117,7$ $+119,1$ $[v^2] = 0,230 \cdot 10^{-4}$	

1) наиболее надежное значение сопротивления в точке кипения кислорода $x_0 = \bar{R} = 6,211413 \text{ ом} \pm 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ ом};$

2) с вероятностью 0,9973 истинное значение сопротивления R , заключенное в границах: $6,211413 - 3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ ом} \leq R \leq 6,211413 + 3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-4} \text{ ом}$; $6,21110 \text{ ом} \leq R \leq 6,21173 \text{ ом}$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

§ 40. Понятие о неравноточных наблюдениях

В практике математической обработки результатов наблюдений одной и той же величины часто встречаются случаи, когда опытный материал накапливается в виде серий с неодинаковым числом равноточных наблюдений (приемов). Иногда совместной обработке подлежат наблюдения, выполненные инструментами различной точности и с разным числом приемов, в существенно разных условиях и т. п.

Пусть, например, имеется k серий равнооточных наблюдений одной и той же величины, точное значение которой X ,

[illegible]

Если каждая из серий обработана отдельно и получены простые арифметические середины

$$x_{0(I)}, \quad x_{0(II)}, \quad x_{0(III)}, \dots, x_{0(k)}, \quad (364)$$

и их средние квадратические ошибки

$$M_I, M_{II}, M_{III}, \dots, M_k,$$

то совокупность (364) можно рассматривать как ряд случайных величин, представляющих простейший случай результатов неравноточных наблюдений. Могут встречаться и более сложные случаи, например, когда наблюдения в каждой серии между собой также неравноточны.

Таким образом, неравноточными наблюдениями одной и той же величины или однородных величин будем называть такие наблюдения, которые выполнены инструментами различной

точности или инструментами одинаковой точности, но разным числом приемов, или выполнены в различных условиях (внешняя среда, оптность наблюдателя и т. д.).

Возникает задача отыскания по результатам неравноточных наблюдений одной и той же величины наиболее надежного окончательного результата, обладающего наименьшей средней квадратической ошибкой.

§ 41. Общая арифметическая середина. Веса наблюдений

Задачу на отыскание по результатам неравноточных наблюдений одной и той же величины наиболее надежного окончательного результата решим в общем виде.

Пусть в результате неравноточных наблюдений получен ряд

$$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \end{array} \right\}, \quad (365)$$

где $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ — средние квадратические ошибки результатов наблюдений $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

С формальной вероятностно-статистической точки зрения, следовательно, условие неравноточности различных значений x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) может быть выражено неравенствами

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq \dots \neq m_n.$$

Для упрощения решения поставленной задачи от средних квадратических ошибок m_i перейдем к нормированным ошибкам t_i :

$$t_1 = \frac{x_1 - X}{m_1}; \quad t_2 = \frac{x_2 - X}{m_2}; \quad t_3 = \frac{x_3 - X}{m_3}; \dots; \quad t_n = \frac{x_n - X}{m_n}. \quad (366)$$

Здесь

$$x_1 - X = \Delta_1; \quad x_2 - X = \Delta_2; \quad x_3 - X = \Delta_3; \dots; \quad x_n - X = \Delta_n$$

— истинные ошибки результатов неравноточных наблюдений. С вероятностной точки зрения получение результатов x_i в (365) равносильно получению ряда нормированных ошибок (366).

Предположим, что случайные ошибки Δ_i подчиняются закону нормального распределения, тогда вероятности попадания нормированных ошибок в интервалы $t_i + dt_i$, $t_i - dt_i$ будут в соответствии с формулой (92) равны

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) dt_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_1^2} dt_1; \quad \varphi(t_2) dt_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_2^2} dt_2; \dots; \\ \varphi(t_n) dt_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t_n^2} dt_n. \end{aligned}$$

Вероятность сложного события, состоящего в совместном появлении результатов неравноточных наблюдений (365), по теореме умножения для независимых случайных величин выражается формулой

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2)} \cdot dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_n. \quad (367)$$

Наиболее надежное значение искомой величины, являющейся функцией результатов неравноточных наблюдений, будет соответствовать максимальному значению вероятности совокупности x_i (365). Из (367) вытекает, что вероятность P примет максимальное значение, если будет выполнено условие

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \min$$

или

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - X}{m_i} \right)^2 = \min. \quad (368)$$

Примем в (368) в качестве X его приближенное значение x_0 — наиболее надежное значение искомой величины и определим его под условием (368). Представим (368) в развернутом виде

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{m_1^2} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{m_2^2} + \dots + \frac{(x_n - x_0)^2}{m_n^2} = \min. \quad (369)$$

Найдем первую производную по (369) и приравняем ее к нулю

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_i} \left\{ \frac{(x_1 - x_0)^2}{m_1^2} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{m_2^2} + \dots + \frac{(x_n - x_0)^2}{m_n^2} \right\} = \\ = 2 \left\{ \frac{x_1 - x_0}{m_1^2} + \frac{x_2 - x_0}{m_2^2} + \dots + \frac{x_n - x_0}{m_n^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

или, сокращая на 2 и умножив на произвольное постоянное c^* , получим

$$x_1 \frac{c}{m_1^2} - x_0 \frac{c}{m_1^2} + x_2 \frac{c}{m_2^2} - x_0 \frac{c}{m_2^2} + \dots + x_n \frac{c}{m_n^2} - x_0 \frac{c}{m_n^2} = 0. \quad (370)$$

После преобразований в левой части равенства (370) имеем

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{c}{m_i^2} - x_0 \sum_{i=1}^n \frac{c}{m_i^2} = 0$$

или

$$\left[x \frac{c}{m^2} \right] - x_0 \left[\frac{c}{m^2} \right] = 0. \quad (371)$$

* Произвольное постоянное выбирается так, чтобы сомножители $\frac{c}{m_i^2}$ были, по возможности, близки к единице.

Из (371) следует

$$x_0 = \frac{\left[x \frac{c}{m^2} \right]}{\left[\frac{c}{m^2} \right]}$$

или в развернутом виде

$$x_0 = \frac{x_1 \frac{c}{m_1^2} + x_2 \frac{c}{m_2^2} + \dots + x_n \frac{c}{m_n^2}}{\frac{c}{m_1^2} + \frac{c}{m_2^2} + \dots + \frac{c}{m_n^2}}. \quad (372)$$

Величины $\frac{c}{m_i^2}$, обратно пропорциональные квадратам средних квадратических ошибок, называют весами неравноточных наблюдений.

Обозначим:

$$\frac{c}{m_1^2} = p_1 \text{ — вес результата } x_1,$$

$$\frac{c}{m_2^2} = p_2 \text{ — вес результата } x_2,$$

.

$$\frac{c}{m_n^2} = p_n \text{ — вес результата } x_n.$$

С учетом принятых обозначений выражение (372) примет вид

$$x_0 = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

В более общем виде

$$x_0 = \frac{[xp]}{[p]}. \quad (373)$$

Величину x_0 , являющуюся наиболее надежным значением искомой величины, равную частному от деления на сумму весов суммы произведений результатов неравноточных наблюдений на соответствующие веса, называют **весовым средним** или **общей арифметической серединой**, в отличие от простой арифметической середины (315).

Таким образом, если случайные ошибки независимых неравноточных наблюдений подчиняются нормальному закону распределения, то наиболее надежным значением определяемой величины является **общая арифметическая середина**.

Из определения весов неравноточных наблюдений следует, что большей точности наблюдений (или меньшим средним квадратическим ошибкам) соответствуют большие веса. По этой причине говорят, что вес определяет степень доверия результату наблюдения.

При вычислении весов однородных результатов наблюдений по формуле

$$p_i = \frac{c}{m_i^2} \quad (374)$$

размерность произвольного постоянного c принимают равной размерности m_i^2 . В данном случае веса есть отвлеченные числа, являющиеся количественной характеристикой соотношения точности результатов неравноточных наблюдений. При вычислении весов по формуле (374) в большинстве случаев достаточно удерживать две значащие цифры.

Из вышеизложенного вытекает, что простая арифметическая середина есть частный случай общей арифметической середины, когда

$$p_1 = p_2 = \dots = 1 \quad ([p] = n).$$

Пользуясь определением весов (374), легко показать, что вес простой арифметической середины больше веса одного наблюдения, по которым она вычислена, в n раз (n — число наблюдений).

В самом деле, если P — вес простой арифметической середины, p — вес одного наблюдения, то в соответствии с определением весов (374) имеем

$$P = \frac{c}{M^2}; \quad p = \frac{c}{m^2}; \quad (375)$$

здесь M — средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины, m — средняя квадратическая ошибка одного наблюдения.

По (375) получим

$$\frac{P}{p} = \frac{\frac{c}{M^2}}{\frac{c}{m^2}} = \frac{\frac{c}{\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right)^2}}{\frac{c}{m^2}} = n. \quad (376)$$

Как следствие из (373) и (376), вес общей арифметической середины P_{x_0} равен сумме весов результатов наблюдений, по которым она вычислена, т. е.

$$P_{x_0} = [p]. \quad (377)$$

В частном случае, когда неравноточность полученных результатов обусловлена числом равноточных наблюдений, как это имел место в сериях (363), в качестве весов отдельных простых арифметических средних (364) следует взять число наблюдений в отдельных сериях, т. е.

$$p_1 = i; \quad p_2 = i + 2; \quad p_3 = i - 5; \quad \dots; \quad p_k = i + 1.$$

На этом примере легко установить сходство и некоторую аналогию между весом p_i и относительной частотой Q и, следовательно,

между общей арифметической серединой (373) и математическим ожиданием (110). Для этой цели необходимо в (373) принять, что

$$p'_1 = \frac{p_1}{[p]} ; \quad p'_2 = \frac{p_2}{[p]} ; \quad \dots ; \quad p'_n = \frac{p_n}{[p]}$$

и рассматривать p_i как вероятности.

В большинстве случаев, так же как и при вычислении простой арифметической середины, общую арифметическую середину по формуле (373) вычислять неудобно. Удобнее вводить приближенное значение измеренной величины x' . Формула общей арифметической середины в этом случае может быть получена следующим образом. Если

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

— результаты неравноточных наблюдений одной и той же величины, а

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

— их веса, то, вводя приближенное значение x' , получим остатки

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_1 - x' \\ \varepsilon_2 &= x_2 - x' \\ &\dots \\ \varepsilon_n &= x_n - x' \end{aligned} \right\}. \quad (378)$$

Далее, в соответствии с формулой (373) и с учетом равенств (378), имеем

$$x_0 = \frac{(x' + \varepsilon_1) p_1 + (x' + \varepsilon_2) p_2 + \dots + (x' + \varepsilon_n) p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n};$$

$$x_0 = x' + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}. \quad (379)$$

В качестве приближенного значения x' при вычислении общей арифметической середины по формуле (379) рекомендуется выбирать также наименьшее из значений x_i с тем, чтобы остатки ε_i были положительными.

§ 42. Веса функций величин, полученных из зависимых и независимых наблюдений

Задачу на определение весов функций решим в общем виде аналогично тому, как поступали при оценке точности (см. § 34). Пусть дана функция

$$u = f(x, y, z, \dots, w),$$

где $x, y, z, \dots, w$ — наблюдаемые аргументы, веса которых ($p_x, p_y, p_z, \dots, p_w$) предполагаются известными.

Необходимо определить вес функции u .

Рассмотрим два случая: случай функции коррелятивно-зависимых и функции независимых аргументов $x, y, z, \dots, w$.

Для функции коррелятивно-зависимых аргументов квадрат средней квадратической ошибки выражается формулой (296), т. е.

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2 + \\ + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{x,y} \cdot |m_x| \cdot |m_y| + \dots$$

В то же время в соответствии с (374)

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}.$$

Обратный вес функции общего вида для случая коррелятивно-зависимых аргументов в соответствии с формулами (296) и (374) примет вид

$$\frac{c}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{c}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \cdot \frac{c}{p_y} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \cdot \frac{c}{p_w} + \\ + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{x,y} \cdot \frac{c}{\sqrt{p_x \cdot p_y}} + \dots \quad (380)$$

или

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_y} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_w} + \\ + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cdot r_{x,y} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_x \cdot p_y}} + \dots \quad (381)$$

Пример. Определить вес угла β (из примера 10, § 34), представляющего сумму значений двух смежных углов β_1 и β_2 , если вес углов $p_{\beta_1} = p_{\beta_2} = 1$.

Так как

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \quad r_{\beta_1, \beta_2} = -0,25,$$

то

$$\frac{1}{p_\beta} = \frac{1}{p_{\beta_1}} + \frac{1}{p_{\beta_2}} + 2r_{\beta_1, \beta_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_{\beta_1} \cdot p_{\beta_2}}}$$

или

$$\frac{1}{p_\beta} = 2 - 2 \cdot 0,25 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = 2 - 0,5 = 1,5.$$

Таким образом, $p_\beta = 0,67$.

Если бы не была учтена корреляционная зависимость, то вместо верного значения $p_\beta = 0,67$ было бы получено $p_\beta = 0,5$.

Для средней квадратической ошибки функции независимых аргументов в § 33 была получена формула (300), в соответствии с которой

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 m_w^2. \quad (382)$$

Обратный вес функции в этом случае с учетом формул (374) и (382) может быть получен по формуле

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_y} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0^2 \cdot \frac{1}{p_w}. \quad (383)$$

Для всех пяти случаев функции общего вида, рассмотренных в § 33, по формуле (383) имеем

$$1. u = kx; \quad \frac{1}{p_u} = k \cdot \frac{1}{p_x}.$$

$$2. u = x \pm y; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y}.$$

$$3. u = x \pm y \pm z; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z}.$$

$$4. u = x \pm y \pm \dots \pm w; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \dots + \frac{1}{p_w}.$$

$$5. u = k_1 x \pm k_2 y \pm \dots \pm k_n w; \quad \frac{1}{p_u} = k_1 \frac{1}{p_x} + k_2 \frac{1}{p_y} + \dots + k_n \frac{1}{p_w}.$$

П р и м е р ы. 1. Определить вес вычисленного значения длины окружности s , если вес радиуса R $p_R = 6,3$ ($R = 46,3 \pm 0,4$ мм).

Решение.

$$s = 2\pi R; \quad \frac{1}{p_s} = \frac{(2\pi)^2}{p_R}; \quad \frac{1}{p_s} = 6,6; \quad p_s = 0,15.$$

2. Определить вес функции

$$u = x - y + z, \text{ если } p_x = 3, \quad p_y = \frac{1}{3}, \quad p_z = \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z}; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{1}{3} + 3 + 4 = \frac{22}{3}; \quad p_u = \frac{3}{22}.$$

3. Определить вес функции

$$u = 2x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z, \text{ если } p_x = 3, \quad p_y = \frac{1}{3}, \quad p_z = \frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\frac{1}{p_u} = \frac{4}{p_x} + \frac{1}{9p_y} + \frac{1}{4p_z} = \frac{4}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{4};$$

$$\frac{1}{p_u} = \frac{36+9+27}{27} = \frac{8}{3}; \quad p_u = \frac{3}{8}.$$

4. Определить вес площади треугольника, если основание его $b = 8,0$ м получено с весом $p_b = 1$, а высота $h = 16,0$ м с весом $p_h = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$u = \frac{1}{2}bh;$$

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 \cdot \frac{1}{p_b} + \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_0 \cdot \frac{1}{p_h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_0 = \frac{1}{2}h; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial h}\right)_0 = \frac{1}{2}b;$$

$$\frac{1}{p_u} = \frac{h^2}{4p_b} + \frac{b^2}{4p_h} = \frac{h^2 + 2b^2}{4}; \quad \frac{1}{p_u} = \frac{256 + 128}{4} = \frac{384}{4};$$

$$\frac{1}{p_u} = 96; \quad p_u = \frac{1}{96}.$$

§ 43. Отклонения результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины

Отклонениями v_i результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины x_0 будем называть разность

$$v_i = x_i - x_0. \quad (384)$$

Рассмотрим свойства этих отклонений.

Первое свойство. Алгебраическая сумма произведений отклонений результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины на соответствующие веса равна нулю при любом числе наблюдений, т. е.

$$[vp] = 0. \quad (385)$$

Докажем это свойство, выражаемое равенством (385), для чего запишем

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 & v_1 = x_1 - x_0 \\ p_2 & v_2 = x_2 - x_0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ p_n & v_n = x_n - x_0 \end{array} \right\}, \quad (386)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — веса отклонений соответственно $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Перемножив равенства (386) на соответствующие веса и сложив левую и правую части, получим

$$[vp] = [xp] - x_0 [p].$$

Согласно (373)

$$[xp] = x_0 [p],$$

следовательно,

$$[vp] = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если при вычислении отклонений v_i по формуле (384) общая арифметическая середина x_0 была округлена на величину β , то нетрудно по (386) установить, что свойству (385) соответствует

$$[vp] = \beta [p]. \quad (387)$$

Свойство (387), равно как и (385), применяют для контроля вычислений общей арифметической середины.

Второе свойство. Сумма произведений квадратов отклонений результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины на соответствующие веса минимальна, т. е.

$$[v^2p] = \min. \quad (388)$$

Выше (§ 42) было доказано, что

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{m_1^2} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{m_2^2} + \dots + \frac{(x_n - x_0)^2}{m_n^2} = \min. \quad (389)$$

Выберем некоторое (может быть, даже несуществующее) наблюдение x_k , вес которого был бы равен единице, т. е.

$$p_k = 1.$$

Обозначим среднюю квадратическую ошибку этого результата m_k через μ , тогда формула (374) примет вид

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1 \\ \mu &= m_k \\ \mu &= \sqrt{c} \end{aligned} \right\}. \quad (395)$$

Таким образом, по (395) μ — это средняя квадратическая ошибка результата наблюдения, вес которого принят равным единице. Для краткости говорят, что μ есть средняя квадратическая ошибка единицы веса (или даже просто «ошибка единицы веса»).

В соответствии с формулой (374) и вторым равенством в выражении (395) можем записать

$$\mu = m_i \sqrt{p_i} \quad (396)$$

или

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad (397)$$

т. е. средняя квадратическая ошибка любого результата наблюдений равна ошибке единицы веса, деленной на квадратный корень из веса этого результата.

Формула (397) является основной формулой оценки точности при обработке неравноточных наблюдений. Она показывает, что для оценки точности любой величины необходимо решить две задачи: 1) найти вес этой величины и 2) определить ошибку единицы веса. Первую задачу решают по формулам (381) и (383); о способах определения ошибки единицы веса будет сказано ниже.

Так как по (377) вес общей арифметической середины равен $[p]$, то в соответствии с (397) средняя квадратическая ошибка общей арифметической середины

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (398)$$

§ 45. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, вычисленная по истинным ошибкам неравноточных наблюдений

Пусть в результате неравноточных наблюдений получены

$$\left. \begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_n \\ \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{aligned} \right\},$$

где Δ_i — истинные ошибки неравноточных наблюдений;

p_i — соответствующие веса ($i = 1, 2, \dots, n$).

Для сравнения истинных ошибок Δ_i между собой, учитывая формулу (396), умножим каждую из них на корень квадратный из

соответствующих весов и таким образом ряд ошибок неравноточных наблюдений $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, как бы превратим в ряд ошибок равноточных наблюдений

$$\Delta_1 \sqrt{p_1}, \quad \Delta_2 \sqrt{p_2}, \quad \dots, \quad \Delta_n \sqrt{p_n}. \quad (399)$$

Умножая ошибки на $\sqrt{p}$ их нормируют, т. е. получают возможность сравнивать нормированные значения

$$\Delta_i \sqrt{p_i} = \Delta_i \sqrt{\frac{\mu^2}{m_i^2}} = \mu \frac{\Delta_i}{m_i} = \mu t_i.$$

Но значения t_i для любых рядов наблюдений подчиняются одному закону распределения. В этом суть выполняемых преобразований.

Пользуясь рядом (399) среднюю квадратическую ошибку единицы веса получим по формуле (145)

$$\mu^2 = \frac{(\Delta_1 \sqrt{p_1})^2 + (\Delta_2 \sqrt{p_2})^2 + \dots + (\Delta_n \sqrt{p_n})^2}{n};$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2 p]}{n}}. \quad (400)$$

Формулу (400) непосредственно применять удастся редко, так как истинное значение наблюдаемой величины X , необходимое для вычисления истинных ошибок

$$\Delta_i = x_i - X,$$

в большинстве случаев неизвестно.

Тем не менее, формула (400) играет весьма важную роль, когда вместо ошибок наблюдений используются ошибки функций результатов наблюдений, т. е. невязки. Тогда формула (400) примет вид

$$\mu = \sqrt{\frac{Pw^2}{n}}, \quad (401)$$

где

$$w = \varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(X_1, \dots, X_n),$$

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}.$$

Примером применения формулы (401) является известная формула Ферреро

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}},$$

где

$$w = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 180^\circ,$$

$$\frac{1}{P} = 3 \text{ (обратный вес суммы трех углов).}$$

180° — истинное значение функции, т. е. суммы трех углов треугольника;

n — число треугольников.

Кроме того, формула (400) будет далее использована для вывода некоторых других формул, имеющих практическое значение и, в частности, позволит перейти от оценки точности по истинным ошибкам к оценке точности по отклонениям результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины (384), т. е. по разностям

$$v_i = x_i - x_0.$$

§ 46. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, вычисленная по отклонениям результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины

Выразим истинные ошибки неравноточных наблюдений в формуле (400) через отклонения (384), для чего запишем

$$\left. \begin{array}{l} p_i \quad \Delta_i = x_i - X \\ p_i \quad v_i = x_i - x_0 \end{array} \right\}. \quad (402)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Составим разность

$$\Delta_i - v_i = x_0 - X = \eta; \quad (403)$$

здесь η — истинная ошибка общей арифметической середины (см. [18], стр. 78).

Далее запишем

$$\eta = \frac{[\Delta p]}{[p]}; \quad (404)$$

в самом деле,

$$\begin{aligned} \eta = x_0 - X &= \frac{[xp]}{[p]} - X; \quad \eta = \frac{[xp]}{[p]} - \frac{[p]}{[p]} \cdot X = \frac{[xp] - [Xp]}{[p]} = \\ &= \frac{[(x - X)p]}{[p]} = \frac{[\Delta p]}{[p]}. \end{aligned}$$

Для n наблюдений можем записать

$$\left. \begin{array}{l} p_1 \quad \Delta_1 = v_1 + \eta \\ p_2 \quad \Delta_2 = v_2 + \eta \\ \dots \dots \dots \\ p_n \quad \Delta_n = v_n + \eta \end{array} \right\}. \quad (405)$$

Для перехода к μ^2 , в соответствии с формулой (400) возведем в квадрат и умножим на соответствующие веса равенств (405)

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1^2 p_1 = v_1^2 p_1 + \eta^2 p_1 + 2\eta v_1 p_1 \\ \Delta_2^2 p_2 = v_2^2 p_2 + \eta^2 p_2 + 2\eta v_2 p_2 \\ \dots \dots \dots \\ \Delta_n^2 p_n = v_n^2 p_n + \eta^2 p_n + 2\eta v_n p_n \end{array} \right\}. \quad (406)$$

Суммируя левую и правую части равенств (406), получим

$$[\Delta^2 p] = [v^2 p] + \eta^2 [p] + 2\eta [vp]. \quad (407)$$

Но по первому свойству отклонений в соответствии с (385)

$$2\eta [vp] = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{[\Delta^2 p]}{n} = \frac{[v^2 p]}{n} + \eta^2 \frac{[p]}{n}. \quad (408)$$

Предварительно, с учетом (400), преобразуем η^2 следующим образом:

$$\eta^2 = \left(\frac{[\Delta p]}{[p]} \right)^2 = \frac{\Delta_1^2 p_1^2 + \Delta_2^2 p_2^2 + \dots + \Delta_n^2 p_n^2 + 2 \sum \Delta_i p_i \Delta_k p_k}{[p]^2};$$

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2 p^2] + 2 \sum \Delta_i p_i \Delta_k p_k}{[p]^2}. \quad (409)$$

Пусть в (409)

$$[\Delta^2 p^2] = [\Delta^2 p] \cdot p_{\text{ср}}, \quad (410)$$

причем заранее подберем $p_{\text{ср}}$ таким образом, чтобы удовлетворялось равенство (410), т. е.

$$p_{\text{ср}} = \frac{[\Delta^2 p^2]}{[\Delta^2 p]}.$$

Равенство (409) можем представить с учетом (410) в следующем виде

$$\eta^2 = \frac{[\Delta^2 p] p_{\text{ср}} + 2 p_{\text{ср}} \sum \Delta_i \Delta_k p_k'}{[p]^2}. \quad (411)$$

При числе наблюдений достаточно большом, очевидно, справедливо приближенное равенство

$$\frac{p_{\text{ср}}}{[p]} \approx \frac{1}{n}. \quad (412)$$

С учетом (412) выражение (411) примет вид

$$\eta^2 \approx \frac{[\Delta^2 p]}{[p] \cdot n} + 2 \frac{1}{[p] \cdot n} \cdot \sum \Delta_i \Delta_k p_k'. \quad (413)$$

Пренебрегая в (413) членом $\frac{2}{[p] \cdot n} \sum \Delta_i \Delta_k p_k'$ в силу того, что для независимых наблюдений

$$\frac{1}{n} \sum \Delta_i \Delta_k p_k' = M(\Delta_i) M(\Delta_k p_k) = 0,$$

получим

$$\eta^2 \approx \frac{[\Delta^2 p]}{[p] \cdot n} = \frac{\mu^2}{[p]} = M^2. \quad (414)$$

В (414) M — средняя квадратическая ошибка общей арифметической середины. Подставляя значение η^2 из (414) в (408), с учетом того, что

$$\frac{[\Delta^2 p]}{n} = \mu^2$$

запишем

$$\begin{aligned}\mu^2 &= \frac{[v^2 p]}{n} + \frac{\mu^2}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n}; \\ \mu^2 - \frac{\mu^2}{n} &= \frac{[v^2 p]}{n}.\end{aligned}\quad (415)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\mu^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{[v^2 p]}{n}; \\ \mu &= \sqrt{\frac{[v^2 p]}{n-1}}.\end{aligned}\quad (416)$$

Применение формулы (416) позволяет решить поставленную выше задачу оценки точности по отклонениям результатов неравноточных наблюдений от общей арифметической середины.

В соответствии с формулой (181) надежность средней квадратической ошибки, вычисленной по формуле (416), будет определяться формулой

$$m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (417)$$

В соответствии с формулами (397) и (417) надежность средней квадратической ошибки общей арифметической середины характеризуется формулой

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (418)$$

В том случае, когда общую арифметическую середину вычисляют по формуле (379) с введением приближенного значения x' , контролем $[v^2 p]$ служит равенство

$$[v^2 p] = [\varepsilon^2 p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]}. \quad (419)$$

В самом деле,

$$v_i = x_i - x_0 = x_i - \left\{x' + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}\right\} = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon p]}{[p]}.$$

Далее,

$$[v^2 p] = \sum_{i=1}^n \left\{ \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon p]}{[p]} \right\}^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n \left\{ \varepsilon_i^2 + \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]^2} - 2\varepsilon_i \frac{[\varepsilon p]}{[p]} \right\} \cdot p_i;$$

или

$$[v^2 p] = [\varepsilon^2 p] + \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]^2} \cdot [p] - 2 \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]} = [\varepsilon^2 p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]},$$

что и требовалось доказать.

§ 47. Порядок математической обработки ряда неравноточных наблюдений

Получив в результате многократных неравноточных наблюдений одной и той же величины ряд

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

с весами

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n,$$

вычисляют:

1) общую арифметическую средину по формуле (373) или (379) с контролем

$$[vp] = 0 \quad (\text{или } [vp] = [p] \cdot \beta);$$

2) среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле (416) с оценкой надежности по формуле (417) и с контролем вычисления по формуле (419); в тех случаях, когда система весов определялась по формуле (374), ошибку единицы веса следует вычислять по формуле (395);

3) среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средину по формуле (398) с оценкой ее надежности по (418) или по формуле

$$m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2n}}. \quad (420)$$

Примеры. 1. Географическая широта одной из точек земной поверхности определена из 8 серий наблюдений восемь раз, в результате чего вычислены простые арифметические средины и их средние квадратические ошибки. Определить окончательное значение широты (общую арифметическую средину) и ее среднюю квадратическую ошибку.

Решение. Составим табл. 25.

Т а б л и ц а 25

№ се- рии	Значение широты, полученное в серии φ_i	Средняя кв. оши- бка широты в серии M_i	$P_i =$ $\frac{(0,28)^2}{M_i^2}$	ε_i	$\varepsilon_i P_i$	$\varepsilon_i^2 P_i$	v_i	$v_i P_i$	$v_i^2 P_i$
1	15° 45' 36",18	±0",25	1,4	+0,91	+1,27	1,16	+0,40	+0,56	0,22
2	35 ,53	0 ,21	1,8	+0,26	+0,47	0,12	-0,25	-0,45	0,11
3	36 ,39	0 ,31	0,81	+1,12	+0,91	1,02	+0,61	+0,49	0,30
4	35 ,27	0 ,19	2,2	0,00	0,00	0,00	-0,51	-1,12	0,57
5	35 ,78	0 ,28	1,0	+0,51	+0,51	0,26	0,00	0,00	0,00
6	35 ,96	0 ,23	1,5	+0,69	+1,04	0,72	+0,18	+0,27	0,05
7	36 ,02	0 ,35	0,64	+0,75	+0,48	0,36	+0,24	+0,15	0,04
8	35 ,81	0 ,15	3,5	+0,54	+1,89	1,02	+0,03	+0,10	0,00
$\varphi' = 15^\circ 45' 35'',27;$ $\varphi_0 = 15^\circ 45' 35'',27 +$ $\quad + \frac{6'',57}{12,85};$ $\varphi_0 = 15^\circ 45' 35'',78.$			12,85		6,57	4,66		+1,57 -1,57	1,29
							[vp]	=0,00	

Вычислим общую арифметическую средину по формуле (379)

$$\varphi_0 = \varphi' + \frac{[\varepsilon P]}{[P]}; \quad \varphi_0 = 15^\circ 45' 35'',27 + \frac{6'',57}{12,85};$$

$$\varphi_0 = 15^\circ 45' 35'',78.$$

Контроль: $[vp] = 0.$

Далее вычислим среднюю квадратическую ошибку единицы веса по формуле (416)

$$\mu = \sqrt{\frac{1,29}{8-1}}; \quad \mu = \pm 0",43$$

с оценкой надежности μ по формуле (417)

$$m_{\mu} = \frac{\pm 0",43}{\sqrt{2(8-1)}}; \quad m_{\mu} = \pm 0",11.$$

Контроль вычисления:

$$[v^2 p] = [\varepsilon^2 p] - \frac{[\varepsilon p]^2}{[p]} = 4,66 - \frac{(6,57)^2}{12,85};$$

$$[v^2 p] = 4,66 - 3,36 = 1,30.$$

И, наконец, вычислим среднюю квадратическую ошибку общей арифметической середины по формуле (397)

$$M = \frac{\pm 0",43}{\sqrt{12,85}} = \pm 0",12$$

с оценкой ее надежности по формуле (418)

$$m_M = \frac{\pm 0",12}{\sqrt{2(8-1)}} = \pm 0",032.$$

С вероятностью 0,9973 значение искомой широты заключено в пределах $15^{\circ}45'35",42 \leq \varphi \leq 15^{\circ}45'36",14$.

2. В § 28 приведен пример на определение коэффициентов соотношения средней квадратической, средней и вероятной ошибок.

Принимая в качестве весов отдельных значений k_1 и k_2 число ошибок по участку, найти средние весовые значения коэффициентов k_1 и k_2 и их средние квадратические ошибки.

Решение. На основании данных табл. 16 составим табл. 26.

Вычислим средние весовые значения коэффициентов k_1 и k_2

$$k_1 = \frac{[k_1 \cdot p]}{[p]} = \frac{22,22}{17,59}; \quad k_1 = 1,263 \text{ (должно быть } 1,253 \dots);$$

$$k_2 = \frac{[k_2 \cdot p]}{[p]} = \frac{26,79}{17,59}; \quad k_2 = 1,523 \text{ (должно быть } 1,483 \dots).$$

Контроль:

$$[v_{k_1} \cdot p] = -0,010; \quad [v_{k_2} \cdot p] = -0,01.$$

Вычислим средние квадратические ошибки единицы веса (за единицы веса приняты k_1 и k_2 , вычисленные по 100 ошибкам) и оценим их надежность:

$$\mu_{k_1} = \sqrt{\frac{0,0466}{12-1}} = \pm 0,065; \quad \mu_{k_2} = \sqrt{\frac{0,315}{12-1}} = \pm 0,17;$$

$$m_{\mu_{k_1}} = \frac{\pm 0,065}{\sqrt{2(12-1)}} = \pm 0,014; \quad m_{\mu_{k_2}} = \frac{\pm 0,17}{\sqrt{2(12-1)}} = \pm 0,036.$$

Вычислим средние квадратические ошибки весовых средних:

$$M_{k_1} = \frac{\pm 0,065}{\sqrt{17,59}} = \pm 0,016; \quad M_{k_2} = \frac{\pm 0,17}{\sqrt{17,59}} = \pm 0,041.$$

С вероятностью 0,95 искомые коэффициенты k_1 и k_2 заключены в пределах:

$$1,231 \leq k_1 \leq 1,295;$$

$$1,441 \leq k_2 \leq 1,603.$$

Таблица 26

№ участ- ков	Коэффициенты			Число ошибок, n	Вес $\frac{n_i}{p_i = \frac{100}{}}$	$k_i \cdot p_i$	$k_2 \cdot p_i$	Отклонения		Контроль		$v_{k_1} \cdot p_i$	$v_{k_2} \cdot p_i$	$v_{k_2}^2 \cdot p_i$
	$k_1 = \frac{m_{эмп}}{v_{эмп}}$	$k_2 = \frac{m_{эмп}}{r_{эмп}}$						v_{k_i}	v_{k_2}	$v_{k_1} \cdot p_i$	$v_{k_2} \cdot p_i$			
1	1,25	1,75		220	2,2	2,75	3,85	-0,013	+0,228	-0,029	+0,50	0,0004	0,114	
2	1,18	1,30		161	1,61	1,90	2,09	-0,083	-0,222	-0,134	-0,36	0,0111	0,079	
3	1,32	1,35		115	1,15	1,52	1,55	+0,057	-0,172	+0,066	-0,20	0,0038	0,034	
4	1,32	1,55		100	1,00	1,32	1,55	+0,057	+0,028	+0,057	+0,03	0,0032	0,001	
5	1,20	1,46		59	0,59	0,71	0,86	-0,063	-0,062	-0,037	-0,04	0,0023	0,002	
6	1,25	1,60		95	0,95	1,19	1,52	-0,013	+0,078	-0,012	+0,07	0,0002	0,005	
7	1,31	1,57		93	0,93	1,22	1,46	+0,047	+0,048	+0,044	+0,04	0,0021	0,002	
8	1,16	1,28		104	1,04	1,21	1,33	-0,103	-0,242	-0,107	-0,25	0,0110	0,060	
9	1,26	1,54		115	1,15	1,45	1,77	-0,003	+0,018	-0,003	+0,02	0,0000	0,000	
10	1,32	1,54		353	3,53	4,66	5,44	+0,057	+0,018	+0,201	+0,06	0,0115	0,001	
11	1,25	1,60		236	2,36	2,95	3,78	-0,013	+0,078	-0,031	+0,18	0,0004	0,014	
12	1,24	1,47		108	1,08	1,34	1,59	-0,023	-0,052	-0,025	-0,06	0,0006	0,003	
					17,59	22,22	26,79			-0,378	-0,91	0,0466	0,315	
										+0,368	+0,90			

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

§ 48. Постановка задачи

В практике технических измерений часто встречаются случаи, когда приходится измерять большие группы однородных величин. Естественно, что для получения значений каждой из измеряемых величин и надежной оценки точности целесообразно было бы каждую из этих величин измерять многократно, по крайней мере, не менее 8—10 раз (см. § 29).

Однако большой объем работы при такой организации измерений во многих случаях вынуждает исполнителя сокращать число повторных измерений каждой величины до минимума, но не менее двух раз, с учетом необходимости контроля измерений. Значения интересующих исполнителя величин получаются во многих случаях достаточно точно и при двух повторных измерениях (и даже при одном), однако оценить точность измерений каждой измеренной величины при числе повторных измерений $n = 2$ не представляется возможным.

Возникает вопрос: нельзя ли, пользуясь всеми разностями двойных измерений однородных величин, оценить точность произведенных измерений?

В общем виде задача на оценку точности может быть сформулирована следующим образом.

Пусть некоторые однородные величины

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$$

наблюдены каждая дважды и получено:

$$\left. \begin{array}{l} \text{в результате первого наблюдения} - l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \\ \text{в результате второго наблюдения} - l'_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n \end{array} \right\}. \quad (421)$$

Пользуясь рядами (421), можно вычислить разности двойных наблюдений

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = l_1 - l'_1 \\ d_2 = l_2 - l'_2 \\ \dots \dots \dots \\ d_n = l_n - l'_n \end{array} \right\}. \quad (422)$$

Задача сводится к тому, чтобы использовать разности (422) при оценке точности. При этом может быть два случая: а) случай, когда наблюдения l_1 (или l'_1), l_2 (или l'_2), ..., l_n (или l'_n) равноточны; б) случай, когда эти наблюдения неравноточны.

В дальнейших рассуждениях будем полагать, что двойные наблюдения, относящиеся к одной величине, между собой равноточны в обоих случаях. Практически это условие выполняется почти всегда.

§ 49. Оценка точности

по разностям двойных равноточных наблюдений

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n \quad (423)$$

наблюдены равноточно каждая дважды и получено

$$\left. \begin{array}{l} l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \\ l_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n \end{array} \right\} \quad (424)$$

с истинными ошибками

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n \\ \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \dots, \Delta'_n \end{array} \right\}. \quad (425)$$

По определению истинной ошибки (§ 21) с учетом (424), (425) и (423) можем записать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= l_1 - L_1, & \Delta_2 &= l_2 - L_2, & \dots, & & \Delta_n &= l_n - L_n \\ \Delta'_1 &= l'_1 - L_1, & \Delta'_2 &= l'_2 - L_2, & \dots, & & \Delta'_n &= l'_n - L_n \end{aligned} \right\}. \quad (426)$$

Составим разности

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 - \Delta'_1 = l_1 - l'_1 \\ \Delta_2 - \Delta'_2 = l_2 - l'_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \Delta_n - \Delta'_n = l_n - l'_n \end{array} \right\}. \quad (427)$$

Из (427) следует, что разности двойных наблюдений $l_i - l'_i = d_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), выражаемые равенствами (422), равны разностям соответствующих истинных ошибок. Поэтому напомним

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \Delta_1 - \Delta'_1 \\ d_2 &= \Delta_2 - \Delta'_2 \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ d_n &= \Delta_n - \Delta'_n \end{aligned} \right\}. \quad (428)$$

Возведем в квадрат равенства (428)

$$\left. \begin{aligned} d_1^2 &= \Delta_1^2 + \Delta_1'^2 - 2\Delta_1\Delta_1' \\ d_2^2 &= \Delta_2^2 + \Delta_1'^2 - 2\Delta_2\Delta_2' \\ . &. \\ d_n^2 &= \Delta_n^2 + \Delta_n'^2 - 2\Delta_n\Delta_n' \end{aligned} \right\}. \quad (429)$$

Суммируя левую и правую части равенств (429) и деля суммы на число разностей d_i , получим

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\Delta'^2]}{n} - 2 \frac{[\Delta\Delta']}{n}. \quad (430)$$

В (430) для независимых наблюдений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta']}{n} = M(\Delta\Delta') = M(\Delta) \cdot M(\Delta') = 0;$$

следовательно,

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\Delta'^2]}{n}. \quad (431)$$

Но, так как наблюдения равнооточны, в (431)

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} = m^2, \quad (432)$$

где m — средняя квадратическая ошибка одного наблюдения.

С учетом (432) равенство (431) примет вид

$$2m^2 = \frac{[d^2]}{n} = m_d^2, \quad (433)$$

откуда

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2 \cdot n}}. \quad (434)$$

По формуле (434) и вычисляется средняя квадратическая ошибка одного наблюдения по разностям двойных наблюдений d_i .

Приближенные значения искомых величин

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n,$$

полученные из наблюдений, вычисляются как средние арифметические из результатов двойных наблюдений, т. е.

$$l_{i(0)} = \frac{l_1 + l'_1}{2}; \quad l_{2(0)} = \frac{l_2 + l'_2}{2}; \quad \dots, \quad l_{n(0)} = \frac{l_n + l'_n}{2}.$$

Очевидно, что

$$m_{l_{i(0)}} = m_{cp} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (435)$$

так как $l_{i(0)}$ — среднее арифметическое из двух результатов.

Формулу (434) можно получить и несколько иным путем. Запишем

$$d_i = l_i - l'_i;$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

рассматривая разности d_i как функции двойных независимых наблюдений, по формуле (300) имеем

$$m_d^2 = m_{l_i}^2 + m_{l'_i}^2.$$

Так как

$$m_{l_i} = m_{l'_i} = m,$$

то

$$m_d = m \sqrt{2}. \quad (436)$$

В то же время по формуле (433)

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}.$$

Из (436) и (433) следует

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (437)$$

Если в ряде разностей двойных наблюдений (428) содержатся значительные систематические ошибки, величина $\frac{[d]}{n}$ будет заметно отличаться от нуля. Предполагая, что разности d_i содержат в данном случае постоянную систематическую ошибку, ее можно исключить, вычитая из d_i величину $\theta = \frac{[d]}{n}$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} d'_1 &= d_1 - \theta \\ d'_2 &= d_2 - \theta \\ &\dots \dots \dots \\ d'_n &= d_n - \theta \end{aligned} \right\}, \quad (438)$$

где d'_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) — разности двойных наблюдений, свободные от систематической ошибки. Складывая левую и правую части равенства (438), получим

$$[d'] = [d] - n \cdot \theta = 0. \quad (439)$$

Таким образом, алгебраическая сумма разностей двойных равно- точных наблюдений, свободных от систематической ошибки, равна нулю при любом числе наблюдений. На этом основании разности d'_i можно рассматривать как отклонения результатов равно- точных наблюдений от простой арифметической середины. Подставляя в формулу (352) $[d'^2]$ вместо $[v^2]$, получим

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}, \quad (440)$$

или в соответствии с формулой (433)

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \quad (441)$$

Вычисление суммы $[d'^2]$ можно проконтролировать по следующей формуле

$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \quad (442)$$

Справедливость формулы (442) подтверждается, если равенства (438) возвести в квадрат и получить суммы левой и правой частей, т. е.

$$\left. \begin{aligned} d_1'^2 &= d_1^2 + \theta^2 - 2\theta d_1 \\ d_2'^2 &= d_2^2 + \theta^2 - 2\theta d_2 \\ &\dots \dots \dots \\ d_n'^2 &= d_n^2 + \theta^2 - 2\theta d_n \end{aligned} \right\},$$

и далее

$$[d'^2] = [d^2] + \frac{[d]^2}{n} - 2 \frac{[d]}{n} \cdot [d] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \quad (443)$$

§ 50. Оценка точности по разностям двойных неравноточных наблюдений

Рассмотрим теперь другой случай, а именно: пусть некоторые однородные величины

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$$

наблюдены дважды, причем каждая пара наблюдений по отношению к другой является неравноточной (наблюдения в паре — равноточные). В результате наблюдений получены

$$\left. \begin{aligned} l_1, l_2, l_3, \dots, l_n \\ l'_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_n \\ p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \end{aligned} \right\}, \quad (444)$$

где p_1 — вес наблюдения l_1 или l'_1 ,

p_2 — вес наблюдения l_2 или l'_2 ,

$\dots \dots \dots$

p_n — вес наблюдения l_n или l'_n .

Получим формулу для вычисления средней квадратической ошибки единицы веса по разностям двойных неравноточных наблюдений.

Для этого запишем разности

$$d_i = l_i - l'_i. \quad (445)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Вес разности d_i согласно (383) для независимых наблюдений будет определяться формулой

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{l_i}} + \frac{1}{p_{l'_i}} = \frac{2}{p_i}, \quad (446)$$

где $p_{l_i} = p_{l'_i} = p_i$ — вес отдельного наблюдения.

Из (446) следует, что

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}, \quad (447)$$

т. е. вес разности в два раза меньше веса отдельных наблюдений, по которым составлена разность.

Для результатов наблюдений (444) с учетом (445) и (447) можно записать

$$\left. \begin{array}{l} \frac{p_1}{2} \quad d_1 = l_1 - l'_1 \\ \frac{p_2}{2} \quad d_2 = l_2 - l'_2 \\ \frac{p_3}{2} \quad d_3 = l_3 - l'_3 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{p_n}{2} \quad d_n = l_n - l'_n \end{array} \right\} . \quad (448)$$

В соответствии с формулой (400) имеем

$$\mu^2 = \frac{d_1^2 \cdot \frac{p_1}{2} + d_2^2 \cdot \frac{p_2}{2} + d_3^2 \cdot \frac{p_3}{2} + \dots + d_n^2 \cdot \frac{p_n}{2}}{n},$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[d^2 p]}{2n}}. \quad (449)$$

Средние квадратические ошибки приближенных значений искомых величин, вычисленных как средние арифметические из результатов двойных наблюдений, равнозначных попарно, т. е.

$$l_{1(0)} = \frac{l_1 + l'_1}{2}; \quad l_{2(0)} = \frac{l_2 + l'_2}{2}; \quad \dots, \quad l_{n(0)} = \frac{l_n + l'_n}{2}, \quad (450)$$

будут соответственно равны

$$m_{l_{1(0)}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_1}}; \quad m_{l_{2(0)}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_2}}; \quad \dots; \quad m_{l_{n(0)}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_n}}. \quad (451)$$

Справедливость (451) легко проверить следующим образом. Пусть

$$l_{i(0)} = \frac{l_i + l'_i}{2},$$

где l_i и l'_i имеют одинаковый вес p_i .

Тогда по формуле (383) имеем

$$\frac{1}{p_{l_{i(0)}}} = \frac{1}{4p_i} + \frac{1}{4p_i} = \frac{2}{4p_i},$$

откуда

$$p_{l_{i(0)}} = 2p_i. \quad (452)$$

В соответствии с формулой (397) запишем

$$m_{l_{i(0)}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{l_{i(0)}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \quad (453)$$

Иногда при обработке двойных неравнозначных наблюдений встречаются случаи, когда наблюдения и попарно неравнозначны, т. е.

$$p_{l_i} \neq p_{l'_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Нетрудно установить, что веса разностей (448) в этом случае в соответствии с формулой (383) равны

$$\left. \begin{aligned} p_{d_1} &= \frac{p_{l_1} \cdot p'_{l_1}}{p_{l_1} + p'_{l_1}} \\ p_{d_2} &= \frac{p_{l_2} \cdot p'_{l_2}}{p_{l_2} + p'_{l_2}} \\ &\dots \dots \dots \\ p_{d_n} &= \frac{p_{l_n} \cdot p'_{l_n}}{p_{l_n} + p'_{l_n}} \end{aligned} \right\} . \quad (454)$$

Приближенные значения искомых величин и их средние квадратические ошибки должны быть вычислены по формулам

$$l_{i(0)} = \frac{l_i \cdot p_{l_i} + l'_i \cdot p'_{l_i}}{p_{l_i} + p'_{l_i}}; \quad (455)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$m_{l_i(0)} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{l_i} + p'_{l_i}}}. \quad (456)$$

В том случае, когда разности двойных неравноточных наблюдений (448) содержат систематические ошибки, величина

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]} \quad (457)$$

будет заметно отличаться от нуля ([18], стр. 99) и будет представлять как бы систематическую ошибку двойных неравноточных наблюдений (точнее — остаточное влияние систематических ошибок, так как постоянные систематические ошибки, входящие в наблюдения l_i и l'_i , на разностях не сказываются). Это обстоятельство приводит к завышению оценки точности и является крупным недостатком оценки точности по разностям двойных наблюдений.

После исключения величины θ из разностей, т. е.

$$d'_i = d_i - \theta \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

средняя квадратическая ошибка единицы веса, по аналогии с формулой (441), вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 \cdot p]}{2(n-1)}}. \quad (458)$$

§ 51. Примеры на оценку точности по разностям двойных наблюдений

1. Двумя наблюдателями произведены измерения одних и тех же линий топографическим светодальномером СТ-62 (табл. 27). Вычислить среднюю квадратическую ошибку одного измерения (одним наблюдателем) и среднего из двух измерений, принимая измерения равноточными.

Т а б л и ц а 27

№ по пор.	Результаты измерений, м		Разность d_i , см	d_i' , см	$d_i'^2$	Вычисления
	1 измерение	2 измерение				
1	967,489	967,398	+9,1	+5,7	32,5	$m = \sqrt{\frac{108,2}{12}};$
2	752,468	752,412	+5,6	+2,2	4,8	
3	692,223	692,250	-2,7	-6,1	37,2	
4	1023,536	1023,536	0,0	-3,4	11,6	$m = \pm 3,0 \text{ см};$
5	808,457	808,444	+1,3	-2,1	4,4	$\frac{m}{s_{cp}} = \pm \frac{0,03}{790};$
6	612,692	612,665	+2,7	-0,7	0,5	$\frac{m}{s_{cp}} = \pm \frac{1}{26\,000};$
7	675,158	675,082	+7,6	+4,2	17,6	$m_{cp} = \pm 2,1 \text{ см};$
						$\frac{m_{cp}}{s_{cp}} = \pm \frac{1}{38\,000}.$
			$[d] = +23,6$ $\theta = +3,4$	-0,2	108,6	

2. Превышения на 10 станциях нивелирного хода определялись при двух горизонтах инструмента. Найти средние квадратические ошибки: превышения на станции, измеренного при одном горизонте, при двух горизонтах и отсчета по рейке (табл. 28).

Т а б л и ц а 28

№ станции	Превышения, мм		d_i , мм	d_i^2
	1	2		
1	-1561	-1564	+3	9
2	-1484	-1482	-2	4
3	-1370	-1373	+3	9
4	+102	+105	-3	9
5	+2184	+2182	+2	4
6	+1219	+1222	-3	9
7	-100	-102	+2	4
8	-153	-151	-2	4
9	+1201	+1198	+3	9
10	+157	+159	-2	4
			Σ	65

Вычислим:

а) среднюю квадратическую ошибку разности

$$m_d = \sqrt{\frac{65}{10}} = \pm 2,5 \text{ мм};$$

б) среднюю квадратическую ошибку превышения, измеренного при одном горизонте

$$m_h = \frac{m_d}{\sqrt{2}}; \quad m_h = \pm \frac{2,5 \text{ мм}}{\sqrt{2}}; \quad m_h = \pm 1,77 \text{ мм};$$

в) среднюю квадратическую ошибку превышения, измеренного при двух горизонтах (среднего из двух превышений)

$$h_{\text{ср}} = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2; \quad m_{h_{\text{ср}}}^2 = \frac{1}{4} m_{h_1}^2 + \frac{1}{4} m_{h_2}^2;$$

$$m_{h_1} = m_{h_2} = m_h; \quad m_{h_{\text{ср}}} = \frac{m_h}{\sqrt{2}}; \quad m_{h_{\text{ср}}} = \frac{\pm 1,77 \text{ мм}}{\sqrt{2}}; \quad m_{h_{\text{ср}}} = \pm 1,27 \text{ мм};$$

г) среднюю квадратическую ошибку отсчета по рейке (превышение на станции $h = a - b$, где a и b — отсчеты)

$$m_h^2 = m_a^2 + m_b^2; \quad m_a = m_b = m_0,$$

где m_0 — средняя квадратическая ошибка отсчета;

$$m_h = m_0 \sqrt{2}; \quad m_0 = \frac{m_h}{\sqrt{2}}; \quad m_0 = \frac{\pm 1,77 \text{ мм}}{\sqrt{2}}; \quad m_0 = \pm 1,27 \text{ мм}.$$

3. Даны разности суммы превышений в нивелирных ходах в прямом и обратном направлениях и число станций по ходам (табл. 29).

Определить среднюю квадратическую ошибку одиночного хода в 10 станций (1 условный км) и двойного хода той же длины.

Т а б л и ц а 29

№ ходов	Разности d_i , мм	Число станций k_i	Вес $p_i = \frac{10}{k_i}$	d_i^2	$d_i^2 \cdot p_i$	Вычисления
1	+4	7	1,43	16	22,9	а) $\mu_{10} = \sqrt{\frac{665}{2 \cdot 10}};$ $\mu_{10} = \pm 5,7 \text{ мм};$
2	-14	27	0,37	196	72,5	
3	-9	13	0,77	81	62,4	
4	+15	25	0,40	225	90,0	
5	-12	32	0,31	144	44,7	б) $\mu_{10 \text{ ср}} = \frac{\mu_{10}}{\sqrt{2}};$ $\mu_{10 \text{ ср}} = \pm 4,1 \text{ мм}.$
6	+11	15	0,67	121	81,1	
7	-12	19	0,53	144	76,3	
8	+13	18	0,56	169	94,6	
9	+12	16	0,62	144	89,3	
10	-7	23	0,43	49	21,1	
$\sum d_i = +1$				$\sum = 655$		

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx; \quad 0 \leq \Phi(t) \leq 1$$

[30]

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,00 0000	00 0798	00 1596	00 2394	00 3192	00 3989	00 4787	00 5585	00 6383	00 7181
01	00 7979	00 8777	00 9574	01 0372	01 1170	01 1968	01 2766	01 3563	01 4361	01 5159
02	01 5957	01 6754	01 7552	01 8350	01 9147	01 9945	02 0743	02 1540	02 2338	02 3135
03	02 3933	02 4730	02 5528	02 6325	02 7123	02 7920	02 8718	02 9515	03 0312	03 1110
04	03 1907	03 2704	03 3501	03 4298	03 5096	03 5893	03 6690	03 7487	03 8284	03 9081
05	03 9878	04 0674	04 1471	04 2268	04 3065	04 3862	04 4658	04 5455	04 6251	04 7048
06	04 7844	04 8641	04 9437	05 0233	05 1030	05 1826	05 2622	05 3418	05 4214	05 5010
07	05 5806	05 6602	05 7398	05 8194	05 8990	05 9785	06 0581	06 1376	06 2172	06 2967
08	06 3763	06 4558	06 5353	06 6148	06 6944	06 7739	06 8534	06 9328	07 0123	07 0918
09	07 1713	07 2507	07 3302	07 4096	07 4891	07 5685	07 6479	07 7274	07 8068	07 8862
0,10	07 9656	08 0450	08 1243	08 2037	08 2831	08 3624	08 4418	08 5211	08 6004	08 6798
11	08 7591	08 8384	08 9177	08 9969	09 0762	09 1555	09 2347	09 3140	09 3932	09 4725
12	09 5517	09 6309	09 7101	09 7893	09 8685	09 9476	10 0268	10 1060	10 1851	10 2642
13	10 3434	10 4225	10 5016	10 5807	10 6597	10 7388	10 8179	10 8969	10 9760	11 0550
14	11 1340	11 2130	11 2920	11 3710	11 4500	11 5289	11 6079	11 6868	11 7657	11 8446
15	11 9235	12 0024	12 0813	12 1602	12 2390	12 3179	12 3967	12 4755	12 5543	12 6331
16	12 7119	12 7909	12 8694	12 9482	13 0269	13 1056	13 1843	13 2630	13 3417	13 4203
17	13 4990	13 5776	13 6562	13 7349	13 8135	13 8920	13 9706	14 0492	14 1277	14 2062
18	14 2847	14 3632	14 4417	14 5202	14 5987	14 6771	14 7555	14 8339	14 9123	14 9907
19	15 0691	15 1474	15 2258	15 3041	15 3824	15 4607	15 5390	15 6172	15 6955	15 7737

0,20	15 8519	15 9301	16 0083	16 0865	16 1647	16 2428	16 3209	16 3990	16 4771	16 5552
21	16 6322	16 7113	16 7893	16 8673	16 9453	17 0233	17 1012	17 1792	17 2571	17 3350
22	17 4129	17 4908	17 5686	17 6464	17 7243	17 8021	17 8799	17 9576	18 0354	18 1131
23	18 1908	18 2685	18 3462	18 4239	18 5015	18 5791	18 6567	18 7343	18 8119	18 8894
24	18 9670	19 0445	19 1220	19 1995	19 2769	19 3544	19 4318	19 5092	19 5866	19 6639
25	19 7413	19 8186	19 8959	19 9732	20 0504	20 1277	20 2049	20 2821	20 3593	20 4365
26	20 5136	20 5907	20 6679	20 7449	20 8220	20 8991	20 9761	21 0531	21 1301	21 2070
27	21 2840	21 3609	21 4378	21 5147	21 5915	21 6684	21 7452	21 8220	21 8988	21 9755
28	22 0522	22 1290	22 2056	22 2823	22 3590	22 4356	22 5122	22 5888	22 6653	22 7419
29	22 8184	22 8949	22 9713	23 0478	23 1242	23 2006	23 2770	23 3533	23 4297	23 5060
30	23 5823	23 6586	23 7348	23 8110	23 8872	23 9634	24 0395	24 1157	24 1918	24 2678
31	24 3439	24 4199	24 4959	24 5719	24 6479	24 7238	24 7997	24 8756	24 9515	25 0273
32	25 1032	25 1790	25 2547	25 3305	25 4062	25 4819	25 5576	25 6332	25 7088	25 7844
33	25 8600	25 9356	26 0111	26 0866	26 1620	26 2375	26 3129	26 3883	26 4637	26 5390
34	26 6143	26 6896	26 7649	26 8402	26 9154	26 9906	27 0657	27 1409	27 2160	27 2911
35	27 3661	27 4412	27 5162	27 5912	27 6661	27 7410	27 8159	27 8908	27 9657	28 0405
36	28 1153	28 1901	28 2648	28 3395	28 4142	28 4889	28 5635	28 6381	28 7127	28 7872
37	28 8618	28 9362	29 0107	29 0852	29 1596	29 2340	29 3083	29 3826	29 4569	29 5312
38	29 6055	29 6797	29 7539	29 8280	29 9022	29 9763	30 0503	30 1244	30 1984	30 2724
39	30 3463	30 4203	30 4942	30 5681	30 6419	30 7157	30 7895	30 8633	30 9370	31 0107
40	31 0843	31 1580	31 2316	31 3052	31 3787	31 4522	31 5257	31 5992	31 6726	31 7460
41	31 8194	31 8927	31 9661	32 0393	32 1126	32 1858	32 2590	32 3322	32 4053	32 4784
42	32 5515	32 6245	32 6975	32 7705	32 8434	32 9163	32 9892	33 0621	33 1349	33 2077
43	33 2804	33 3532	33 4259	33 4985	33 5712	33 6438	33 7163	33 7889	33 8614	33 9338
44	34 0063	34 0787	34 1511	34 2234	34 2957	34 3680	34 4403	34 5125	34 5847	34 6568
45	34 7290	34 8010	34 8731	34 9451	35 0171	35 0891	35 1610	35 2329	35 3048	35 3766
46	35 4484	35 5201	35 5919	35 6636	35 7352	35 8069	35 8784	35 9500	36 0215	36 0930
47	36 1645	36 2359	36 3073	36 3787	36 4500	36 5213	36 5926	36 6638	36 7350	36 8061
48	36 8773	36 9484	37 0194	37 0904	37 1614	37 2324	37 3033	37 3742	37 4450	37 5158
49	37 5866	37 6574	37 7281	37 7987	37 8694	37 9400	38 0106	38 0811	38 1516	38 2221

<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	38 2925	38 3629	38 4332	38 5036	38 5739	38 6441	38 7143	38 7845	38 8547	38 9248
51	38 9949	39 0649	39 1349	39 2049	39 2748	39 3447	39 4146	39 4844	39 5542	39 6239
52	39 6936	39 7633	39 8330	39 9026	39 9724	40 0417	40 1112	40 1806	40 2501	40 3195
53	40 3888	40 4581	40 5274	40 5966	40 6658	40 7350	40 8041	40 8732	40 9423	41 0113
54	41 0803	41 1492	41 2181	41 2870	41 3559	41 4246	41 4934	41 5621	41 6308	41 6995
55	41 7681	41 8366	41 9052	41 9737	42 0421	42 1105	42 1789	42 2473	42 3156	42 3838
56	42 4521	42 5202	42 5884	42 6565	42 7246	42 7926	42 8606	42 9286	42 9965	43 0644
57	43 1322	43 2000	43 2678	43 3355	43 4032	43 4709	43 5385	43 6061	43 6736	43 7411
58	43 8085	43 8760	43 9433	44 0107	44 0780	44 1452	44 2124	44 2796	44 3468	44 4139
59	44 4809	44 5480	44 6149	44 6819	44 7488	44 8157	44 8825	44 9493	45 0160	45 0827
0,60	45 1494	45 2160	45 2826	45 3491	45 4156	45 4821	45 5485	45 6149	45 6813	45 7476
61	45 8138	45 8800	45 9462	46 0124	46 0785	46 1445	46 2105	46 2765	46 3425	46 4084
62	46 4742	46 5400	46 6058	46 6715	46 7372	46 8029	46 8685	46 9345	46 9996	47 0651
63	47 1305	47 1959	47 2613	47 3266	47 3919	47 4572	47 5224	47 5875	47 6526	47 7177
64	47 7827	47 8477	47 9127	47 9776	48 0425	48 1073	48 1721	48 2368	48 3015	48 3662
65	48 4308	48 4954	48 5599	48 6244	48 6888	48 7532	48 8176	48 8819	48 9462	49 0104
66	49 0746	49 1388	49 2029	49 2669	49 3310	49 3950	49 4589	49 5228	49 5866	49 6505
67	49 7142	49 7779	49 8416	49 9053	49 9689	50 0324	50 0959	50 1594	50 2228	50 2862
68	50 3496	50 4129	50 4761	50 5393	50 6025	50 6656	50 7287	50 7917	50 8547	50 9177
69	50 9806	51 0434	51 1063	51 1690	51 2318	51 2945	51 3571	51 4197	51 4823	51 5448
0,70	51 6073	51 6697	51 7321	51 7944	51 8567	51 9190	51 9812	52 0434	52 1055	52 1676
71	52 2296	52 2916	52 3535	52 4154	52 4773	52 5391	52 6009	52 6626	52 7243	52 7859
72	52 8475	52 9090	52 9706	53 0320	53 0934	53 1548	53 2161	53 2774	53 3386	53 3998
73	53 4610	53 5221	53 5831	53 6442	53 7051	53 7661	53 8269	53 8878	53 9486	54 0093
74	54 0700	54 1307	54 1913	54 2518	54 3124	54 3728	54 4333	54 4936	54 5540	54 6143
75	54 6745	54 7347	54 7949	54 8550	54 9151	54 9751	55 0351	55 0950	55 1549	55 2147
76	55 2745	55 3343	55 3940	55 4537	55 5133	55 5728	55 6324	55 6918	55 7513	55 8107
77	55 8700	55 9293	55 9886	56 0478	56 1069	56 1660	56 2251	56 2841	56 3431	56 4020
78	56 4609	56 5198	56 5785	56 6373	56 6960	56 7546	56 8133	56 8718	56 9303	56 9888
79	57 0472	57 1056	57 1639	57 2222	57 2805	57 3386	57 3968	57 4549	57 5130	57 5710

0,80	57 6289	57 7447	57 8025	57 8603	57 9180	57 9757	58 0334	58 0909	58 1485
81	58 2060	58 3208	58 3782	58 4355	58 4928	58 5500	58 6072	58 6643	58 7214
82	58 7784	58 8923	58 9492	59 0060	59 0628	59 1196	59 1763	59 2330	59 2896
83	59 3461	59 4591	59 5155	59 5719	59 6282	59 6845	59 7407	59 7969	59 8531
84	59 9092	60 0212	60 0772	60 1331	60 1889	60 2447	60 3005	60 3562	60 4119
85	60 4675	60 5786	60 6344	60 6895	60 7449	60 8002	60 8555	60 9108	60 9659
86	61 0211	61 1312	61 1863	61 2412	61 2961	61 3510	61 4058	61 4606	61 5153
87	61 5700	61 6792	61 7337	61 7882	61 8426	61 8970	61 9513	62 0056	62 0599
88	62 1141	62 2223	62 2764	62 3304	62 3843	62 4382	62 4921	62 5459	62 5997
89	62 6534	62 7607	62 8143	62 8678	62 9213	62 9747	63 0281	63 0814	63 1347
0,90	63 1880	63 2943	63 3474	63 4005	63 4535	63 5064	63 5593	63 6122	63 6650
91	63 7177	63 8231	63 8757	63 9283	63 9808	64 0333	64 0857	64 1381	64 1904
92	64 2427	64 3471	64 3993	64 4514	64 5034	64 5554	64 6073	64 6592	64 7111
93	64 7629	64 8663	64 9180	64 9696	65 0212	65 0727	65 1241	65 1756	65 2269
94	65 2782	65 3807	65 4319	65 4830	65 5341	65 5851	65 6361	65 6871	65 7379
95	65 7888	65 8903	65 9410	65 9916	66 0422	66 0928	66 1433	66 1937	66 2441
96	66 2945	66 3950	66 4452	66 4954	66 5455	66 5956	66 6456	66 6956	66 7455
97	66 7954	66 8949	66 9447	66 9943	67 0440	67 0936	67 1431	67 1926	67 2420
98	67 2914	67 3900	67 4393	67 4884	67 5376	67 5867	67 6357	67 6847	67 7337
99	67 7826	67 8802	67 9290	67 9777	68 0264	68 0750	68 1235	68 1721	68 2205
1,00	68 2689	68 3656	68 4139	68 4621	68 5103	68 5584	68 6065	68 6546	68 7025
01	68 7505	68 8462	68 8940	68 9417	68 9894	69 0371	69 0847	69 1322	69 1797
02	69 2272	69 3219	69 3692	69 4165	69 4637	69 5108	69 5580	69 6050	69 6520
03	69 6990	69 7928	69 8396	69 8864	69 9331	69 9798	70 0264	70 0730	70 1195
04	70 1660	70 2124	70 2588	70 3052	70 3515	70 3977	70 4439	70 4900	70 5361
05	70 6282	70 6741	70 7200	70 7659	70 8117	70 8575	70 9033	70 9488	70 9945
06	71 0855	71 1310	71 1764	71 2218	71 2671	71 3124	71 3576	71 4028	71 4479
07	71 5381	71 5831	71 6280	71 6729	71 7177	71 7625	71 8073	71 8520	71 8966
08	71 9858	72 0303	72 0747	72 1192	72 1635	72 2078	72 2521	72 2963	72 3405
09	72 4287	72 4727	72 5167	72 5606	72 6045	72 6483	72 6921	72 7359	72 7796

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,10	72 8608	72 9103	72 9538	72 9973	73 0407	73 0840	73 1273	73 1706	73 2138	73 2570
11	73 3001	73 3432	73 3862	73 4292	73 4721	73 5150	73 5578	73 6006	73 6433	73 6860
12	73 7286	73 7712	73 8138	73 8563	73 8987	73 9411	73 9834	74 0258	74 0680	74 1102
13	74 1524	74 1945	74 2366	74 2786	74 3205	74 3625	74 4043	74 4462	74 4880	74 5297
14	74 5714	74 6130	74 6546	74 6961	74 7376	74 7791	74 8203	74 8619	74 9031	74 9444
15	74 9856	75 0268	75 0679	75 1090	75 1500	75 1910	75 2319	75 2728	75 3136	75 3544
16	75 3951	75 4358	75 4765	75 5170	75 5576	75 5981	75 6386	75 6790	75 7193	75 7596
17	75 7999	75 8401	75 8803	75 9204	75 9605	76 0005	76 0405	76 0804	76 1203	76 1602
18	76 2000	76 2397	76 2794	76 3191	76 3587	76 3983	76 4378	76 4772	76 5167	76 5560
19	76 5954	76 6346	76 6739	76 7131	76 7522	76 7913	76 8303	76 8693	76 9083	76 9472
1,20	0,76 9861	77 0249	77 0636	77 1024	77 1410	77 1797	77 2183	77 2568	77 2953	77 3337
21	77 3721	77 4105	77 4488	77 4870	77 5252	77 5634	77 6015	77 6396	77 6776	77 7156
22	77 7535	77 7914	77 8292	77 8670	77 9048	77 9425	77 9801	78 0177	78 0553	78 0928
23	78 1303	78 1677	78 2051	78 2424	78 2797	78 3169	78 3541	78 3913	78 4284	78 4655
24	78 5025	78 5394	78 5763	78 6132	78 6500	78 6858	78 7236	78 7603	78 7969	78 8335
25	78 8700	78 9066	78 9430	78 9794	79 0158	79 0521	79 0884	79 1246	79 1608	79 1970
26	79 2331	79 2691	79 3051	79 3411	79 3770	79 4129	79 4487	79 4845	79 5202	79 5559
27	79 5915	79 6271	79 6627	79 6982	79 7337	79 7691	79 8044	79 8398	79 8751	79 9103
28	79 9455	79 9806	80 0157	80 0508	80 0858	80 1208	80 1557	80 1906	80 2254	80 2602
29	80 2949	80 3296	80 3643	80 3989	80 4335	80 4680	80 5025	80 5369	80 5713	80 6056
1,30	80 6399	80 6742	80 7084	80 7425	80 7766	80 8107	80 8447	80 8787	80 9127	80 9466
31	80 9804	81 0142	81 0480	81 0817	81 1154	81 1490	81 1826	81 2161	81 2496	81 2831
32	81 3165	81 3499	81 3832	81 4165	81 4497	81 4829	81 5160	81 5491	81 5822	81 6152
33	81 6482	81 6811	81 7140	81 7468	81 7796	81 8124	81 8451	81 8777	81 9104	81 9429
34	81 9755	82 0080	82 0404	82 0728	82 1052	82 1375	82 1697	82 2020	82 2342	82 2663
35	82 2984	82 3305	82 3625	82 3944	82 4264	82 4582	82 4901	82 5219	82 5536	82 5853
36	82 6170	82 6486	82 6802	82 7117	82 7432	82 7747	82 8061	82 8375	82 8688	82 9001
37	82 9313	82 9625	82 9937	83 0248	83 0558	83 0869	83 1178	83 1488	83 1797	83 2105
38	83 2413	83 2721	83 3028	83 3335	83 3642	83 3948	83 4253	83 4558	83 4863	83 5167
39	83 5471	83 5775	83 6078	83 6380	83 6682	83 6984	83 7286	83 7586	83 7887	83 8187

1,40	83 8487	83 8786	83 9085	83 9383	83 9684	83 9979	84 0276	84 0573	84 0869	84 1165
41	84 1460	84 1755	84 2050	84 2344	84 2638	84 2932	84 3224	84 3517	84 3809	84 4101
42	84 4392	84 4683	84 4974	84 5264	84 5554	84 5843	84 6132	84 6420	84 6708	84 6996
43	84 7283	84 7570	84 7856	84 8142	84 8428	84 8713	84 8998	84 9282	84 9566	84 9849
44	85 0133	85 0415	85 0698	85 0980	85 1261	85 1542	85 1823	85 2103	85 2383	85 2662
45	85 2941	85 3220	85 3498	85 3776	85 4054	85 4331	85 4607	85 4884	85 5159	85 5435
46	85 5710	85 5985	85 6259	85 6533	85 6806	85 7079	85 7352	85 7624	85 7896	85 8167
47	85 8438	85 8709	85 8979	85 9249	85 9518	85 9787	86 0056	86 0324	86 0592	86 0860
48	86 1127	86 1393	86 1660	86 1926	86 2191	86 2456	86 2721	86 2985	86 3249	86 3513
49	86 3776	86 4039	86 4301	86 4563	86 4824	86 5086	86 5346	86 5607	86 5867	86 6126
1,50	0,86 6386	86 6644	86 6903	86 7161	86 7419	86 7676	86 7933	86 8189	86 8445	86 8701
51	86 8957	86 9212	86 9466	86 9720	86 9974	87 0228	87 0481	87 0733	87 0986	87 1238
52	87 1489	87 1740	87 1991	87 2241	87 2491	87 2741	87 2990	87 3239	87 3487	87 3736
53	87 3983	87 4231	87 4478	87 4724	87 4970	87 5216	87 5462	87 5707	87 5951	87 6196
54	87 6440	87 6683	87 6926	87 7169	87 7412	87 7654	87 7895	87 8137	87 8378	87 8618
55	87 8858	87 9098	87 9338	87 9577	87 9816	88 0054	88 0292	88 0530	88 0767	88 1004
56	88 1240	88 1476	88 1712	88 1947	88 2182	88 2417	88 2651	88 2885	88 3119	88 3352
57	88 3585	88 3817	88 4049	88 4281	88 4513	88 4744	88 4974	88 5204	88 5434	88 5664
58	88 5893	88 6122	88 6350	88 6570	88 6806	88 7034	88 7261	88 7487	88 7714	88 7940
59	88 8165	88 8390	88 8615	88 8840	88 9064	88 9288	88 9511	88 9734	88 9957	89 0179
1,60	89 0401	89 0623	89 0844	89 1065	89 1286	89 1506	89 1726	89 1946	89 2165	89 2384
61	89 2602	89 2820	89 3038	89 3255	89 3473	89 3689	89 3906	89 4122	89 4337	89 4553
62	89 4768	89 4982	89 5197	89 5411	89 5624	89 5837	89 6050	89 6263	89 6475	89 6687
63	89 6899	89 7110	89 7321	89 7531	89 7741	89 7951	89 8160	89 8370	89 8578	89 8787
64	89 8995	89 9203	89 9410	89 9617	89 9824	90 0030	90 0236	90 0442	90 0647	90 0852
65	90 1057	90 1261	90 1465	90 1669	90 1872	90 2076	90 2278	90 2481	90 2683	90 2884
66	90 3086	90 3287	90 3487	90 3688	90 3888	90 4087	90 4287	90 4486	90 4684	90 4883
67	90 5081	90 5278	90 5476	90 5673	90 5869	90 6066	90 6262	90 6458	90 6653	90 6848
68	90 7043	90 7237	90 7431	90 7625	90 7818	90 8011	90 8204	90 8397	90 8589	90 8781
69	90 8972	90 9163	90 9354	90 9545	90 9735	90 9925	91 0114	91 0303	91 0492	91 0681

<i>l</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,70	91 0869	91 1057	91 1245	91 1432	91 1619	91 1806	91 1992	91 2178	91 2364	91 2549
71	91 2734	91 2919	91 3103	91 3287	91 3471	91 3655	91 3838	91 4021	91 4203	91 4386
72	91 4568	91 4749	91 4930	91 5111	91 5292	91 5473	91 5653	91 5832	91 6012	91 6191
73	91 6370	91 6548	91 6726	91 6904	91 7082	91 7259	91 7436	91 7613	91 7789	91 7965
74	91 8141	91 8316	91 8492	91 8666	91 8841	91 9015	91 9189	91 9363	91 9536	91 9709
75	91 9882	92 0054	92 0226	92 0398	92 0569	92 0741	92 0912	92 1081	92 1252	92 1422
76	92 1592	92 1762	92 1931	92 2100	92 2268	92 2436	92 2604	92 2772	92 2939	92 3106
77	92 3273	92 3439	92 3605	92 3771	92 3937	92 4102	92 4267	92 4432	92 4596	92 4760
78	92 4924	92 5088	92 5251	92 5414	92 5576	92 5739	92 5901	92 6063	92 6224	92 6385
79	92 6546	92 6707	92 6867	92 7027	92 7187	92 7346	92 7505	92 7664	92 7823	92 7981
1,80	92 8139	92 8297	92 8455	92 8612	92 8769	92 8925	92 9082	92 9238	92 9393	92 9549
81	92 9704	92 9859	93 0014	93 0168	93 0322	93 0476	93 0630	93 0783	93 0936	93 1089
82	93 1241	93 1393	93 1545	93 1697	93 1848	93 1999	93 2150	93 2300	93 2450	93 2600
83	93 2750	93 2899	93 3049	93 3197	93 3346	93 3494	93 3642	93 3790	93 3938	93 4085
84	93 4232	93 4378	93 4525	93 4671	93 4817	93 4962	93 5108	93 5253	93 5398	93 5542
85	93 5686	93 5830	93 5974	93 6118	93 6261	93 6404	93 6546	93 6689	93 6831	93 6973
86	93 7114	93 7256	93 7397	93 7538	93 7678	93 7819	93 7959	93 8098	93 8238	93 8377
87	93 8516	93 8655	93 8793	93 8932	93 9070	93 9207	93 9345	93 9482	93 9619	93 9756
88	93 9892	94 0028	94 0164	94 0300	94 0435	94 0570	94 0705	94 0840	94 0974	94 1108
89	94 1242	94 1376	94 1509	94 1642	94 1775	94 1908	94 2040	94 2172	94 2304	94 2436
1,90	94 2569	94 2698	94 2829	94 2959	94 3090	94 3220	94 3350	94 3479	94 3609	94 3738
91	94 3867	94 3995	94 4124	94 4252	94 4380	94 4507	94 4635	94 4762	94 4889	94 5016
92	94 5142	94 5268	94 5394	94 5520	94 5645	94 5771	94 5896	94 6020	94 6145	94 6269
93	94 6393	94 6517	94 6640	94 6764	94 6887	94 7010	94 7132	94 7255	94 7377	94 7499
94	94 7624	94 7742	94 7863	94 7984	94 8105	94 8225	94 8345	94 8465	94 8585	94 8705
95	94 8824	94 8943	94 9062	94 9180	94 9299	94 9417	94 9535	94 9653	94 9770	94 9877
96	95 0004	95 0121	95 0238	95 0354	95 0470	95 0586	95 0701	95 0817	95 0932	95 1047
97	95 1162	95 1276	95 1390	95 1504	95 1618	95 1732	95 1845	95 1958	95 2071	95 2184
98	95 2296	95 2409	95 2521	95 2633	95 2744	95 2856	95 2967	95 3078	95 3188	95 3299
99	95 3409	95 3519	95 3629	95 3739	95 3848	95 3957	95 4066	95 4175	95 4283	95 4392

2,00	95 4500	95 4608	95 4715	95 4823	95 4930	95 5037	95 5144	95 5250	95 5357	95 5463
01	95 5569	95 5675	95 5780	95 5885	95 5990	95 6095	95 6200	95 6304	95 6409	95 6513
02	95 6617	95 6720	95 6824	95 6927	95 7030	95 7133	95 7235	95 7338	95 7440	95 7542
03	95 7643	95 7745	95 7846	95 7947	95 8048	95 8149	95 8250	95 8350	95 8450	95 8550
04	95 8650	95 8749	95 8848	95 8948	95 9046	95 9145	95 9244	95 9344	95 9440	95 9538
05	95 9636	95 9733	95 9830	95 9927	96 0024	96 0121	96 0217	96 0312	96 0410	96 0506
06	96 0601	96 0697	96 0792	96 0887	96 0982	96 1077	96 1172	96 1266	96 1360	96 1454
07	96 1548	96 1641	96 1735	96 1828	96 1921	96 2013	96 2106	96 2198	96 2291	96 2383
08	96 2474	96 2566	96 2658	96 2749	96 2840	96 2931	96 3021	96 3112	96 3202	96 3292
09	96 3382	96 3472	96 3561	96 3651	96 3740	96 3829	96 3918	96 4006	96 4095	96 4183
2,10	96 4271	96 4359	96 4447	96 4534	96 4622	96 4709	96 4796	96 4882	96 4969	96 5055
11	96 5142	96 5228	96 5314	96 5399	96 5485	96 5570	96 5655	96 5740	96 5825	96 5910
12	96 5994	96 6078	96 6162	96 6246	96 6330	96 6413	96 6497	96 6580	96 6663	96 6746
13	96 6828	96 6911	96 6993	96 7075	96 7157	96 7239	96 7321	96 7402	96 7483	96 7564
14	96 7645	96 7726	96 7807	96 7887	96 7967	96 8047	96 8127	96 8207	96 8286	96 8366
15	96 8445	96 8524	96 8603	96 8681	96 8760	96 8838	96 8916	96 8994	96 9072	96 9150
16	96 9227	96 9305	96 9382	96 9459	96 9536	96 9612	96 9689	96 9765	96 9841	96 9917
17	96 9993	97 0069	97 0144	97 0220	97 0295	97 0370	97 0445	97 0519	97 0594	97 0668
18	97 0743	97 0817	97 0890	97 0964	97 1038	97 1111	97 1184	97 1257	97 1330	97 1403
19	97 1476	97 1548	97 1620	97 1693	97 1765	97 1836	97 1908	97 1980	97 2051	97 2122
2,20	97 2193	97 2264	97 2335	97 2405	97 2476	97 2546	97 2616	97 2686	97 2756	97 2825
21	97 2895	97 2964	97 3033	97 3102	97 3171	97 3240	97 3308	97 3377	97 3445	97 3513
22	97 3581	97 3649	97 3717	97 3784	97 3852	97 3919	97 3986	97 4053	97 4119	97 4186
23	97 4253	97 4349	97 4385	97 4451	97 4517	97 4583	97 4648	97 4714	97 4779	97 4844
24	97 4909	97 4974	97 5039	97 5103	97 5168	97 5232	97 5296	97 5360	97 5424	97 5488
25	97 5551	97 5614	97 5678	97 5741	97 5804	97 5867	97 5929	97 5992	97 6054	97 6117
26	97 6179	97 6241	97 6303	97 6364	97 6426	97 6487	97 6549	97 6610	97 6671	97 6732
27	97 6792	97 6853	97 6913	97 6974	97 7034	97 7094	97 7154	97 7214	97 7273	97 7333
28	97 7392	97 7452	97 7511	97 7570	97 7628	97 7687	97 7746	97 7804	97 7862	97 7921
29	97 7979	97 8037	97 8094	97 8152	97 8210	97 8267	97 8324	97 8381	97 8438	97 8495

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,30	97 8552	97 8608	97 8665	97 8721	97 8777	97 8833	97 8889	97 8945	97 9001	97 9056
31	97 9112	97 9167	97 9222	97 9277	97 9332	97 9387	97 9442	97 9496	97 9551	97 9605
32	97 9659	97 9713	97 9767	97 9821	97 9875	97 9928	97 9981	98 0035	98 0088	98 0141
33	98 0194	98 0247	98 0299	98 0352	98 0404	98 0457	98 0509	98 0561	98 0613	98 0665
34	98 0716	98 0768	98 0819	98 0871	98 0922	98 0973	98 1024	98 1075	98 1125	98 1176
35	98 1227	98 1277	98 1327	98 1377	98 1427	98 1477	98 1527	98 1577	98 1626	98 1676
36	98 1725	98 1774	98 1823	98 1872	98 1921	98 1970	98 2019	98 2067	98 2115	98 2164
37	98 2212	98 2260	98 2308	98 2356	98 2403	98 2451	98 2499	98 2546	98 2593	98 2640
38	98 2687	98 2734	98 2781	98 2828	98 2874	98 2921	98 2967	98 3014	98 3060	98 3106
39	98 3152	98 3197	98 3243	98 3289	98 3334	98 3380	98 3425	98 3470	98 3515	98 3560
2,40	98 3605	98 3650	98 3694	98 3739	98 3783	98 3828	98 3872	98 3916	98 3950	98 4004
41	98 4047	98 4091	98 4135	98 4178	98 4222	98 4265	98 4308	98 4351	98 4394	98 4437
42	98 4479	98 4522	98 4565	98 4607	98 4649	98 4692	98 4734	98 4776	98 4818	98 4859
43	98 4901	98 4943	98 4984	98 5026	98 5067	98 5108	98 5149	98 5190	98 5231	98 5272
44	98 5313	98 5353	98 5394	98 5434	98 5475	98 5515	98 5555	98 5595	98 5635	98 5675
45	98 5714	98 5754	98 5794	98 5833	98 5872	98 5912	98 5951	98 5990	98 6029	98 6068
46	98 6106	98 6145	98 6184	98 6222	98 6260	98 6299	98 6337	98 6375	98 6413	98 6451
47	98 6489	98 6526	98 6564	98 6602	98 6639	98 6676	98 6714	98 6751	98 6788	98 6825
48	98 6862	98 6899	98 6935	98 6972	98 7008	98 7045	98 7081	98 7117	98 7154	98 7190
49	98 7226	98 7262	98 7297	98 7333	98 7369	98 7404	98 7440	98 7475	98 7510	98 7546
2,50	98 7581	98 7616	98 7651	98 7685	98 7720	98 7755	98 7789	98 7824	98 7858	98 7893
51	98 7927	98 7961	98 7995	98 8029	98 8063	98 8097	98 8130	98 8164	98 8198	98 8231
52	98 8265	98 8298	98 8331	98 8364	98 8397	98 8430	98 8463	98 8496	98 8529	98 8561
53	98 8594	98 8626	98 8659	98 8691	98 8723	98 8755	98 8787	98 8819	98 8851	98 8883
54	98 8915	98 8946	98 8978	98 9009	98 9041	98 9072	98 9103	98 9135	98 9166	98 9197
55	98 9228	98 9259	98 9280	98 9320	98 9351	98 9381	98 9412	98 9442	98 9472	98 9503
56	98 9536	98 9563	98 9593	98 9623	98 9653	98 9682	98 9712	98 9741	98 9771	98 9801
57	98 9830	98 9859	98 9889	98 9918	98 9947	98 9976	99 0005	99 0034	99 0063	99 0091
58	99 0120	99 0149	99 0177	99 0205	99 0234	99 0262	99 0290	99 0318	99 0347	99 0374
59	99 0402	99 0430	99 0458	99 0486	99 0513	99 0541	99 0568	99 0596	99 0623	99 0650

2,60	0,9	99 0678	99 0705	99 0732	99 0759	99 0786	99 0813	99 0839	99 0866	99 0893	99 0919
61		99 0946	99 0972	99 0999	99 1025	99 1051	99 1077	99 1103	99 1129	99 1155	99 1181
62		99 1207	99 1233	99 1258	99 1284	99 1310	99 1335	99 1361	99 1386	99 1411	99 1436
63		99 1462	99 1487	99 1512	99 1537	99 1561	99 1586	99 1611	99 1636	99 1660	99 1685
64		99 1709	99 1734	99 1758	99 1782	99 1807	99 1831	99 1855	99 1879	99 1903	99 1927
65		99 1951	99 1975	99 1998	99 2022	99 2046	99 2069	99 2093	99 2116	99 2139	99 2163
66		99 2186	99 2210	99 2232	99 2255	99 2278	99 2301	99 2324	99 2347	99 2370	99 2392
67		99 2415	99 2437	99 2460	99 2482	99 2505	99 2527	99 2549	99 2572	99 2594	99 2616
68		99 2638	99 2660	99 2682	99 2704	99 2725	99 2747	99 2769	99 2790	99 2812	99 2833
69		99 2855	99 2876	99 2898	99 2919	99 2940	99 2961	99 2982	99 3003	99 3024	99 3045
2,70		99 3066	99 3087	99 3108	99 3128	99 3149	99 3170	99 3190	99 3211	99 3231	99 3251
71		99 3272	99 3292	99 3312	99 3332	99 3352	99 3372	99 3392	99 3412	99 3432	99 3452
72		99 3472	99 3492	99 3511	99 3531	99 3550	99 3570	99 3589	99 3609	99 3628	99 3647
73		99 3667	99 3686	99 3705	99 3724	99 3743	99 3762	99 3781	99 3800	99 3819	99 3837
74		99 3856	99 3875	99 3893	99 3912	99 3930	99 3949	99 3967	99 3986	99 4004	99 4022
75		99 4040	99 4059	99 4077	99 4095	99 4113	99 4131	99 4149	99 4167	99 4184	99 4202
76		99 4220	99 4238	99 4255	99 4273	99 4290	99 4308	99 4325	99 4343	99 4360	99 4377
77		99 4394	99 4412	99 4429	99 4446	99 4463	99 4480	99 4497	99 4514	99 4531	99 4547
78		99 4564	99 4581	99 4597	99 4614	99 4631	99 4647	99 4664	99 4680	99 4697	99 4713
79		99 4729	99 4745	99 4762	99 4778	99 4794	99 4810	99 4826	99 4842	99 4858	99 4874
2,80		99 4890	99 4906	99 4921	99 4937	99 4953	99 4968	99 4984	99 4999	99 5015	99 5030
81		99 5046	99 5061	99 5077	99 5092	99 5107	99 5122	99 5137	99 5153	99 5168	99 5183
82		99 5198	99 5213	99 5227	99 5242	99 5257	99 5272	99 5287	99 5301	99 5316	99 5331
83		99 5345	99 5360	99 5374	99 5389	99 5403	99 5417	99 5432	99 5446	99 5460	99 5474
84		99 5489	99 5503	99 5517	99 5531	99 5545	99 5559	99 5573	99 5587	99 5601	99 5614
85		99 5628	99 5642	99 5655	99 5669	99 5683	99 5696	99 5710	99 5723	99 5737	99 5750
86		99 5764	99 5777	99 5790	99 5803	99 5817	99 5830	99 5843	99 5856	99 5869	99 5882
87		99 5895	99 5908	99 5921	99 5934	99 5947	99 5960	99 5973	99 5986	99 5998	99 6011
88		99 6023	99 6036	99 6048	99 6061	99 6073	99 6086	99 6098	99 6111	99 6123	99 6135
89		99 6148	99 6160	99 6172	99 6184	99 6196	99 6208	99 6220	99 6233	99 6244	99 6256

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,90	0,99 6268	99 6280	99 6292	99 6304	99 6316	99 6327	99 6339	99 6351	99 6363	99 6374
91	99 6386	99 6397	99 6409	99 6420	99 6432	99 6443	99 6454	99 6466	99 6477	99 6488
92	99 6500	99 6511	99 6522	99 6533	99 6544	99 6555	99 6566	99 6578	99 6588	99 6599
93	99 6610	99 6621	99 6632	99 6643	99 6654	99 6665	99 6675	99 6686	99 6697	99 6707
94	99 6718	99 6728	99 6739	99 6750	99 6760	99 6770	99 6781	99 6791	99 6802	99 6812
95	99 6822	99 6833	99 6843	99 6853	99 6863	99 6873	99 6883	99 6894	99 6904	99 6914
96	99 6924	99 6934	99 6944	99 6953	99 6963	99 6973	99 6983	99 6993	99 7003	99 7012
97	99 7022	99 7032	99 7041	99 7051	99 7061	99 7070	99 7080	99 7089	99 7099	99 7108
98	99 7118	99 7127	99 7136	99 7147	99 7155	99 7164	99 7173	99 7183	99 7192	99 7201
99	99 7210	99 7219	99 7228	99 7238	99 7247	99 7256	99 7265	99 7273	99 7282	99 7291
3,00	99 7300	99 7309	99 7318	99 7327	99 7335	99 7344	99 7353	99 7362	99 7370	99 7379
3,0	0,997 3002	997 3875	997 4723	997 5545	997 6342	997 7116	997 7866	997 8594	997 9300	997 9984
1	998 0648	998 1291	998 1915	998 2519	998 3105	998 3673	998 4223	998 4756	998 5272	998 5773
2	998 6257	998 6727	998 7181	998 7621	998 8047	998 8459	998 8859	998 9245	998 9619	998 9981
3	999 0332	999 0670	999 0998	999 1315	999 1622	999 1919	999 2206	999 2483	999 2751	999 3011
4	999 3261	999 3504	999 3738	999 3964	999 4183	999 4394	999 4598	999 4795	999 4986	999 5170
5	999 5347	999 5519	999 5685	999 5844	999 5999	999 6148	999 6291	999 6430	999 6594	999 6693
6	999 6818	999 6938	999 7054	999 7166	999 7274	999 7378	999 7478	999 7574	999 7668	999 7757
7	999 7844	999 7927	999 8008	999 8085	999 8160	999 8232	999 8301	999 8368	999 8432	999 8494
8	999 8553	999 8610	999 8665	999 8719	999 8770	999 8819	999 8866	999 8912	999 8955	999 8998
9	999 9038	999 9077	999 9115	999 9151	999 9185	999 9218	999 9251	999 9281	999 9311	999 9339
4,0	999 9367	999 9393	999 9418	999 9442	999 9465	999 9488	999 9509	999 9530	999 9550	999 9569
1	999 9587	999 9604	999 9621	999 9637	999 9653	999 9668	999 9682	999 9695	999 9708	999 9721
2	999 9733	999 9745	999 9756	999 9766	999 9776	999 9786	999 9796	999 9805	999 9813	999 9821
3	999 9829	999 9837	999 9844	999 9851	999 9858	999 9864	999 9870	999 9876	999 9881	999 9887
4	999 9892	999 9897	999 9901	999 9906	999 9910	999 9914	999 9918	999 9922	999 9925	999 9929
5	999 9932	999 9935	999 9938	999 9941	999 9944	999 9946	999 9949	999 9951	999 9954	999 9956
6	999 9958	999 9960	999 9962	999 9963	999 9965	999 9967	999 9968	999 9970	999 9971	999 9973
7	999 9974	999 9975	999 9976	999 9978	999 9979	999 9980	999 9981	999 9982	999 9982	999 9983
8	999 9984	999 9985	999 9986	999 9986	999 9987	999 9988	999 9988	999 9988	999 9989	999 9990
9	999 9990	999 9991	999 9991	999 9992	999 9992	999 9993	999 9993	999 9993	999 9994	999 9994
5,0	999 9994	999 9997	999 9998	999 9999	999 9999	—	—	—	—	—

Таблица значений функции

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

[30]

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,39 8942	39 8942	39 8941	39 8940	39 8939	39 8937	39 8935	39 8933	39 8930	39 8926
01	39 8922	39 8918	39 8914	39 8909	39 8903	39 8897	39 8891	39 8885	39 8878	39 8870
02	39 8862	39 8854	39 8846	39 8837	39 8827	39 8818	39 8807	39 8797	39 8786	39 8775
03	39 8763	39 8751	39 8738	39 8725	39 8712	39 8698	39 8684	39 8669	39 8654	39 8639
04	39 8623	39 8607	39 8591	39 8574	39 8556	39 8539	39 8520	39 8502	39 8483	39 8464
05	39 8444	39 8424	39 8403	39 8382	39 8361	39 8339	39 8317	39 8295	39 8272	39 8249
06	39 8225	39 8201	39 8176	39 8151	39 8126	39 8100	39 8074	39 8048	39 8021	39 7994
07	39 7966	39 7938	39 7910	39 7881	39 7851	39 7822	39 7792	39 7761	39 7731	39 7699
08	39 7668	39 7636	39 7603	39 7570	39 7537	39 7504	39 7470	39 7435	39 7401	39 7365
09	39 7330	39 7294	39 7258	39 7221	39 7184	39 7146	39 7108	39 7070	39 7031	39 6992
0,10	39 6953	39 6913	39 6872	39 6832	39 6791	39 6749	39 6712	39 6665	39 6622	39 6579
11	39 6536	39 6492	39 6448	39 6403	39 6358	39 6313	39 6267	39 6221	39 6174	39 6128
12	39 6080	39 6032	39 5984	39 5936	39 5887	39 5838	39 5788	39 5738	39 5687	39 5637
13	39 5585	39 5534	39 5482	39 5429	39 5377	39 5323	39 5270	39 5216	39 5162	39 5107
14	39 5052	39 4996	39 4940	39 4884	39 4827	39 4770	39 4713	39 4655	39 4597	39 4538
15	39 4479	39 4420	39 4360	39 4300	39 4240	39 4179	39 4117	39 4056	39 3994	39 3931
16	39 3868	39 3805	39 3742	39 3678	39 3613	39 3548	39 3483	39 3418	39 3352	39 3286
17	39 3219	39 3152	39 3085	39 3017	39 2949	39 2880	39 2811	39 2742	39 2672	39 2602
18	39 2531	39 2461	39 2389	39 2318	39 2246	39 2173	39 2101	39 2028	39 1954	39 1880
19	39 1806	39 1731	39 1656	39 1581	39 1505	39 1429	39 1353	39 1276	39 1198	39 1121
0,20	39 1043	39 0964	39 0886	39 0806	39 0727	39 0647	39 0567	39 0486	39 0405	39 0324
21	39 0242	39 0160	39 0077	39 9994	39 9911	39 9827	39 9743	39 9659	39 9574	39 9489
22	39 9404	39 9318	39 9232	39 9145	39 9058	39 8971	39 8883	39 8795	39 8707	39 8618
23	39 8529	39 8439	39 8349	39 8259	39 8168	39 8077	39 7986	39 7894	39 7802	39 7709
24	39 7617	39 7523	39 7430	39 7336	39 7242	39 7147	39 7052	39 6956	39 6861	39 6765

25	0,38 6668	38 6571	38 6476	38 6376	38 6279	38 6180	38 6082	38 5983	38 5883	38 5783
26	38 5683	38 5583	38 5482	38 5381	38 5279	38 5177	38 5075	38 4973	38 4870	38 4766
27	38 4663	38 4557	38 4454	38 4349	38 4244	38 4139	38 4033	38 3927	38 3820	38 3714
28	38 3606	38 3499	38 3391	38 3282	38 3174	38 3065	38 2955	38 2846	38 2736	38 2625
29	38 2515	38 2403	38 2292	38 2180	38 2068	38 1956	38 1843	38 1730	38 1616	38 1502
0,30	38 1388	38 1273	38 1158	38 1043	38 0927	38 0811	38 0695	38 0578	38 0461	38 0344
31	38 0226	38 0108	37 9990	37 9871	37 9752	37 9633	37 9513	37 9393	37 9272	37 9152
32	37 9031	37 8909	37 8787	37 8665	37 8543	37 8420	37 8297	37 8173	37 8049	37 7925
33	37 7801	37 7676	37 7551	37 7425	37 7299	37 7173	37 7047	37 6920	37 6793	37 6665
34	37 6537	37 6409	37 6280	37 6152	37 6022	37 5893	37 5766	37 5633	37 5502	37 5372
35	37 5240	37 5109	37 4977	37 4845	37 4712	37 4580	37 4446	37 4313	37 4179	37 4045
36	37 3911	37 3776	37 3641	37 3505	37 3370	37 3234	37 3097	37 2960	37 2823	37 2686
37	37 2548	37 2410	37 2272	37 2133	37 1994	37 1855	37 1715	37 1576	37 1435	37 1295
38	37 1154	37 1013	37 0871	37 0729	37 0587	37 0445	37 0302	37 0159	37 0015	36 9872
39	36 9728	36 9583	36 9439	36 9294	36 9148	36 9003	36 8857	36 8711	36 8564	36 8417
0,40	36 8270	36 8123	36 7975	36 7827	36 7678	36 7530	36 7381	36 7231	36 7082	36 6932
41	36 6782	36 6631	36 6480	36 6329	36 6178	36 6026	36 5874	36 5722	36 5569	36 5416
42	36 5263	36 5109	36 4955	36 4801	36 4647	36 4492	36 4337	36 4181	36 4026	36 3870
43	36 3714	36 3557	36 3400	36 3243	36 3086	36 2928	36 2770	36 2612	36 2453	36 2294
44	36 2135	36 1975	36 1816	36 1656	36 1495	36 1335	36 1174	36 1012	36 0851	36 0689
45	36 0527	36 0365	36 0202	36 0039	35 9876	35 9712	35 9548	35 9384	35 9220	35 9055
46	35 8890	35 8725	35 8560	35 8394	35 8228	35 8061	35 7895	35 7728	35 7561	35 7393
47	35 7225	35 7057	35 6889	35 6720	35 6552	35 6382	35 6213	35 6043	35 5873	35 5703
48	35 5533	35 5362	35 5191	35 5019	35 4848	35 4676	35 4504	35 4331	35 4159	35 3986
49	35 3812	35 3639	35 3465	35 3291	35 3117	35 2942	35 2767	35 2592	35 2417	35 2241
0,50	35 2065	35 1889	35 1713	35 1536	35 1359	35 1182	35 1004	35 0827	35 0649	35 0470
51	35 0292	35 0113	34 9934	34 9755	34 9575	34 9395	34 9215	34 9035	34 8854	34 8674
52	34 8493	34 8311	34 8130	34 7948	34 7766	34 7583	34 7401	34 7218	34 7035	34 6851
53	34 6668	34 6484	34 6300	34 6118	34 5931	34 5746	34 5561	34 5376	34 5190	34 5004
54	34 4818	34 4632	34 4445	34 4258	34 4071	34 3884	34 3696	34 3509	34 3321	34 3132
55	34 2944	34 2755	34 2566	34 2377	34 2187	34 1998	34 1808	34 1618	34 1427	34 1237
56	34 1046	34 0855	34 0663	34 0472	34 0280	34 0088	33 9896	33 9703	33 9510	33 9317
57	33 9124	33 8931	33 8737	33 8543	33 8349	33 8155	33 7960	33 7766	33 7571	33 7375
58	33 7180	33 6984	33 6788	33 6592	33 6396	33 6199	33 6003	33 5806	33 5608	33 5411
59	33 5213	33 5015	33 4817	33 4619	33 4420	33 4222	33 4023	33 3823	33 3624	33 3424

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,60	33 3225	33 3025	33 2824	33 2624	33 2423	33 2222	33 2021	33 1820	33 1618	33 1417
61	33 1215	33 1013	33 0810	33 0608	33 0405	33 0202	32 9999	32 9795	32 9592	32 9388
62	32 9184	32 8980	32 8775	32 8571	32 8366	32 8161	32 7956	32 7750	32 7545	32 7339
63	32 7133	32 6927	32 6720	32 6514	32 6307	32 6100	32 5893	32 5686	32 5478	32 5270
64	32 5062	32 4854	32 4646	32 4437	32 4229	32 4020	32 3811	32 3601	32 3497	32 3287
65	32 2972	32 2762	32 2552	32 2342	32 2131	32 1920	32 1709	32 1498	32 1287	32 1075
66	32 0864	32 0652	32 0440	32 0228	32 0015	31 9803	31 9590	31 9377	31 9164	31 8951
67	31 8737	31 8523	31 8310	31 8096	31 7882	31 7667	31 7453	31 7238	31 7023	31 6808
68	31 6593	31 6378	31 6162	31 5946	31 5730	31 5514	31 5298	31 5082	31 4865	31 4649
69	31 4432	31 4215	31 3997	31 3780	31 3563	31 3345	31 3127	31 2909	31 2691	31 2472
0,70	31 2254	31 2035	31 1816	31 1597	31 1378	31 1159	31 0940	31 0720	31 0500	31 0280
71	31 0060	30 9840	30 9620	30 9399	30 9178	30 8958	30 8737	30 8516	30 8294	30 8073
72	30 7851	30 7630	30 7408	30 7186	30 6963	30 6741	30 6519	30 6296	30 6073	30 5850
73	30 5627	30 5404	30 5181	30 4957	30 4734	30 4510	30 4286	30 4062	30 3838	30 3614
74	30 3389	30 3165	30 2940	30 2715	30 2490	30 2265	30 2040	30 1814	30 1589	30 1363
75	30 1137	30 0912	30 0685	30 0459	30 0233	30 0007	29 9780	29 9553	29 9326	29 9099
76	29 8872	29 8645	29 8418	29 8190	29 7963	29 7735	29 7507	29 7279	29 7051	29 6823
77	29 6595	29 6366	29 6138	29 5909	29 5680	29 5451	29 5222	29 4993	29 4764	29 4535
78	29 4305	29 4075	29 3846	29 3616	29 3386	29 3156	29 2926	29 2695	29 2465	29 2234
79	29 2004	29 1773	29 1542	29 1311	29 1080	29 0849	29 0618	29 0386	29 0155	28 9923
0,80	28 9692	28 9460	28 9228	28 8996	28 8764	28 8531	28 8299	28 8067	28 6834	28 7602
81	28 7369	28 7136	28 6903	28 6670	28 6437	28 6204	28 5971	28 5737	28 5504	28 5270
82	28 5036	28 4803	28 4569	28 4335	28 4101	28 3867	28 3632	28 3398	28 3164	28 2929
83	28 2694	28 2460	28 2225	28 1990	28 1755	28 1520	28 1285	28 1050	28 0815	28 0579
84	28 0344	28 0108	27 9873	27 9637	27 9401	27 9165	27 8929	27 8693	27 8457	27 8221
85	27 7985	27 7749	27 7512	27 7276	27 7039	27 6802	27 6566	27 6329	27 6092	27 5855
86	27 5618	27 5381	27 5144	27 4907	27 4670	27 4432	27 4195	27 3957	27 3720	27 3482
87	27 3244	27 3007	27 2769	27 2531	27 2293	27 2055	27 1817	27 1579	27 1341	27 1102
88	27 0864	27 0626	27 0387	27 0149	26 9910	26 9671	26 9433	26 9194	26 8955	26 8716
89	26 8477	26 8238	26 7999	26 7760	26 7521	26 7282	26 0473	26 6803	26 6564	26 6325

0,90	26 6085	26 5846	26 5606	26 5367	26 5127	26 4887	26 4647	26 4408	26 4168	26 3928
91	26 3088	26 3448	26 3208	26 2968	26 2728	26 2488	26 2248	26 2007	26 1767	26 1527
92	26 1286	26 1046	26 0805	26 0565	26 0324	26 0084	25 9843	25 9603	25 9362	25 9121
93	25 8881	25 8640	25 8399	25 8158	25 7917	25 7676	25 7435	25 7194	25 6953	25 6712
94	25 6471	25 6230	25 5989	25 5748	25 5507	25 5266	25 5024	25 4783	25 4542	25 4300
95	25 4050	25 3818	25 3576	25 3335	25 3093	25 2852	25 2610	25 2369	25 2127	25 1886
96	25 1644	25 1403	25 1161	25 0920	25 0678	25 0436	25 0195	24 9953	24 9711	24 9469
97	24 9228	24 8986	24 8744	24 8502	24 8261	24 8019	24 7777	24 7535	24 7293	24 7051
98	24 6809	24 6568	24 6326	24 6084	24 5842	24 5600	24 5358	24 5116	24 4874	24 4632
99	24 4390	24 4148	24 3906	24 3664	24 3423	24 3181	24 2939	24 2697	24 2455	24 2213
1,00	24 1971	24 1729	24 1487	24 1245	24 1003	24 0761	24 0519	24 0277	24 0035	23 9793
01	23 9551	23 9309	23 9067	23 8825	23 8583	23 8341	23 8100	23 7858	23 7616	23 7374
02	23 7132	23 6890	23 6648	23 6406	23 6165	23 5923	23 5681	23 5439	23 5197	23 4956
03	23 4714	23 4472	23 4230	23 3989	23 3747	23 3505	23 3264	23 3022	23 2780	23 2539
04	23 2297	23 2055	23 1814	23 1572	23 1331	23 1089	23 0848	23 0606	23 0365	23 0124
05	22 9882	22 9641	22 9399	22 9158	22 8917	22 8676	22 8434	22 8193	22 7952	22 7711
06	22 7470	22 7229	22 6987	22 6746	22 6505	22 6264	22 6023	22 5783	22 5542	22 5301
07	22 5060	22 4819	22 4578	22 4338	22 4097	22 3856	22 3616	22 3375	22 3135	22 2894
08	22 2653	22 2413	22 2173	22 1932	22 1692	22 1452	22 1211	22 0971	22 0731	22 0491
09	22 0251	22 0011	21 9771	21 9531	21 9291	21 9051	21 8811	21 8571	21 8332	21 8092
1,10	21 7852	21 7613	21 7373	21 7133	21 6894	21 6655	21 6415	21 6176	21 5937	21 5697
11	21 5458	21 5219	21 4980	21 4741	21 4502	21 4263	21 4024	21 3785	21 3547	21 3308
12	21 3069	21 2831	21 2592	21 2353	21 2115	21 1877	21 1638	21 1400	21 1162	21 0924
13	21 0686	21 0448	21 0210	20 9972	20 9734	20 9496	20 9258	20 9020	20 8783	20 8545
14	20 8308	20 8070	20 7833	20 7596	20 7358	20 7121	20 6884	20 6647	20 6410	20 6173
15	20 5936	20 5699	20 5463	20 5226	20 4989	20 4753	20 4517	20 4280	20 4044	20 3808
16	20 3571	20 3335	20 3099	20 2863	20 2627	20 2392	20 2156	20 1920	20 1685	20 1449
17	20 1214	20 0978	20 0743	20 0508	20 0272	20 0037	19 9802	19 9567	19 9333	19 9098
18	19 8863	19 8628	19 8394	19 8159	19 7925	19 7691	19 7457	19 7222	19 6988	19 6754
19	19 6520	19 6287	19 6053	19 5819	19 5586	19 5352	19 5119	19 4886	19 4652	19 4419
1,20	19 4186	19 3953	19 3720	19 3487	19 3255	19 3022	19 2789	19 2557	19 2325	19 2092
21	19 1860	19 1628	19 1396	19 1164	19 0932	19 0701	19 0469	19 0237	19 0006	18 9774
22	18 9543	18 9312	18 9081	18 8850	18 8619	18 8388	18 8157	18 7927	18 7696	18 7466
23	18 7235	18 7005	18 6775	18 6545	18 6315	18 6085	18 5855	18 5626	18 5396	18 5167
24	18 4937	18 4708	18 4479	18 4250	18 4021	18 3792	18 3563	18 3334	18 3106	18 2877

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	18 2649	18 2421	18 2193	18 1965	18 1737	18 1509	18 1281	18 1053	18 0826	18 0598
26	18 0371	18 0144	17 9917	17 9690	17 9463	17 9236	17 9009	17 8783	17 8556	17 8330
27	17 8104	17 7878	17 7652	17 7426	17 7200	17 6974	17 6749	17 6523	17 6298	17 6073
28	17 5847	17 5622	17 5397	17 5173	17 4948	17 4723	17 4499	17 4275	17 4050	17 3826
29	17 3602	17 3378	17 3155	17 2931	17 2707	17 2484	17 2261	17 2037	17 1814	17 1591
1,30	17 1369	17 1146	17 0923	17 0701	17 0478	17 0256	17 0034	16 9812	16 9590	16 9368
31	16 9147	16 8925	16 8704	16 8483	16 8261	16 8040	16 7819	16 7599	16 7378	16 7157
32	16 6937	16 6717	16 6497	16 6277	16 6057	16 5837	16 5617	16 5398	16 5178	16 4959
33	16 4740	16 4521	16 4302	16 4083	16 3864	16 3646	16 3427	16 3209	16 2991	16 2773
34	16 2555	16 2337	16 2120	16 1902	16 1685	16 1468	16 1250	16 1033	16 0817	16 0600
35	16 0383	16 0167	15 9951	15 9734	15 9518	15 9302	15 9087	15 8871	15 8655	15 8440
36	15 8225	15 8010	15 7795	15 7580	15 7365	15 7151	15 6936	15 6722	15 6508	15 6294
37	15 6080	15 5866	15 5652	15 5439	15 5225	15 5012	15 4799	15 4586	15 4373	15 4161
38	15 3948	15 3736	15 3524	15 3312	15 3100	15 2888	15 2676	15 2465	15 2253	15 2042
39	15 1831	15 1620	15 1409	15 1198	15 0988	15 0777	15 0567	15 0357	15 0147	14 9937
1,40	14 9727	14 9518	14 9309	14 9099	14 8890	14 8681	14 8472	14 8264	14 8055	14 7847
41	14 7639	14 7430	14 7222	14 7015	14 6807	14 6599	14 6392	14 6185	14 5978	14 5771
42	14 5564	14 5358	14 5151	14 4945	14 4739	14 4532	14 4327	14 4121	14 3915	14 3710
43	14 3505	14 3299	14 3094	14 2890	14 2685	14 2480	14 2276	14 2072	14 1868	14 1664
44	14 1460	14 1256	14 1053	14 0850	14 0646	14 0443	14 0240	14 0038	13 9835	13 9633
45	13 9431	13 9228	13 9027	13 8825	13 8623	13 8422	13 8220	13 8019	13 7818	13 7617
46	13 7417	13 7216	13 7016	13 6815	13 6615	13 6415	13 6216	13 6016	13 5817	13 5617
47	13 5418	13 5219	13 5020	13 4822	13 4623	13 4425	13 4227	13 4028	13 3834	13 3633
48	13 3435	13 3238	13 3041	13 2844	13 2647	13 2450	13 2253	13 2057	13 1861	13 1664
49	13 1468	13 1273	13 1077	13 0881	13 0686	13 0491	13 0296	13 0101	12 9906	12 9712
1,50	12 9518	12 9323	12 9129	12 8935	12 8742	12 8548	12 8355	12 8162	12 7969	12 7776
51	12 7583	12 7390	12 7198	12 7006	12 6814	12 6622	12 6430	12 6238	12 6047	12 5856
52	12 5665	12 5474	12 5283	12 5092	12 4902	12 4712	12 4522	12 4332	12 4142	12 3952
53	12 3763	12 3574	12 3384	12 3195	12 3007	12 2818	12 2630	12 2441	12 2253	12 2065

54	0,12 1878	12 1690	12 1502	12 1315	12 1128	12 0941	12 0754	12 0568	12 0381	12 0195
55	12 0009	11 9823	11 9637	11 9452	11 9266	11 9081	11 8896	11 8711	11 8526	11 8342
56	11 8157	11 7973	11 7789	11 7605	11 7421	11 7238	11 7054	11 6871	11 6688	11 6505
57	11 6323	11 6140	11 5958	11 5775	11 5593	11 5412	11 5230	11 5048	11 4867	11 4686
58	11 4505	11 4324	11 4143	11 3963	11 3783	11 3602	11 3422	11 3243	11 3063	11 2883
59	11 2704	11 2525	11 2346	11 2167	11 1989	11 1810	11 1632	11 1454	11 1276	11 1098
1,60	11 0921	11 0743	11 0566	11 0389	11 0212	11 0036	10 9859	10 9683	10 9507	10 9331
61	10 9155	10 8979	10 8804	10 8628	10 8453	10 8278	10 8103	10 7929	10 7754	10 7580
62	10 7406	10 7232	10 7058	10 6885	10 6711	10 6538	10 6365	10 6192	10 6020	10 5847
63	10 5675	10 5503	10 5331	10 5159	10 4987	10 4816	10 4644	10 4473	10 4302	10 4132
64	10 3961	10 3794	10 3620	10 3450	10 3281	10 3111	10 2941	10 2772	10 2603	10 2434
65	10 2265	10 2096	10 1928	10 1760	10 1591	10 1423	10 1256	10 1088	10 0921	10 0753
66	10 0586	10 0419	10 0253	10 0086	09 9920	09 9754	09 9588	09 9422	09 9256	09 9091
67	09 8925	09 8760	09 8595	09 8431	09 8266	09 8102	09 7937	09 7773	09 7609	09 7446
68	09 7282	09 7119	09 6956	09 6793	09 6630	09 6467	09 6305	09 6143	09 5980	09 5819
69	09 5657	09 5495	09 5334	09 5173	09 5012	09 4851	09 4690	09 4530	09 4369	09 4209
1,70	09 4049	09 3889	09 3730	09 3570	09 3411	09 3252	09 3093	09 2934	09 2776	09 2617
71	09 2459	09 2301	09 2143	09 1986	09 1828	09 1671	09 1514	09 1357	09 1200	09 1043
72	09 0887	09 0731	09 0575	09 0419	09 0263	09 0108	08 9952	08 9797	08 9642	08 9487
73	08 9333	08 9178	08 9024	08 8870	08 8716	08 8562	08 8409	08 8255	08 8102	08 7949
74	08 7796	08 7643	08 7491	08 7339	08 7186	08 7034	08 6883	08 6731	08 6580	08 6428
75	08 6277	08 6126	08 5976	08 5825	08 5675	08 5525	08 5375	08 5225	08 5075	08 4926
76	08 4776	08 4627	08 4478	08 4330	08 4181	08 4033	08 3884	08 3736	08 3588	08 3441
77	08 3293	08 3146	08 2999	08 2852	08 2705	08 2558	08 2412	08 2266	08 2119	08 1974
78	08 1828	08 1682	08 1537	08 1392	08 1247	08 1102	08 0957	08 0813	08 0668	08 0524
79	08 0380	08 0236	08 0093	07 9949	07 9806	07 9663	07 9520	07 9377	07 9235	07 9092
1,80	07 8950	07 8808	07 8666	07 8525	07 8383	07 8242	07 8101	07 7960	07 7819	07 7678
81	07 7538	07 7398	07 7258	07 7118	07 6978	07 6838	07 6699	07 6560	07 6421	07 6282
82	07 6143	07 6005	07 5866	07 5728	07 5590	07 5453	07 5315	07 5178	07 5040	07 4903
83	07 4766	07 4630	07 4493	07 4357	07 4220	07 4084	07 3948	07 3813	07 3677	07 3542
84	07 3407	07 3272	07 3137	07 3002	07 2868	07 2734	07 2600	07 2466	07 2332	07 2198
85	07 2065	07 1932	07 1799	07 1666	07 1533	07 1400	07 1268	07 1136	07 1004	07 0872
86	07 0740	07 0609	07 0478	07 0346	07 0215	07 0085	06 9954	06 9824	06 9693	06 9563
87	06 9433	06 9304	06 9174	06 9045	06 8915	06 8786	06 8657	06 8529	06 8400	06 8272
88	06 8144	06 8016	06 7888	06 7760	06 7633	06 7505	06 7378	06 7251	06 7124	06 6998
89	06 6871	06 6745	06 6619	06 6493	06 6367	06 6241	06 6116	06 5991	06 5865	06 5741

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,90	06 5616	06 5491	06 5367	06 5243	06 5119	06 4995	06 4871	06 4747	06 4624	06 4501
91	06 4378	06 4255	06 4132	06 4010	06 3887	06 3765	06 3643	06 3521	06 3399	06 3278
92	06 3157	06 3035	06 2914	06 2794	06 2673	06 2552	06 2432	06 2312	06 2192	06 2072
93	06 1952	06 1833	06 1714	06 1594	06 1476	06 1357	06 1238	06 1120	06 1001	06 0883
94	06 0765	06 0647	06 0530	06 0412	06 0295	06 0178	06 0061	05 9944	05 9827	05 9711
95	05 9595	05 9479	05 9363	05 9247	05 9131	05 9016	05 8900	05 8785	05 8670	05 8556
96	05 8441	05 8326	05 8212	05 8098	05 7984	05 7870	05 7757	05 7643	05 7530	05 7417
97	05 7304	05 7191	05 7078	05 6966	05 6854	05 6741	05 6629	05 6518	05 6406	05 6294
98	05 6183	05 6072	05 5961	05 5850	05 5739	05 5629	05 5519	05 5408	05 5298	05 5189
99	05 5079	05 4969	05 4860	05 4751	05 4642	05 4533	05 4424	05 4316	05 4207	05 4099
2,00	05 3991	05 3883	05 3775	05 3668	05 3560	05 3453	05 3346	05 3239	05 3132	05 3026
01	05 2919	05 2813	05 2707	05 2601	05 2495	05 2389	05 2284	05 2179	05 2073	05 1968
02	05 1864	05 1759	05 1654	05 1550	05 1446	05 1342	05 1238	05 1134	05 1031	05 0927
03	05 0824	05 0721	05 0618	05 0515	05 0412	05 0310	05 0208	05 0106	05 0004	04 9902
04	04 9800	04 9699	04 9597	04 9496	04 9395	04 9294	04 9193	04 9093	04 8992	04 8892
05	04 8792	04 8692	04 8592	04 8493	04 8393	04 8294	04 8195	04 8096	04 7997	04 7898
06	04 7800	04 7701	04 7603	04 7505	04 7407	04 7309	04 7212	04 7114	04 7017	04 6920
07	04 6823	04 6726	04 6629	04 6533	04 6436	04 6340	04 6244	04 6148	04 6052	04 5957
08	04 5861	04 5766	04 5671	04 5576	04 5481	04 5386	04 5291	04 5197	04 5103	04 5009
09	04 4915	04 4821	04 4727	04 4634	04 4540	04 4447	04 4354	04 4261	04 4169	04 4076
2,10	04 3984	04 3891	04 3799	04 3707	04 3615	04 3524	04 3432	04 3341	04 3249	04 3158
11	04 3067	04 2977	04 2886	04 2795	04 2705	04 2615	04 2525	04 2435	04 2345	04 2256
12	04 2166	04 2077	04 1988	04 1899	04 1810	04 1721	04 1632	04 1544	04 1456	04 1368
13	04 1280	04 1192	04 1104	04 1016	04 0929	04 0842	04 0755	04 0668	04 0581	04 0494
14	04 0408	04 0321	04 0235	04 0149	04 0063	03 9977	03 9891	03 9806	03 9720	03 9635
15	03 9550	03 9465	03 9380	03 9296	03 9211	03 9127	03 9042	03 8958	03 8874	03 8791
16	03 8707	03 8623	03 8540	03 8457	03 8374	03 8291	03 8208	03 8125	03 8043	03 7960
17	03 7878	03 7796	03 7714	03 7632	03 7550	03 7469	03 7387	03 7306	03 7225	03 7144
18	0,03 7063	03 6982	03 6902	03 6821	03 6741	03 6661	03 6581	03 6501	03 6421	03 6341
19	03 6262	03 6183	03 6103	03 6024	03 5945	03 5867	03 5788	03 5709	03 5631	03 5553

2,20	03 5475	03 5319	03 5241	03 5164	03 5086	03 5009	03 4932	03 4855	03 4778
21	03 4701	03 4548	03 4471	03 4395	03 4319	03 4243	03 4167	03 4092	03 4016
22	03 3941	03 3790	03 3715	03 3640	03 3566	03 3491	03 3417	03 3342	03 3268
23	03 3194	03 3046	03 2972	03 2899	03 2825	03 2752	03 2679	03 2606	03 2533
24	03 2460	03 2315	03 2243	03 2170	03 2098	03 2026	03 1954	03 1883	03 1811
25	03 1740	03 1597	03 1526	03 1455	03 1384	03 1313	03 1243	03 1172	03 1102
26	03 1032	03 0892	03 0822	03 0752	03 0683	03 0613	03 0544	03 0475	03 0406
27	03 0337	03 0199	03 0131	03 0063	02 9994	02 9926	02 9858	02 9790	02 9722
28	02 9655	02 9520	02 9452	02 9385	02 9318	02 9251	02 9184	02 9118	02 9051
29	02 8985	02 8852	02 8786	02 8720	02 8654	02 8589	02 8523	02 8458	02 8392
3,30	02 8327	02 8197	02 8132	02 8067	02 8003	02 7938	02 7874	02 7810	02 7746
31	02 7682	02 7554	02 7490	02 7427	02 7363	02 7300	02 7237	02 7174	02 7111
32	02 7048	02 6923	02 6860	02 6798	02 6736	02 6674	02 6612	02 6550	02 6488
33	02 6426	02 6304	02 6242	02 6181	02 6120	02 6059	02 5998	02 5938	02 5877
34	02 5817	02 5696	02 5636	02 5576	02 5516	02 5456	02 5397	02 5337	02 5278
35	02 5218	02 5100	02 5041	02 4982	02 4923	02 4865	02 4806	02 4748	02 4689
36	02 4631	02 4515	02 4457	02 4400	02 4342	02 4285	02 4227	02 4170	02 4113
37	02 4056	02 3942	02 3885	02 3828	02 3772	02 3715	02 3659	02 3603	02 3547
38	02 3491	02 3379	02 3324	02 3268	02 3213	02 3158	02 3102	02 3047	02 2992
39	02 2937	02 2828	02 2773	02 2719	02 2665	02 2610	02 2556	02 2502	02 2448
2,40	02 2395	02 2287	02 2234	02 2180	02 2127	02 2074	02 2021	02 1968	02 1915
41	02 1862	02 1757	02 1705	02 1652	02 1600	02 1548	02 1496	02 1444	02 1392
42	02 1341	02 1238	02 1186	02 1135	02 1084	02 1033	02 0982	02 0931	02 0880
43	02 0829	02 0728	02 0678	02 0628	02 0578	02 0528	02 0478	02 0428	02 0378
44	02 0328	02 0229	02 0180	02 0131	02 0082	02 0033	01 9984	01 9935	01 9886
45	01 9837	01 9740	01 9692	01 9644	01 9596	01 9548	01 9500	01 9452	01 9404
46	01 9356	01 9261	01 9214	01 9167	01 9119	01 9072	01 9025	01 8978	01 8932
47	01 8885	01 8792	01 8745	01 8699	01 8653	01 8607	01 8561	01 8515	01 8469
48	01 8423	01 8378	01 8287	01 8241	01 8196	01 8151	01 8106	01 8061	01 8016
49	01 7971	01 7926	01 7837	01 7793	01 7749	01 7704	01 7660	01 7616	01 7572

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,50	01 7528	01 7485	01 7441	01 7397	01 7354	01 7310	01 7267	01 7224	01 7181	01 7138
51	01 7095	01 7052	01 7009	01 6963	01 6924	01 6881	01 6839	01 6797	01 6754	01 6712
52	01 6670	01 6628	01 6586	01 6544	01 6503	01 6461	01 6420	01 6378	01 6337	01 6296
53	01 6254	01 6213	01 6172	01 6131	01 6091	01 6050	01 6009	01 5969	01 5928	01 5888
54	01 5848	01 5807	01 5767	01 5727	01 5687	01 5647	01 5608	01 5568	01 5528	01 5489
55	01 5449	01 5410	01 5371	01 5332	01 5292	01 5253	01 5214	01 5176	01 5137	01 5098
56	01 5060	01 5021	01 4983	01 4944	01 4906	01 4868	01 4830	01 4792	01 4754	01 4716
57	01 4678	01 4641	01 4603	01 4565	01 4528	01 4491	01 4453	01 4416	01 4379	01 4342
58	01 4305	01 4268	01 4231	01 4195	01 4158	01 4122	01 4085	01 4049	01 4012	01 3976
59	01 3940	01 3904	01 3868	01 3832	01 3796	01 3761	01 3725	01 3689	01 3654	01 3618
2,60	01 3583	01 3548	01 3512	01 3477	01 3442	01 3407	01 3372	01 3338	01 3303	01 3268
61	01 3234	01 3199	01 3165	01 3130	01 3096	01 3062	01 3028	01 2994	01 2960	01 2926
62	01 2892	01 2858	01 2825	01 2791	01 2758	01 2724	01 2691	01 2658	01 2624	01 2591
63	01 2558	01 2525	01 2492	01 2459	01 2427	01 2394	01 2361	01 2329	01 2296	01 2264
64	01 2232	01 2199	01 2167	01 2135	01 2103	01 2071	01 2039	01 2007	01 1976	01 1944
65	01 1912	01 1881	01 1849	01 1818	01 1787	01 1755	01 1724	01 1693	01 1662	01 1631
66	01 1600	01 1569	01 1539	01 1508	01 1477	01 1447	01 1416	01 1386	01 1356	01 1325
67	01 1295	01 1265	01 1235	01 1205	01 1175	01 1145	01 1115	01 1086	01 1056	01 1026
68	01 0997	01 0967	01 0938	01 0909	01 0880	01 0850	01 0821	01 0792	01 0763	01 0734
69	01 0706	01 0677	01 0648	01 0620	01 0591	01 0562	01 0534	01 0506	01 0477	01 0449
2,70	01 0421	01 0393	01 0365	01 0337	01 0309	01 0281	01 0253	01 0226	01 0198	01 0170
71	01 0143	01 0115	01 0088	01 0061	01 0033	01 0006	01 0979	01 0952	01 0925	01 0898
72	01 0874	01 0844	01 0818	01 0791	01 0764	01 0738	01 0711	01 0685	01 0658	01 0632
73	01 0606	01 0580	01 0553	01 0527	01 0501	01 0475	01 0450	01 0424	01 0398	01 0372
74	01 0347	01 0321	01 0296	01 0270	01 0245	01 0219	01 0194	01 0169	01 0144	01 0119
75	01 0904	01 0909	01 0904	01 0919	01 0894	01 0869	01 0845	01 0820	01 0795	01 0770
76	01 0846	01 0822	01 0798	01 0773	01 0749	01 0725	01 0701	01 0677	01 0653	01 0629
77	01 0605	01 0581	01 0558	01 0534	01 0510	01 0487	01 0463	01 0440	01 0416	01 0393
78	01 0370	01 0346	01 0323	01 0300	01 0277	01 0254	01 0231	01 0208	01 0185	01 0163
79	01 0140	01 0117	01 0094	01 0072	01 0049	01 0027	01 0005	01 0982	01 0960	01 0938

2,80	0,00 7915	00 7893	00 7871	00 7849	00 7827	00 7805	00 7783	00 7762	00 7740	00 7718
81	00 7697	00 7675	00 7653	00 7632	00 7610	00 7589	00 7568	00 7546	00 7525	00 7504
82	00 7483	00 7462	00 7441	00 7420	00 7399	00 7378	00 7357	00 7336	00 7316	00 7295
83	00 7274	00 7254	00 7233	00 7213	00 7192	00 7172	00 7152	00 7132	00 7111	00 7091
84	00 7071	00 7051	00 7031	00 7011	00 6991	00 6971	00 6952	00 6932	00 6912	00 6892
85	00 6873	00 6853	00 6834	00 6814	00 6795	00 6775	00 6756	00 6737	00 6718	00 6698
86	00 6679	00 6660	00 6642	00 6622	00 6603	00 6584	00 6566	00 6547	00 6528	00 6509
87	00 6491	00 6472	00 6454	00 6435	00 6417	00 6398	00 6380	00 6361	00 6343	00 6325
88	00 6307	00 6289	00 6270	00 6252	00 6234	00 6216	00 6199	00 6181	00 6163	00 6145
89	00 6127	00 6110	00 6092	00 6074	00 6057	00 6039	00 6022	00 6005	00 5987	00 5970
2,90	00 5953	00 5935	00 5918	00 5901	00 5884	00 5867	00 5850	00 5833	00 5816	00 5799
91	00 5782	00 5765	00 5749	00 5732	00 5715	00 5699	00 5682	00 5665	00 5649	00 5632
92	00 5616	00 5600	00 5583	00 5567	00 5551	00 5535	00 5518	00 5502	00 5486	00 5470
93	00 5454	00 5438	00 5422	00 5406	00 5391	00 5375	00 5359	00 5343	00 5328	00 5312
94	00 5296	00 5281	00 5265	00 5250	00 5234	00 5219	00 5204	00 5188	00 5173	00 5158
95	00 5143	00 5127	00 5112	00 5097	00 5082	00 5067	00 5052	00 5037	00 5023	00 5008
96	00 4993	00 4978	00 4963	00 4949	00 4934	00 4919	00 4905	00 4890	00 4876	00 4861
97	00 4847	00 4833	00 4818	00 4804	00 4790	00 4776	00 4762	00 4747	00 4733	00 4719
98	00 4705	00 4691	00 4677	00 4663	00 4649	00 4635	00 4621	00 4608	00 4594	00 4580
99	00 4567	00 4553	00 4539	00 4526	00 4512	00 4499	00 4485	00 4472	00 4459	00 4445
3,00	00 4432	00 4419	00 4405	00 4392	00 4379	00 4366	00 4353	00 4340	00 4327	00 4314
3,0	0,00 4318	00 4307	00 4294	00 4281	00 4268	00 4255	00 4242	00 4229	00 4216	00 4203
1	00 4189	00 4176	00 4163	00 4150	00 4137	00 4124	00 4111	00 4098	00 4085	00 4072
2	00 4059	00 4046	00 4033	00 4020	00 4007	00 3994	00 3981	00 3968	00 3955	00 3942
3	00 3929	00 3916	00 3903	00 3890	00 3877	00 3864	00 3851	00 3838	00 3825	00 3812
4	00 3799	00 3786	00 3773	00 3760	00 3747	00 3734	00 3721	00 3708	00 3695	00 3682
5	00 3669	00 3656	00 3643	00 3630	00 3617	00 3604	00 3591	00 3578	00 3565	00 3552
6	00 3533	00 3520	00 3507	00 3494	00 3481	00 3468	00 3455	00 3442	00 3429	00 3416
7	00 3397	00 3384	00 3371	00 3358	00 3345	00 3332	00 3319	00 3306	00 3293	00 3280
8	00 3264	00 3251	00 3238	00 3225	00 3212	00 3199	00 3186	00 3173	00 3160	00 3147
9	00 3134	00 3121	00 3108	00 3095	00 3082	00 3069	00 3056	00 3043	00 3030	00 3017

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,0	000 1338	000 1286	000 1235	000 1186	000 1140	000 1094	000 1051	000 1009	000 0969	000 0930
1	000 0893	000 0857	000 0822	000 0789	000 0757	000 0726	000 0697	000 0668	000 0641	000 0615
2	000 0589	000 0565	000 0542	000 0519	000 0498	000 0477	000 0457	000 0438	000 0420	000 0402
3	000 0385	000 0369	000 0354	000 0339	000 0324	000 0310	000 0297	000 0284	000 0272	000 0261
4	000 0249	000 0239	000 0228	000 0218	000 0209	000 0200	000 0191	000 0183	000 0175	000 0167
5	000 0160	000 0153	000 0146	000 0140	000 0133	000 0127	000 0122	000 0116	000 0111	000 0106
6	000 0101	000 0097	000 0092	000 0088	000 0084	000 0080	000 0077	000 0073	000 0070	000 0067
7	000 0064	000 0061	000 0058	000 0055	000 0053	000 0050	000 0048	000 0046	000 0044	000 0042
8	000 0040	000 0038	000 0036	000 0034	000 0033	000 0031	000 0030	000 0028	000 0027	000 0026
9	000 0024	000 0023	000 0022	000 0021	000 0020	000 0019	000 0018	000 0017	000 0016	000 0016
5,0	000 0015	000 0009	000 0005	000 0003	000 0002	000 0001	000 0001	—	—	—

t	y	t	y	t	y	t	y
4,0	0,00013 38302 25765	5,0	0,00000 14867 19515	6,0	0,00000 00060 75883	7,0	0,00000 00000 09135
1	0,00008 92616 57177	1	0,00000 08972 43516	1	0,00000 00033 17884	1	0,00000 00000 04514
2	0,00005 89430 67757	2	0,00000 05361 03534	2	0,00000 00017 93784	2	0,00000 00000 02208
3	0,00003 85351 96742	3	0,00000 03171 34922	3	0,00000 00009 60143	3	0,00000 00000 01069
4	0,00002 49424 71290	4	0,00000 01857 36184	4	0,00000 00005 08814	4	0,00000 00000 00513
5	0,00001 59837 41107	5	0,00000 01076 97600	5	0,00000 00002 66956	5	0,00000 00000 00243
6	0,00001 01408 52065	6	0,00000 00618 26205	6	0,00000 00001 38668	6	0,00000 00000 00114
7	0,00000 63698 25179	7	0,00000 00351 39551	7	0,00000 00000 71313	7	0,00000 00000 00053
8	0,00000 39612 99091	8	0,00000 00197 73196	8	0,00000 00000 36310	8	0,00000 00000 00025
9	0,00000 24389 60746	9	0,00000 00110 15764	9	0,00000 00000 18303	8,0	0,00000 00000 00011
						1	0,00000 00000 00002
						2	0,00000 00000 00001

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $y' = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}$
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРДИНАТ КРИВОЙ НОРМАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛЕ $y = y' \cdot h$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5641	0,5641	0,5641	0,5640	0,5637	0,5634	0,5631	0,5629	0,5624	0,5619
0,1	0,5614	0,5607	0,5602	0,5595	0,5588	0,5579	0,5571	0,5561	0,5551	0,5541
0,2	0,5530	0,5518	0,5507	0,5494	0,5481	0,5469	0,5455	0,5440	0,5425	0,5409
0,3	0,5394	0,5377	0,5360	0,5342	0,5325	0,5306	0,5288	0,5268	0,5250	0,5228
0,4	0,5209	0,5187	0,5166	0,5143	0,5121	0,5098	0,5076	0,5052	0,5028	0,5003
0,5	0,4979	0,4954	0,4929	0,4903	0,4876	0,4849	0,4822	0,4796	0,4769	0,4740
0,6	0,4712	0,4684	0,4656	0,4626	0,4598	0,4568	0,4538	0,4507	0,4477	0,4446
0,7	0,4417	0,4385	0,4354	0,4322	0,4291	0,4258	0,4227	0,4195	0,4162	0,4129
0,8	0,4097	0,4064	0,4030	0,3998	0,3964	0,3932	0,3898	0,3864	0,3831	0,3797
0,9	0,3763	0,3729	0,3695	0,3661	0,3627	0,3594	0,3558	0,3524	0,3490	0,3456
1,0	0,342	0,339	0,336	0,332	0,329	0,326	0,322	0,318	0,315	0,312
1,1	0,308	0,304	0,302	0,298	0,295	0,292	0,288	0,284	0,282	0,278
1,2	0,275	0,272	0,268	0,265	0,262	0,258	0,256	0,252	0,248	0,246
1,3	0,242	0,240	0,236	0,233	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,214
1,4	0,212	0,209	0,206	0,203	0,200	0,197	0,194	0,192	0,189	0,186
1,5	0,183	0,180	0,178	0,175	0,172	0,170	0,167	0,165	0,162	0,159
1,6	0,156	0,154	0,152	0,149	0,147	0,145	0,142	0,140	0,138	0,135
1,7	0,133	0,131	0,129	0,126	0,124	0,122	0,120	0,118	0,116	0,114
1,8	0,112	0,110	0,108	0,106	0,104	0,102	0,100	0,098	0,096	0,094
1,9	0,093	0,091	0,090	0,088	0,086	0,084	0,083	0,081	0,080	0,078
2,0	0,076	0,076	0,075	0,073	0,072	0,069	0,068	0,066	0,065	0,063
2,1	0,062	0,061	0,060	0,058	0,057	0,056	0,055	0,053	0,052	0,051
2,2	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044	0,043	0,042	0,041
2,3	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037	0,036	0,036	0,034	0,033	0,032
2,4	0,032	0,031	0,030	0,030	0,029	0,028	0,027	0,027	0,026	0,025
2,5	0,025	0,024	0,024	0,023	0,022	0,022	0,021	0,021	0,020	0,020
2,6	0,019	0,019	0,018	0,018	0,017	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015
2,7	0,015	0,014	0,014	0,014	0,013	0,017	0,012	0,012	0,012	0,011
2,8	0,011	0,011	0,011	0,010	0,010	0,010	0,0096	0,0094	0,0092	0,0090
2,9	0,0085	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071	0,0069	0,0067	0,0066
3,0	0,0063									

Пример. Дано: $m = \pm 0^{\circ},47$; $\Delta = 0^{\circ},94$; $y = ?$
Решение: $t = 2$; $h = 1,507$; $y' = 0,076$; $y = 0,1144$.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ КРИТЕРИЯ χ^2 [33]

$h \backslash \chi^2$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	0,1574	0,3679	0,5724	0,7358	0,8491	0,9197	0,9598	0,9810
3	0,0833	0,2231	0,3916	0,5578	0,7000	0,8088	0,8850	0,9344
4	0,0455	0,1353	0,2615	0,4060	0,5494	0,6767	0,7798	0,8571

$\chi^2 \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8
5	0,0254	0,0821	0,1718	0,2873	0,4159	0,5438	0,6600	0,7576
6	0,0143	0,0498	0,1116	0,1991	0,3062	0,4232	0,5398	0,6472
7	0,0081	0,0302	0,0719	0,1359	0,2206	0,3208	0,4289	0,5366
8	0,0047	0,0183	0,0460	0,0916	0,1562	0,2381	0,3326	0,4335
9	0,0027	0,0111	0,0293	0,0611	0,1091	0,1736	0,2527	0,3423
10	0,0016	0,0067	0,0186	0,0404	0,0752	0,1247	0,1886	0,2650
11	0,0009	0,0041	0,0117	0,0266	0,0514	0,0884	0,1386	0,2017
12	0,0005	0,0025	0,0074	0,0174	0,0348	0,0620	0,1006	0,1512
13	0,0003	0,0015	0,0046	0,0113	0,0234	0,0430	0,0721	0,1119
14	0,0002	0,0009	0,0029	0,0073	0,0156	0,0296	0,0512	0,0818
15	0,0001	0,0006	0,0018	0,0047	0,0104	0,0203	0,0360	0,0591
16	0,0001	0,0003	0,0011	0,0030	0,0068	0,0138	0,0251	0,0424
17	0,0000	0,0002	0,0007	0,0019	0,0045	0,0093	0,0174	0,0301
18		0,0001	0,0004	0,0012	0,0029	0,0062	0,0120	0,0212
19		0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0042	0,0082	0,0149
20		0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0028	0,0056	0,0103
21			0,0001	0,0003	0,0008	0,0018	0,0038	0,0071
22			0,0001	0,0002	0,0005	0,0012	0,0025	0,0049
23			0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0034
24				0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0023
25				0,0001	0,0001	0,0003	0,0008	0,0016
26				0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010
27					0,0001	0,0001	0,0003	0,0007
28					0,0000	0,0001	0,0002	0,0005
29						0,0001	0,0001	0,0003
30						0,0000	0,0001	0,0002

$\chi^2 \backslash h$	9	10	11	12	13	14	15
1	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,9915	0,9963	0,9985	0,9994	0,9998	0,9999	1,0000
3	0,9643	0,9814	0,9907	0,9955	0,9979	0,9991	0,9996
4	0,9114	0,9473	0,9699	0,9834	0,9912	0,9955	0,9977
5	0,8343	0,8912	0,9312	0,9580	0,9752	0,9858	0,9921
6	0,7399	0,8153	0,8734	0,9161	0,9462	0,9665	0,9797
7	0,6371	0,7254	0,7991	0,8576	0,9022	0,9347	0,9576
8	0,5341	0,6288	0,7133	0,7851	0,8436	0,8893	0,9238
9	0,4373	0,5321	0,6219	0,7029	0,7729	0,8311	0,8775
10	0,3505	0,4405	0,5304	0,6160	0,6939	0,7622	0,8197
11	0,2757	0,3575	0,4433	0,5289	0,6108	0,6860	0,7526
12	0,2133	0,2851	0,3626	0,4457	0,5276	0,6063	0,6790
13	0,1626	0,2237	0,2933	0,3690	0,4478	0,5265	0,6023
14	0,1223	0,1730	0,2330	0,3007	0,3738	0,4497	0,5255
15	0,0909	0,1321	0,1825	0,2414	0,3074	0,3782	0,4514

$\chi^2 \backslash h$	9	10	11	12	13	14	15
16	0,0669	0,0996	0,1411	0,1912	0,2491	0,3134	0,3821
17	0,0487	0,0744	0,1079	0,1496	0,1993	0,2562	0,3189
18	0,0352	0,0550	0,0816	0,1157	0,1575	0,2068	0,2627
19	0,0252	0,0403	0,0611	0,0885	0,1231	0,1649	0,2137
20	0,0179	0,0293	0,0453	0,0671	0,0952	0,1301	0,1719
21	0,0126	0,0211	0,0334	0,0504	0,0729	0,1016	0,1368
22	0,0089	0,0151	0,0244	0,0375	0,0554	0,0786	0,1078
23	0,0062	0,0107	0,0177	0,0277	0,0417	0,0603	0,0841
24	0,0043	0,0076	0,0127	0,0203	0,0311	0,0458	0,0651
25	0,0030	0,0053	0,0091	0,0148	0,0231	0,0346	0,0499
26	0,0020	0,0037	0,0065	0,0107	0,0170	0,0259	0,0380
27	0,0014	0,0026	0,0046	0,0077	0,0124	0,0193	0,0287
28	0,0010	0,0018	0,0032	0,0055	0,0090	0,0142	0,0216
29	0,0006	0,0012	0,0023	0,0039	0,0065	0,0104	0,0161
30	0,0004	0,0009	0,0016	0,0028	0,0047	0,0076	0,0119

$\chi^2 \backslash h$	16	17	18	19	20	21	22
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,9989	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
5	0,9958	0,9978	0,9989	0,9994	0,9997	0,9999	0,9999
6	0,9881	0,9932	0,9962	0,9979	0,9989	0,9994	0,9997
7	0,9733	0,9835	0,9901	0,9942	0,9967	0,9981	0,9990
8	0,9489	0,9665	0,9786	0,9867	0,9919	0,9951	0,9972
9	0,9134	0,9403	0,9597	0,9735	0,9829	0,9892	0,9933
10	0,8666	0,9036	0,9319	0,9539	0,9682	0,9789	0,9863
11	0,8095	0,8566	0,8944	0,9238	0,9462	0,9628	0,9747
12	0,7440	0,8001	0,8472	0,8856	0,9161	0,9396	0,9574
13	0,6728	0,7362	0,7916	0,8386	0,8774	0,9086	0,9332
14	0,5987	0,6671	0,7291	0,7837	0,8305	0,8696	0,9015
15	0,5246	0,5955	0,6620	0,7226	0,7764	0,8230	0,8622
16	0,4530	0,5238	0,5925	0,6573	0,7166	0,7696	0,8159
17	0,3856	0,4544	0,5231	0,5899	0,6530	0,7111	0,7634
18	0,3239	0,3888	0,4557	0,5224	0,5874	0,6490	0,7060
19	0,2687	0,3285	0,3918	0,4568	0,5218	0,5851	0,6453
20	0,2202	0,2742	0,3328	0,3946	0,4579	0,5213	0,5830
21	0,1785	0,2263	0,2794	0,3368	0,3971	0,4589	0,5207
22	0,1432	0,1847	0,2320	0,2843	0,3405	0,3995	0,4599
23	0,1137	0,1493	0,1906	0,2373	0,2888	0,3440	0,4017
24	0,0895	0,1194	0,1550	0,1962	0,2424	0,2931	0,3472
25	0,0698	0,0947	0,1249	0,1605	0,2014	0,2472	0,2971
26	0,0540	0,0745	0,0998	0,1302	0,1658	0,2064	0,2517
27	0,0415	0,0581	0,0790	0,1047	0,1353	0,1709	0,2112
28	0,0316	0,0449	0,0621	0,0834	0,1094	0,1402	0,1757
29	0,0239	0,0345	0,0484	0,0660	0,0878	0,1140	0,1449
30	0,0180	0,0263	0,0374	0,0518	0,0699	0,0920	0,1185

$\chi^2 \backslash k$	23	24	25	26	27	28	29
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
8	0,9984	0,9991	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	1,0000
9	0,9960	0,9976	0,9986	0,9992	0,9995	0,9997	0,9999
10	0,9913	0,9945	0,9967	0,9980	0,9988	0,9993	0,9996
11	0,9832	0,9890	0,9929	0,9955	0,9972	0,9983	0,9990
12	0,9705	0,9799	0,9866	0,9912	0,9943	0,9964	0,9977
13	0,9520	0,9661	0,9765	0,9840	0,9892	0,9929	0,9954
14	0,9269	0,9466	0,9617	0,9730	0,9813	0,9872	0,9914
15	0,8946	0,9208	0,9414	0,9573	0,9694	0,9784	0,9850
16	0,8553	0,8881	0,9148	0,9362	0,9529	0,9658	0,9755
17	0,8093	0,8487	0,8818	0,9091	0,9311	0,9486	0,9622
18	0,7575	0,8030	0,8424	0,8758	0,9035	0,9261	0,9443
19	0,7012	0,7520	0,7971	0,8364	0,8700	0,8981	0,9213
20	0,6419	0,6968	0,7468	0,7916	0,8308	0,8645	0,8929
21	0,5811	0,6387	0,6926	0,7420	0,7863	0,8253	0,8591
22	0,5203	0,5793	0,6357	0,6887	0,7374	0,7813	0,8202
23	0,4608	0,5198	0,5776	0,6329	0,6850	0,7330	0,7765
24	0,4038	0,4616	0,5194	0,5760	0,6303	0,6815	0,7289
25	0,3503	0,4058	0,4624	0,5190	0,5745	0,6278	0,6782
26	0,3009	0,3532	0,4076	0,4631	0,5186	0,5730	0,6255
27	0,2560	0,3045	0,3559	0,4093	0,4638	0,5182	0,5717
28	0,2158	0,2600	0,3079	0,3585	0,4110	0,4644	0,5179
29	0,1803	0,2201	0,2639	0,3111	0,3609	0,4125	0,4651
30	0,1494	0,1848	0,2243	0,2676	0,3142	0,3632	0,4140

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН t_p ,

$$\text{УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАВЕНСТВУ } 2C \int_0^{t_p} \left(1 + \frac{t_2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot dt = p \quad [13]$$

$n \backslash p$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
2	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
3	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
4	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
5	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
6	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
7	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
8	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0,2	0,4	0,6	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
9	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
10	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
11	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
12	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
13	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
14	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
15	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
16	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
17	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
18	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
19	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
20	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
21	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
22	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
23	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
24	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
25	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
26	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
27	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
28	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
29	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
30	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
31	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
41	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
51	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
61	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
81	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
101	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
201	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
501	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad [33]$$

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1104	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2132	0,2237	0,2342	0,2448	0,2554	0,2661	0,2769	0,2877	0,2986
0,3	0,3095	0,3205	0,3316	0,3428	0,3541	0,3654	0,3769	0,3884	0,4001	0,4118
0,4	0,4236	0,4356	0,4477	0,4599	0,4722	0,4847	0,4973	0,5101	0,5230	0,5361
0,5	0,5493	0,5627	0,5763	0,5901	0,6042	0,6184	0,6328	0,6475	0,6625	0,6777
0,6	0,6931	0,7089	0,7250	0,7414	0,7582	0,7753	0,7928	0,8107	0,8291	0,8480
0,7	0,8673	0,8872	0,9076	0,9287	0,9505	0,9730	0,9962	1,0203	1,0454	1,0714
0,8	1,0986	1,1270	1,1568	1,1881	1,2212	1,2562	1,2933	1,3331	1,3758	1,4219
0,9	1,4722	1,5275	1,5890	1,6584	1,7380	1,8318	1,9459	2,0923	2,2976	2,6466
0,99	2,6466	2,6996	2,7587	2,8257	2,9031	2,9945	3,1063	3,2504	3,4534	3,8002

ЛИТЕРАТУРА

1. Арлей Н. и Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., ИЛ, 1951.
2. Бурмистров Г. А. Основы способа наименьших квадратов. М., Гостеолтехиздат, 1963.
3. Бурмистров Г. А. Задачник по способу наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1960.
4. Большаков В. Д. Об оценке степени приближения действительного распределения ошибок к нормальному. — Труды МИИГАиК, вып. 27, 1957.
5. Большаков В. Д. Применение метода корреляции при оценке точности светодальномерных измерений. — Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». 1958, вып. 1.
6. Большаков В. Д. Обобщение рельефа при съемке в крупных масштабах. — Труды МИИГАиК, вып. 33, 1958.
7. Большаков В. Д. Исследование закономерностей распределения ошибок обобщения рельефа при съемке. — Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». 1961, вып. 4.
8. Большаков В. Д. Определение постоянных в эмпирических формулах методом логарифмической корреляции. — Труды МИИГАиК, вып. 49, 1962.
9. Большаков В. Д. Исследование связей между ошибками элементов вытянутого треугольника в кольцевой трилатерационной сети. — Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». 1963, вып. 5.
10. Бородачев Н. А. Анализ качества и точности производства. М., Машгиз, 1946.
11. Бородачев Н. А. Основные вопросы теории точности производства. М. — Л., изд-во АН СССР, 1950.
12. Бруевич Н. Г. Точность механизмов. М. — Л., Гостехиздат, 1946.
13. Бродский А. Д., Кан В. Л. Краткий справочник по математической обработке результатов измерений. М., Стандартгиз, 1960.
14. Ван Дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.
15. Венецкий И. Г., Кильдишев Г. С. Основы математической статистики. М., Госстатиздат, 1963.
16. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
17. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я. и др. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Л., Судпромгиз, 1962.
18. Гайдаев П. А. Способ наименьших квадратов. М., 1959.
19. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.
20. Гутер Р. С. и Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М., Физматгиз, 1962.
21. Длин А. М. Математическая статистика в технике. М., «Советская наука», 1958.

22. Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В., С м и р н о в Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
23. К а р а с е в А. И. Основы математической статистики. Росвуиздат, 1962.
24. К е м н и ц Ю. В. Теория ошибок измерений. М., Геодезиздат, 1961.
25. К о л е с о в а Е. В. Математическая обработка результатов измерений. Росвуиздат, 1963.
26. К о у д е н Д. Статистические методы контроля качества. М., Физматгиз, 1961.
27. К о р д о н с к и й Х. Б. Приложения теории вероятностей в инженерном деле. М. — Л., Физматгиз, 1963.
28. М а с л о в А. В., Л а р ч е н к о Е. Г., Г о р д е е в А. В., А л е к с а н д р о в Н. Н. Геодезия. Ч. I. М., «Недра», 1964.
29. М и т р о п о л ь с к и й В. А. Элементы теории вероятностей. М., изд. ВЗИСТ, 1948.
30. М и т р о п о л ь с к и й А. К. Нормальное распределение. Л., 1956.
31. Р о м а н о в с к и й В. И. Математическая статистика. М. — Л., ГОНТИ НКТП СССР, 1938.
32. Р о м а н о в с к и й В. И. Основные задачи теории ошибок. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
33. Р о м а н о в с к и й В. И. Применения математической статистики в опытно-деловом деле. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
34. С к и д а н е н к о К. К. Коррелятивно-зависимые случайные ошибки в геодезических измерениях. — «Геодезия и картография», 1958, № 10.
35. С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., Физматгиз, 1959.
36. Ч е б о т а р е в А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М., Геодезиздат, 1958.
37. Ш о р Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.
38. Ш и л о в П. И. Способ наименьших квадратов. М., Геодезиздат, 1941.
39. Ш и л о в П. И. Предельные ошибки результатов измерений и уравниваний. — Известия вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка». 1958, вып. 2.
40. Щ и г о л е в Б. М. Математическая обработка наблюдений. М. Физматгиз, 1962.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	Стр. 3
-----------------------	-----------

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава I. Основные понятия и теоремы теории вероятностей	5
§ 1. Событие	—
§ 2. Виды событий	6
§ 3. Относительная частота и вероятность событий	8
§ 4. Сложение вероятностей	11
§ 5. Независимые и зависимые события. Условная вероятность	13
§ 6. Умножение вероятностей	14

Глава II. Многократные испытания	18
--	----

§ 7. Распределение вероятностей при многократных испытаниях. Биномиальное распределение	—
§ 8. Вероятнейшее число появлений события при многократных испытаниях	22

Глава III. Случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики	25
--	----

§ 9. Понятие о случайной величине. Прерывные и непрерывные случайные величины	—
§ 10. Законы распределения случайных величин	26
§ 11. Интеграл вероятностей. Плотность нормального распределения вероятностей	28
§ 12. Интегральная функция нормального распределения и связь ее с интегралом вероятностей	35
§ 13. Вычисление интеграла вероятностей	36
§ 14. Числовые характеристики случайных величин	38
§ 15. Закон нормального распределения для случайных величин	52
§ 16. Понятие о других видах распределения	57

Глава IV. Элементы корреляционного анализа	64
--	----

§ 17. Понятие о статистических связях	—
§ 18. Коэффициент корреляции	65
§ 19. Свойства коэффициента корреляции	66
§ 20. Уравнение регрессии	68

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ

Глава V. Ошибки наблюдений. Распределение вероятностей случайных ошибок и критерии для оценки точности	72
--	----

§ 21. Предмет и задачи теории ошибок	—
§ 22. Классификация ошибок наблюдений	73
§ 23. Распределение вероятностей случайных ошибок	77

	Стр.
§ 24. Свойства кривой ошибок (кривой Гаусса)	81
§ 25. Другие критерии, применяемые при оценке точности наблюдений	84
§ 26. Связь средней квадратической ошибки со средней ошибкой	85
§ 27. Связь средней квадратической ошибки с вероятной ошибкой	86
§ 28. Использование соотношений между m , σ и g для оценки степени приближения действительного распределения к нормальному	87
§ 29. Свойства средней квадратической ошибки и точность ее определения	88
§ 30. Абсолютные и относительные ошибки	97
Глава VI. Оценка точности функций величин, полученных в результате зависимых и независимых наблюдений	98
§ 31. Постановка задачи	—
§ 32. Средняя квадратическая ошибка функции зависимых аргументов	100
§ 33. Средняя квадратическая ошибка функции независимых аргументов	103
§ 34. Примеры оценки точности функций	106
Глава VII. Математическая обработка результатов равнооточных наблюдений одной величины	111
§ 35. Простая арифметическая середина — наиболее надежное значение наблюдаемой величины	—
§ 36. Средняя квадратическая ошибка простой арифметической середины	115
§ 37. Отклонение результатов равнооточных наблюдений одной и той же величины от простой арифметической середины	117
§ 38. Средняя квадратическая ошибка одного наблюдения, вычисленная по отклонениям результатов равнооточных наблюдений от простой арифметической середины	119
§ 39. Порядок математической обработки ряда равнооточных наблюдений	122
Глава VIII. Математическая обработка результатов неравнооточных наблюдений одной величины	125
§ 40. Понятие о неравнооточных наблюдениях	—
§ 41. Общая арифметическая середина. Веса наблюдений	126
§ 42. Веса функций величин, полученных из зависимых и независимых наблюдений	130
§ 43. Отклонения результатов неравнооточных наблюдений от общей арифметической середины	133
§ 44. Средняя квадратическая ошибка единицы веса	134
§ 45. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, вычисленная по истинным ошибкам неравнооточных наблюдений	135
§ 46. Средняя квадратическая ошибка единицы веса, вычисленная по отклонениям результатов неравнооточных наблюдений от общей арифметической середины	137
§ 47. Порядок математической обработки ряда неравнооточных наблюдений	139
Глава IX. Оценка точности по разностям двойных наблюдений	143
§ 48. Постановка задачи	—
§ 49. Оценка точности по разностям двойных равнооточных наблюдений	144
§ 50. Оценка точности по разностям двойных неравнооточных наблюдений	147
§ 51. Примеры на оценку точности по разностям двойных наблюдений	150

П Р И Л О Ж Е Н И Я:

1. Таблица значений интеграла вероятностей $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \int_0^t e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot dx$	152
2. Таблица значений функции $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$	164
	183

3. Таблица значений функции $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}$ для вычисления ординат кривой нормального распределения по формуле $y = y' \cdot h$. . .	175
4. Таблица значений вероятностей для критерия χ_2	—
5. Таблица значений величин t_p , удовлетворяющих равенству $2C \int_0^{t_p} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot dt = p$	178
6. Таблица значений функции $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$	179
Литература	180

Большаков Василий Дмитриевич

ТЕОРИЯ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ
С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор П. А. Гайдас

Ведущий редактор издательства В. И. Бражников

Технический редактор В. В. Быкова

Корректор П. А. Денисова

Подписано к набору 6/I 1965 г. Подписано к печати 22/III 1965 г.

Формат 60 × 90/16. Печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 11,93.

Т-00791. Тираж 5300 экз. Зак. № 7/2062—15. Цена 52 коп. Индекс 1—1—1.

Объявлено в сводном темплане издательства «Недра» 1965 г. № 562.

Издательство «Недра». Москва, К-12, Третьяковский пр., 1/19.

Ленинградская типография № 14 «Красный Печатник» Главполиграфпрома

Государственного комитета Совета Министров СССР по печати. Московский проспект, 91.

З а м е ч е н н ы е о п е ч а т к и

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
104	8 снизу	$m_u^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \cdot m_x$	$m_u^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \cdot m_x^2$
107	10 снизу	$+ \left(-\frac{xyz}{th^2}\right) m_h^2$	$+ \left(-\frac{xyz}{th^2}\right)^2 m_h^2$
130	4 сверху	ρ_i	$\rho'_i (i=1, 2, \dots, n)$
133	2 снизу	Выше (§ 42)	Выше (§ 41)
175	2 сверху	$y' = \frac{1}{\pi} e^{-h^2 \Delta^2}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$

Заказ № 7/2062—15.