

## Глава. 15. Гравитационное поле Земли.

В главе 15 приведена информация о гравитационном поле Земли. Рассмотрены такие вопросы как: гравитационный потенциал точки, тела и его свойства, гравитационное поле шара и планет, потенциал силы тяжести и фигуры равновесия небесных тел. В главе 7 обсуждаются проблемы гравитационных аномалий и строения Земли, изостазия, приливы и вариации силы тяжести, а также эффект Этвеша и устройство гравиметров. В главу включен раздел, в котором обсуждается проблема, как изменялось гравитационное поле Земли в прошлом.

### 15. 1. Гравитационный потенциал.

Потенциалом называется работа, которую нужно совершить, которую нужно совершить, чтобы переместить данную материальную точку с массой, равной единице, из заданной точки в бесконечность. Пусть  $F$  есть вектор-сила, приложенная к материальной точке,  $r$ - радиус-вектор этой точки. Тогда потенциалом будет величина

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} F^T dr \quad (15.1)$$

Введем понятие силовой функции  $V(r)$ . По определению частная производная силовой функции вдоль любого направления равна компоненте силы вдоль этого направления. Отсюда следует, что

$$F^T dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Таким образом, подынтегральное выражение в формуле (15.1) есть не что иное, как полный дифференциал силовой функции, поэтому

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} dV(r) = V(\infty) - V(r)$$

Силовую функцию на бесконечности можно приравнять нулю, поэтому будем считать, что потенциал и силовая функция отличаются лишь знаком.

В *гравиметрии*, как разделе геофизики, традиционно не разделяют эти два понятия, и под термином гравитационный потенциал обычно понимают силовую функцию. В нашем курсе мы также будем придерживаться этих традиций.

**Гравитационный потенциал материальной точки.** Согласно закону Ньютона, две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Выберем систему координат так, чтобы одна из материальных точек оказалась в начале этой системы. Тогда другая материальная точка будет иметь радиус-вектор  $r$ . Вектор напряженности гравитационного поля в точке с радиус-вектором  $r$  равен силе, которая действует на материальную точку с массой, равной единице. Вектор этой силы можно изобразить следующим образом  $F = -Gmr/r^3$ , где  $G$ - гравитационная постоянная. Проекции этой силы на оси декартовой системы координат будут равны

$$F_x = - Gmx/r^3 \quad F_y = - Gmy/r^3 \quad F_z = - Gmz/r^3.$$

Абсолютная величина этого вектора, равна

$$|F| = Gm/r^2. \quad (15.2)$$

Заметим, что размерность напряженности поля тяготения совпадает с размерностью ускорения, поэтому часто вместо силы притяжения единицы массы, или *удельной силы притяжения* говорят об *ускорении силы притяжения*.

Формулу (15.2) еще называют как закон обратных квадратов. Весь опыт небесной механики говорит о том, что в масштабах Солнечной системы он работает очень хорошо:

не найдено каких либо подозрений, что его нужно подправлять. Лабораторные эксперименты по определению гравитационной постоянной  $G$  дали повод подозревать, что этот закон не абсолютно строг. Хотя причиной несоответствия теории и практики вполне могли быть и неизвестные систематические погрешности. В конце минувшего века наблюдался повышенный интерес к закону обратных квадратов. В разных странах проводились эксперименты и применялись современные самые высокоточные инструменты для обнаружения каких-либо невязок между теорией и практикой. Однако никаких значимых расхождений не обнаружено.

Нетрудно убедиться, что гравитационный потенциал точки (силовая функция) равен,  $V(r) = Gm/r$ , где  $r$ - расстояние между притягивающимися точками (скалярная величина).

**Гравитационный потенциал тела.** Строго говоря, закон обратных квадратов работает только для материальных точек. Однако физики-теоретики и экспериментаторы доказывают, что для гравитационного поля выполняется *принцип суперпозиции*: гравитационное поле двух материальных точек (или тел) равно сумме гравитационных полей каждой из этих точек (или тел) по отдельности. Иначе говоря, силы тяготения не экранируются.

Согласно принципа суперпозиции, гравитационный потенциал  $n$  точек равен сумме гравитационных потенциалов всех точек

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left( \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2 + \frac{y^2 + z^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$V = G \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right) = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$$

Если точек бесконечное число, а массы их бесконечно малы, то имеем дело с интегральной суммой, и нашу формулу следует записать так

$$V = G \int \frac{dm}{r \rho} \quad (15.3)$$

где  $\rho$  - расстояние между фиксированной точкой  $P$  элементом притягивающей массы  $dm$ . Пусть  $x, y, z$  - координаты точки  $P$ , а  $\xi, \eta, \zeta$  - координаты текущей точки с массой  $dm$  тогда формулу (15.3) можно переписать следующим образом:

$$V(x, y, z) = G \int \frac{dm(\xi\eta\zeta)}{r \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \quad (15.4)$$

Приведенный интеграл берется по всему объему тела, это трехкратный интеграл. Его величина зависит от распределения плотностей внутри тела.

## 15. 2. Свойства гравитационного потенциала.

Отметим некоторые свойства потенциала притяжения. Гравитационный потенциал тела регулярен на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = Gm$$

это можно понять, рассуждая следующим образом. Гравитационный потенциал тела, удаленного на большое расстояние от точки, в которой нас интересует значение потенциала, то же, что и потенциал материальной точки, так как все детали строения тела и его форма на больших расстояниях становятся не существенными. Остается лишь масса тела.

Гравитационный потенциал  $V(x, y, z)$  непрерывен вместе со своими *первыми* производными всюду как вне тела, так и внутри его. Несколько позже, на примере шара, мы это продемонстрируем.

Вторые производные потенциала при переходе через поверхность шара терпят разрыв. Это свойство также покажем на примере шара.

Гравитационный потенциал вне притягивающего тела подчиняется уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Покажем это. Поскольку

$$\rho^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

то 
$$\frac{\partial}{\partial x}(1/\rho) = -1/\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{(x - \zeta)}{\rho^3},$$

далее 
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/\rho) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - \zeta}{\rho^3}\right) = 3\frac{(x - \zeta)}{\rho^4} \frac{\partial \rho}{\partial x} - (1/\rho^3) = 3\frac{(x - \zeta)^2}{\rho^5} - (1/\rho^3),$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/\rho) = 3\frac{(z - \eta)^2}{\rho^5} - (1/\rho^3): \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/\rho) = 3\frac{(z - \xi)^2}{\rho^5} - (1/\rho^3).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/\rho) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/\rho) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/\rho) = 3\frac{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2}{\rho^5} - (3/\rho^3) = 0.$$

Для записи уравнения Лапласа используют линейный оператор вида

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Из только что сделанных выкладок следует, что  $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$ . Теперь обратимся к формуле

(15.3). Используя операторную форму записи, получим:

$$\Delta V(x, y, z) = G \int_T \Delta(1/\rho) dm = 0.$$

Гравитационный потенциал тела в точке, расположенной внутри тела подчиняется уравнению Пуассона:

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma.$$

Легко видеть, что уравнение Пуассона является обобщением уравнения Лапласа, ибо в частном случае, в точке, где плотность  $\sigma$  равна нулю, то есть, где нет гравитирующих масс, потенциал подчиняется уравнению Лапласа.

### 15. 3. Гравитационный потенциал шара.

Все планеты Солнечной системы имеют сферическую форму. Поэтому имеет смысл определить гравитационный потенциал шара. Для упрощения задачи, мы будем предполагать, что плотность шара зависит только от расстояния до его центра Нетрудно убедиться, что такой шар притягивает точно так же, как и материальная точка с массой равной массе шара и помещенная в его центр. Чтобы в этом убедиться, необходимо для формулы (15.4) выбрать такую систему координат, с помощью которой было бы удобно выполнять интегрирование.

Для начала, представим себе, что точка  $P$  находится вне шара. Соединим эту точку с центром шара (точка  $O$ ), полученный радиус-вектор обозначим через  $r$ . Радиус-вектор элемента массы  $dm$  будем обозначать буквой  $r'$ . Следовательно, расстояние между элементом массы и точкой  $P$ , которое мы обозначили греческой буквой  $\rho$ , будет иметь вид  $\rho = \sqrt{r'^2 + r^2 + 2rr'\cos\varphi}$ , где  $\varphi$ - угол с вершиной в центре шара, образованный радиус-векторами  $r$  и  $r'$ . Наконец, элемент массы  $dm$  определяется произведением плотности на

объем элементарно малого параллелепипеда со сторонами  $dr'$ ,  $r'd\varphi$ , и  $r'\sin\varphi dA$ . Здесь мы ввели еще одну степень свободы - поворот вокруг оси  $OP$  на угол  $dA$ . Таким образом,  $dm = \sigma(r'\sin\varphi dA)(r'd\varphi)dr' = \sigma(r'^2)\sin\varphi dr'd\varphi dA$

Теперь вместо формулы (15.4) записать

$$V(r) = G \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(r') \frac{(r'\sin\varphi)}{\rho} dr' d\varphi dA \quad (15.5)$$

Заменим переменную интегрирования  $\varphi$  на  $\rho$ . Определим пределы интегрирования. Очевидно, что вместо 0 и  $\pi$  нужно взять  $r-r'$  и  $r+r'$ , а  $\rho d\rho = rr'\sin\varphi d\varphi$ . Переменную  $A$  подынтегральное выражение не содержит, поэтому внутренний интеграл легко берется.

Вместо (15.5) теперь будем иметь

$$V(r) = 2\pi G \int_0^R \int_{r-r'}^{r+r'} \sigma(r') \frac{r'^2 \rho d\rho}{\rho r r'} d\rho dr' = \frac{4\pi G}{r} \int_0^R \sigma(r') r'^2 dr' \quad (15.6)$$

Нетрудно догадаться, что  $4\pi\sigma(r')r'^2 dr'$  есть масса бесконечно тонкой сферы  $dM$ , поэтому

$$V(r) = \frac{G}{r} \int_0^R dM = \frac{MG}{r} \quad (15.7)$$

Таким образом, мы пришли к очень важному выводу: шар со сферически симметрично распределенной массой притягивает так же, как и материальная точка с массой равной массе шара и помещенной в его центре.

**Потенциал шара во внутренней точке.** Рассмотрим сначала бесконечно тонкий шаровой слой с внутренней полостью, не содержащей массы. Тогда можно доказать, что внутри этой полости потенциал (силовая функция) есть постоянная величина, то есть этот шаровой слой внутреннюю точку не притягивает. Обратимся к рисунку. Через точку  $P$  проведем коническую поверхность с вершиной в этой точке. Тогда эта поверхность вырежет на сферической поверхности элементарную площадку  $dS_1$ , а на другой стороне сферы - элементарную площадку  $dS_2$ . Точка  $P$  лежит под площадкой  $dS_1$  на расстоянии  $r_1$  и испытывает со стороны этой площадки притяжение, равное  $\mu dS_1 r_1^{-2}$ , где  $\mu$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от поверхностной плотности этого шара и от направления внешней нормали к площадке по отношению к радиусу-вектору точки  $P$ . Элементарная площадка  $dS_2$  расположена на расстоянии  $r_2$  от точки  $P$ . Поскольку обе площадки видны из точки  $P$  под одним и тем же телесным углом, то  $\mu dS_1 r_1^{-2} = \mu dS_2 r_2^{-2}$ .

Итак, обе силы равны и направлены в противоположные стороны. Теперь будем рассуждать следующим образом. Через точку  $P$  проведем плоскость перпендикулярную радиус-вектору этой точки. Она разделит сферический "пузырь" на две части, назовем их условно верхнюю и нижнюю. Поскольку каждую из частей можно представить как бесконечную сумму элементарных площадок, то для каждой элементарной площадки верхней полусферы найдется симметричная ей площадка в нижней полусфере. Силы притяжения материальной точки, помещенной в точку  $P$ , со стороны верхней и нижней полусфер равны и противоположны по направлению. Отсюда вывод: материальная точка, помещенная внутри полой сферы, этой сферой не притягивается

Рассуждения, приведенные здесь, нельзя считать строго математически обоснованными. Мы рассчитываем больше на интуицию, чем на строгую математическую логику. Однако, в теории потенциала притяжения математически строго доказано, что оболочка не притягивает материальную точку и в случае, когда эта оболочка имеет эллипсоидальную форму.

Мы показали, что гравитационный потенциал в полости, окруженной сферической поверхностью, является постоянной величиной. Однако это имеет место лишь в том случае, когда эта полость притягивающих масс не содержит. Теперь откажемся от этого условия, и будем считать, что шар не полый, но плотность зависит только от расстояния

до центра шара. Проведем через точку  $P$  сферу так, что она разделит шар на внутренний шар с массой  $m$  и шаровой слой с массой  $M - m$ . Материальная точка будет притягиваться только внутренним шаром, так как шаровой слой, как мы видели, внутреннюю точку не притягивает. Поэтому гравитационная сила в точке  $P$  направлена в центр шара и равна  $F = -Gm(r)/r^2$ .

Знак "минус" мы поставили, чтобы подчеркнуть, что сила направлена в сторону, противоположную радиус-вектору. Массу внутреннего шара можно получить, интегрируя массу бесконечно тонкой сферы в пределах от 0 до  $r$ :

$$V(0) = 4\pi G\sigma \frac{R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma G \frac{3}{2R} = \frac{3}{2} \frac{MG}{R} = \frac{3}{2}V(R)$$

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \sigma(r')r'^2 dr' \quad (15.8)$$

Поскольку  $F(r) = dV(r)/dr$ , то для гравитационного потенциала во внутренней точке шара получим:

$$dV(r)/dr = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \sigma(r')r'^2 dr'$$

Интегрируя, будем иметь

$$V(r) = -G \int_0^r \frac{m(r)}{r^2} dr + C,$$

где  $C$  - постоянная интегрирования. Полученное выражение можно проинтегрировать по частям.

$$V(r) = Gm(r) \frac{1}{r} - G \int_0^r \frac{1}{r} \frac{dm(r)}{dr} dr \Big|_0^r + C$$

Согласно формуле (7.8):  $dm(r)/dr = 4\pi\sigma r^2$ , поэтому

$$V(r) = Gm(r) \frac{1}{r} - G \int_0^r 4\pi\sigma r dr + C.$$

Определим теперь постоянную  $C$ . Мы знаем, что  $V(R) = GM/R$ , поэтому

$$V(r) = \frac{GM}{R} - G \int_0^R 4\pi\sigma r dr + C = \frac{GM}{R}.$$

Следовательно

$$C = G \int_0^R 4\pi\sigma r dr$$

Окончательно, формула для гравитационного потенциала во внутренней точке шара со сферически симметричной распределенной массой принимает вид

$$V_2(x, y, z) = \frac{G}{2r^3} (A + B + C + 3I)$$

$$V(r) = \frac{Gm(r)}{r} + 4\pi G \int_r^R \sigma(r')r' dr', r \leq R \quad (15.9)$$

При переходе через поверхность потенциал сохраняет непрерывность. Очевидно, что при  $r = R$ , будем иметь  $V(R) = GM/R$  - потенциал точки с массой, равной  $M$ , расположенной в центре шара. В случае, когда точка  $P$  находится в центре шара, то есть при  $r \rightarrow 0$ ,  $m(r)/r \rightarrow 0$ , а

$$V(0) = 4\pi G \int_0^R \sigma(r')r' dr',$$

то эта величина зависит от закона изменения плотности с глубиной. В частности, если шар - однородный, то его потенциал в центре шара равен

$$V(0) = 4\pi G\sigma \frac{R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma G \frac{3}{2R} = \frac{3}{2} \frac{MG}{R} = \frac{3}{2} V(R). \quad (15.10)$$

Отсюда следует вывод, что гравитационный потенциал в центре однородного шара в полтора раза больше, чем на его поверхности.

**Гравитационный потенциал однородного шара.** Гравитационный потенциал однородного шара во внешней точке ничем не отличается от потенциала шара, со сферически симметричным распределением массы, поэтому мы этот случай рассматривать не будем. Гравитационный потенциал однородного шара во внутренней точке может быть вычислен по формуле (15.9), в которой нужно положить плотность постоянной величине. Имеем:

$$m(r) = 4\pi\sigma \frac{r^3}{3},$$

$$\int_r^R \sigma r' dr' = \frac{\sigma}{2}(R^2 - r^2),$$

следовательно:

$$V(r) = \frac{Gm(r)}{r} + 4\pi G\sigma \frac{1}{2}(R^2 - r^2) = \frac{2}{3}\pi G\sigma(3R^2 - r^2). \quad (15.11)$$

В центре шара ( $r = 0$ )  $V(0) = 2\pi G\sigma R^2$  - значение, совпадающее с приведенным значением в формуле (15.10). На его поверхности  $V(R) = GM/R$ .

Определим силу притяжения во внутренней точке:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi Gr \quad (15.12)$$

Таким образом: сила притяжения внутренней материальной точки со стороны масс сферического тела линейно растет по абсолютной величине с расстоянием от центра шара и направлена к его центру. Другими словами, закон Ньютона, или, как еще его называют, закон обратных квадратов, превращается в закон Гука - закон прямой пропорциональности "упругой" силы от величины отклонения тела от положения равновесия.

Нужно отметить, что если равномерно распределенная притягивающая масса занимает объем, ограниченный эллипсоидальной поверхностью, то и в этом случае вместо закона Ньютона следует брать закон Гука.

Покажем теперь, что во внутренней точке гравитационный потенциал подчиняется закону Пуассона:

$$\Delta V(P) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\sigma,$$

где  $\sigma$  - плотность вещества в точке  $P$ .

Будем считать, что мы имеем дело с произвольным телом, ограниченным замкнутой поверхностью  $S$ . Выделим внутри него фиксированную точку  $P$  и окружим ее сферой  $\Sigma$  с очень маленьким радиусом, с тем, чтобы плотность малой сферы считать постоянной величиной. Пусть  $V$  - потенциал всех масс тела в точке  $P$  за исключением малой сферы,  $V_\Sigma$  - потенциал малой сферы, тогда:

$$V(P) = V'(P) + V_\Sigma(P).$$

Потенциал  $V'(P)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, так как точка  $P$  является внешней по отношению к рассматриваемой области, а для потенциала во внутренней точке однородного малого шара мы получили:

$$V_\Sigma(P) = \frac{2\pi}{3} G\sigma(3\rho^2 - r^2)$$

где  $\rho$  - радиус малой сферы. Определим оператор Лапласа для гравитационного потенциала в точке  $P$ . Учитывая сказанное выше, будем иметь

$$\Delta V(P) = \Delta V_{\Sigma}(P) = -\frac{2}{3}\pi\sigma G\Delta r^2.$$

Поскольку  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , то  $\Delta r^2 = 6$ , следовательно,  $\Delta V(P) = -4\pi G\sigma$ , а это и есть уравнение Пуассона.

При переходе точки  $P$  через поверхность, где плотность изменяется скачком, изменится скачкообразно и правая часть уравнения Пуассона, левая часть которого представляет собой сумму вторых производных. Отсюда следует и разрыв непрерывности вторых производных гравитационного потенциала.

#### 15. 4. Гравитационное поле планеты.

Все планеты Солнечной системы имеют форму, близкую к сферической. Поэтому, гравитационное поле шара можно рассматривать, как первое приближение к гравитационному полю планеты. Во втором приближении можно учесть тот факт, что некоторые планеты, в том числе и Земля, гораздо лучше могут быть представлены эллипсоидом вращения, чем шаром. В третьем приближении мы можем учесть и некоторые особенности в распределении масс внутри планеты и т.д. Короче говоря, гравитационное поле планеты обычно представляют рядом по шаровым функциям. В зависимости от решаемой задачи, предъявляются разные требования к детальности исходных данных, к числу членов разложения и к числу исходных параметров.

Итак, будем считать, что наша фиксированная точка  $P$ , в которой нам необходимо получить гравитационный потенциал планеты, - внешняя. Снова, как и в приведенных выше формулах, будем считать, что вектор  $r$  определяет координаты фиксированной точки  $P$ , а абсолютная величина этого вектора - расстояние точки  $P$  от начала координат. Радиус-вектор элемента массы  $dm$  мы снова будем обозначать буквой  $r'$ . Расстояние между фиксированной точкой  $P$  и элементом массы  $dm$  - буквой  $\rho$ . Интегрирование по объему тела планеты мы будем помечать нижним пределом  $T$ . Запишем гравитационный потенциал планеты в виде интеграла:

$$V(P) = G \int_T \frac{dm}{\rho} = G \int_T \frac{dm}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi}}. \quad (15.13)$$

Поскольку точка  $P$  лежит вне планеты и, как правило, достаточно далеко от нее удалена, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по степеням отношения  $r'/r$ . Мы тут же столкнемся с так называемыми полиномами Лежандра, на некоторых сведениях о их свойствах необходимо остановиться.

Функцией, производящей полиномы Лежандра, называется функция

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\alpha),$$

где  $P_n(\alpha)$  - полиномы Лежандра степени  $n$ . Вот несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_0(\alpha) = 1$$

$$P_1(\alpha) = \alpha$$

$$P_2(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1)$$

$$P_3(\alpha) = \frac{1}{2}(5\alpha^3 - 3\alpha)$$

.....

Каждый следующий полином можно вычислить, пользуясь рекуррентной формулой

$$(n+1)P_{n+1}(\alpha) = (2n+1)\alpha P_n(\alpha) + nP_{n-1}(\alpha)$$

Существует и общая формула для полиномов Лежандра. Это так называемая формула Родрига:

$$P_n(\alpha) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\alpha^2 - 1)^n}{d\alpha^n}$$

Вернемся снова к нашему интегралу (3.13). Вынесем из под корня величину  $r$ , получим:

$$V(P) = \frac{G}{r} \int_T \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos \phi \right)^{-1/2} dm$$

Под знак интеграла теперь входит производящая функция полиномов Лежандра. Разлагая подынтегральное выражение в степенной ряд относительно отношения  $r'/r$ , будем иметь:

$$V(P) = \frac{G}{r} \int_T \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \phi) dm. \quad (15.14)$$

Представим полученное разложение в виде:

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(P),$$

где

$$V_n(P) = \frac{G}{r^{n+1}} \int_T (r')^n P_n(\cos \phi) dm. \quad (15.15)$$

Полученный ряд называют рядом Лапласа, а соответствующие функции  $V_n(P)$  - *функциями Лапласа*. Используется и другая терминология. Функции Лапласа могут быть определены через гармонические (удовлетворяющие уравнению Лапласа) однородные полиномы, которые носят название *шаровых функций*. Поэтому ряд (15.14) после выполнения указанного интегрирования, называют *разложением гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям*.

Определим первые три функции Лапласа. Чтобы выполнить интегрирование, нам нужно выбрать системы координат. Допустим, что точка  $O$  - начало декартовой системы координат. Направления осей, в принципе, не имеют значения. Координаты фиксированной точки  $P$  мы будем обозначать через  $x, y, z$ , а для элемента массы  $dm$  - координаты  $\zeta, \eta, \xi$ . Таким образом, вектор  $r = (x, y, z)^T$ , а радиус-вектор элемента массы есть  $r' = (\zeta, \eta, \xi)^T$ .

*Первый член разложения.*

Согласно формуле (15.15), имеем:

$$V_0(x, y, z) = \frac{G}{r} \int_T dm = \frac{CM}{r}. \quad (15.16)$$

Полученная шаровая функция дает лишь массу планеты. Если ограничиваться только первым членом разложения, то это равносильно тому, что планета отождествляется с шаром со сферически симметрично распределенными массами или с материальной точкой.

*Второй член разложения*

Следующая шаровая функция имеет вид:

$$V_1(x, y, z) = \frac{G}{r^2} \int_T r' P_1(\cos \phi) dm$$

Поскольку  $P_1(\cos \phi) = \cos \phi$ , будем иметь:

$$V_1(x, y, z) = \frac{G}{r^3} \int_T r r' \cos \phi dm.$$

Подынтегральное выражение есть не что иное, как скалярное произведение двух векторов  $r'$  и  $r$ :  $r' r \cos \phi = r^T r'$ , поэтому:

$$V_1(x, y, z) = \frac{G}{r^3}(x, y, z) \int_T r' dm$$

Из теоретической механики известно, что последний интеграл определяет радиус-вектор центра масс:

$$\int_T r' dm = Mr_0' = M \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \eta_0 \\ \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, линейная шаровая функция выглядит следующим образом:

$$V_1(x, y, z) = \frac{GM}{r^3}(x\zeta_0, y\eta_0, z\xi_0) \quad (15.17)$$

В астрономических приложениях этот член разложения часто не принимают во внимание: предполагают, что начало системы координат выбрано точно в центре масс. Однако более детальный анализ гравитационных полей планет иногда приводит к выводу о смещении центра масс по отношению к геометрическому центру объема планеты.

*Третий член разложения*

Для  $n = 2$  получим:

$$V_2(x, y, z) = \frac{G}{r^3} \int_T r'^2 P_2(\cos \phi) dm = \frac{G}{2r^3} \int_T r'^2 P_2(3 \cos^2 \phi - 1) dm$$

Заметим, что  $r'^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \xi^2$ ,  $r'^2 \cos^2 \phi = 1/r^2(x\zeta + y\eta + z\xi)^2$

Поэтому:

$$V_2(x, y, z) = \frac{G}{2r^5} \int_T [3(x\zeta + y\eta + z\xi)^2 - (\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2)(x^2 + y^2 + z^2)] dm.$$

После необходимых преобразований, полученную формулу можно привести к виду:

$$V_2(x, y, z) = \frac{G}{2r^3}(A + B + C + 3I), \quad (15.18)$$

где использованы следующие обозначения:

*моменты инерции*

$$A = \int_T (\eta^2 + \zeta^2) dm$$

$$B = \int_T (\zeta^2 + \xi^2) dm$$

$$C = \int_T (\eta^2 + \xi^2) dm$$

*произведения инерции*

$$D = \int_T \eta\zeta dm$$

$$E = \int_T \zeta\xi dm$$

$$F = \int_T \eta\xi dm$$

$$(15.19)$$

$A$  - момент инерции планеты относительно оси, проведенной через начало координат и точку  $P$ . Определим направляющие косинусы точки  $P$ :  $l = \cos x^{\wedge} r$ ,  $m = \cos y^{\wedge} r$ ,  $n = \cos z^{\wedge} r$ . Как следует из теоретической механики,

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2(Dmn + Enl + Flm). \quad (15.20)$$

Таким образом, шаровая функция нулевой степени есть масса планеты (момент инерции нулевого порядка), первой степени определяется через координаты центра масс (момент инерции первого порядка) шаровая функция второй степени определяется через моменты инерции второго порядка. Продолжая рассуждения, мы убедимся в том, с увеличением степени шаровой функции, увеличивается и порядок моментов инерции планеты, через которые эти шаровые функции определяются. Поэтому говорят, что члены разложения гравитационного потенциала высокого порядка определяются через мультипольные моменты ее массы.

В задачах небесной механики часто используются следующие упрощения представления гравитационного потенциала, в предположении, что

- начало координат совпадает с центром масс,
- направления осей параллельны главным осям инерции,
- фигура планеты - тело вращения.

При этих предположениях координаты центра масс и произведения инерции равны нулю, а  $A = B$ . Выберем декартову систему координат следующим образом: ось  $Oz$  совпадает с осью вращения фигуры, а оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в экваториальной плоскости. Тогда

$$I = A(l^2 + m^2) + Cn^2.$$

Однако,  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , поэтому  $I = A + (C - A)n^2$ . Подставляя это выражение в формулу для шаровой функции второй степени, получим:

$$V_2 = \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3n^2).$$

Как мы видели, величина  $n$  равна косинусу угла между осью вращения планеты и направлением на точку  $P$ . Обозначим этот угол греческой буквой  $\theta$ , таким образом,  $n = \cos\theta$ ,

$$V_2 = \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\theta).$$

По определению полиномов Лежандра, имеем:

$$1/2(1 - 3\cos^2\theta) = P_2(\cos\theta),$$

поэтому

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right)$$

$$V_2 = \frac{G}{r^3}(C - A)P_2(\cos\theta).$$

Если ограничиться только этими членами разложения, то гравитационный потенциал планеты можно записать в виде:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r} \left(1 - \frac{C - A}{r^2 M} P_2(\cos\theta)\right). \quad (15.21)$$

Формула (15.21) показывает, что напряженность гравитационного поля в точке  $P$  зависит не только от сферических координат этой точки: расстояния  $r$  и полярного расстояния (или широты)  $\theta$ , но и от отличия моментов инерции около полярной и экваториальных осей. В качестве фундаментальной постоянной поля планеты берут не разность  $C - A$ , которая зависит от массы и размеров планеты, а безразмерную величину  $J_2 = (C - A)/Ma^2$ .

Теперь вместо формулы (15.21) можно записать:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right). \quad (15.22)$$

Принимая во внимание другие члены разложения потенциала, но сохраняя главное условие - внутреннее строение планеты соответствует телу вращения - мы можем получить формулу для гравитационного потенциала, содержащую полиномы Лежандра более высоких степеней:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right). \quad (15.23)$$

Коэффициенты разложения  $GM$  и  $J_2$  относятся к *фундаментальным постоянным астрономии*.

В качестве характеристики планеты используют также *безразмерный момент инерции*, который определяется следующим образом:  $I^* = C/Ma^2$ . Эта величина малая, если почти вся масса планеты сосредоточена в ее центре, она равна 0.4, если планета -

однородный шар. Реально  $0.0 < I^* < 0.4$ . Любопытно, что американский ученый Экхард для Луны определил  $I^* > 0.4$ , что означает Луна внутри пустая! Более поздние определения безразмерного момента инерции Луны установили, что он равен 0.391, что указывает на ее однородность, но никаких противоречий с установившимися взглядами на строение планет нет. Еще одна фундаментальная постоянная, также связанная с моментами инерции, - постоянная прецессии  $H = (C - A)/C$  играет важную роль в теории вращения планеты.

В заключении раздела приведем численные значения фундаментальных постоянных для некоторых планет и Луны.

Фундаментальные постоянные планет			
Планеты	$GM, км^3 с^{-2}$	$I^*$	$J_2$
Земля	398600,5±0,3	0,332	0.001082645
Меркурий	22032±0,324		
Венера	324859,6±0,5	0,332	0,00000597
Марс	42828,3±0,1	0,377	0,0008746
Юпитер	126687000±500	0,200	0,022060
Сатурн	37938000±200	0,220	0,025010
Уран	5786700±1500	0,230	
Нептун	6859000±8000	0,290	
Плутон	900±300		
Луна	4902,63±0,07	0,391	0,00009152

Реально гравитационное поле во внешнем пространстве зависит не только от полярного расстояния или широты точки  $P$ , но и от ее долготы - от угла между плоскостью меридиана, в которой лежит точка  $P$ , и плоскостью нулевого меридиана. Для Земли - это гринвичский меридиан. Пусть  $\varphi$  - широта, а  $\lambda$  - долгота точки  $P$ . Учитывая, что  $\varphi = \pi/2 - \theta$ , в приведенных формулах функцию  $\cos \theta$ , которая входит в качестве аргумента для полиномов Лежандра, мы должны заменить на  $\sin \varphi$ . Не останавливаясь подробно на выводе формулы разложения гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям, приведем готовый результат:

$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} \left( \frac{a}{r} \right)^{2k} P_{2k}(\sin \varphi) \right)$$

$$V(\varphi, \lambda, r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{mn} \cos m\lambda + S_{mn} \sin m\lambda) P_n^m(\sin \varphi). \quad (15.24)$$

Функции  $R_{mn}(\varphi, \lambda) = \cos m\lambda P_n^m(\sin \varphi)$  и  $S_{mn}(\varphi, \lambda) = \sin m\lambda P_n^m(\sin \varphi)$  называются *сферическими*, так как значения их зависят только от положения точки на сфере (заданы широта и долгота). Параметры  $n$  и  $m$  соответственно называются степенью и порядком отдельной *сферической гармоник*. Функция  $P_n^m(\sin \varphi)$  называется *присоединенной (ассоциативной) функцией Лежандра*. Она определяется через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (15.25)$$

Обратим внимание на внутреннюю сумму в формуле (15.24). Ее верхний предел равен  $n$ , так как при  $m > n$  порядок производной  $m$  в формуле (15.25) будет больше степени полинома  $n$  и все соответствующие члены будут равны нулю.

Гармоники называются *зональными*, если их значения изменяются только с широтой. Это будет иметь место при  $m = 0$ . Внутри одной зоны, отделенной от других с севера и с юга параллелями, зональная гармоника сохраняет свой знак.

Гармоники называются *секториальными*, если их знак может изменяться только с долготой. Это имеет место при  $n = m$ . Присоединенная функция Лежандра, при этом, равна:

$$P_n^n(\sin \varphi) = \cos^n \varphi \frac{d^n P_n(\sin \varphi)}{(d \sin \varphi)^n} = \cos^n \varphi \text{Const}$$

Поскольку косинус широты не меняет знака, то внутри одного сектора не изменяет знака и сферическая гармоника. Шар оказывается расчлененным на сектора - полосы, которые соединяют северный и южный полюса.

Гармоники, для которых  $0 < m < n$  на поверхности шара образуют мозаичную картину, подобно шахматной доске и называются *тессеральными* от латинского tessera - мозаичный кубик. Секториальные и тессеральные гармоники при вращении планеты создают во внешнем пространстве переменное во времени гравитационное поле, что значительно осложняют теорию движения искусственных и естественных спутников планеты.

**Определение массы планеты.** Первый член разложения гравитационного потенциала имеет вид  $GM/r$ . Если бы другие члены разложения не оказывали никакого действия на движение спутников, или, хотя бы возмущения от них были за пределами точности наблюдения, движение спутника подчинялось бы закону Кеплера.

Пусть  $M$  - масса планеты, которую нужно определить,  $m$  - масса спутника. Под действием сил притяжения, подчиняющихся закону обратных квадратов, оба небесных тела движутся по эллиптическим орбитам, в фокусе каждой из них расположен центр масс системы (барицентр). В частном случае - это могут быть и круговые орбиты. Для упрощения вопроса именно этот случай мы и будем рассматривать. Пусть  $l$  - расстояние спутника от планеты,  $a$  - расстояние спутника от барицентра, тогда  $l + a(1 + m/M)$ . Двигаясь по круговой орбите, спутник имеет ускорение, равное  $F/m = \omega^2 a = GM/l^2$ , где  $\omega = 2\pi/T$ , а  $T$  - период обращения спутника. Отсюда:

$$GM = (2\pi/T)^2 al^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2$$

При  $m \ll M$  выражение в скобках можно не отличать от единицы и формулу для определения массы планеты переписать в следующем виде:

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} . \quad (15.26)$$

Полученная формула есть не что иное, как третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет, относятся так же, как кубы их расстояний до центрального тела (Солнца).

Формула (15.26) получена для частного случая кругового движения, хотя в небесной механике доказано, что она справедлива и для эллиптического движения. В этом случае под  $a$  нужно понимать большую полуось эллиптической орбиты.

Формула (15.26) дает возможность определить массу планеты только в том случае, когда гравитационная постоянная нам известна. Ее определяют с помощью физического эксперимента. К сожалению, точность этих экспериментов пока еще не достаточно высока, хотя со времени Кавендиша - английского ученого, который одним из первых определил гравитационную постоянную, точность ее определения выросла на два порядка за 150 лет. Сейчас принято  $G = (6,6726 \pm 0,0005) \cdot 10^{-11}$  СИ. Произведения гравитационной

постоянной на массу определяются значительно точнее. Например, для Земли эта величина равна  $398600,5 \pm 0,3$ , то есть относительная погрешность равна  $10^{-6}$ , тогда как относительная погрешность гравитационной постоянной составляет приблизительно  $10^{-4}$ . В качестве фундаментальных постоянных часто рассматривают именно произведения масс на гравитационную постоянную, которые называют *планетоцентрическими гравитационными постоянными* (*геоцентрическая, селеноцентрическая, ареоцентрическая и т.д.*)

**Определение характеристик гравитационного поля Земли.** Чем детальнее нам нужно знать гравитационное поле, тем большее число параметров определяют аналитическое выражение для силовой функции поля тяготения планеты. В эпоху, когда спутники еще были недоступны, основным методом исследования гравитационного поля был гравиметрический. Гравиметрия - область геофизики, изучающая способы наиболее высокоточного определения удельной силы тяжести и ее геологической интерпретации. Этой наукой занимаются как физики, механики так и геологи.

До 20-х годов XX столетия наука не располагала средствами для измерения удельной силы тяжести на морях и океанах с точностью достаточной, для ее геологического истолкования. В 1922-1929 гг. голландский ученый-геодезист Венинг-Мейнес разработал способ наблюдения колебаний маятников на слабо качающемся основании. Используя подводную лодку в качестве лаборатории, он совершил ряд плаваний в Юго-Восточную Азию, исследовал регион, содержащий островные дуги и глубоководные впадины. Идеи Венинг-Мейнеса были реализованы в Государственном астрономическом институте им. П.К. Штернберга профессором Л.В.Сорокиным. До Великой Отечественной войны Л.В.Сорокин с учениками совершил ряд плаваний на подводных лодках на Черном море, в Баренцовом, Охотском и Беринговом морях. Только война остановила эти исследования. Однако, после войны они вновь активизировались. Были разработаны и другие методы для измерения силы тяжести на обычных исследовательских судах, были изобретены морские гравиметры, способные измерять приращение силы тяжести с относительной точностью не хуже  $10^{-4}$ . В морских гравиметрических исследованиях после войны принимали активное участие и другие страны, в частности США, Англия, Германия, Франция, Италия и Япония. Они и сейчас продолжают активное исследование гравитационных полей акваторий, в особенности нефтегазоносных акваторий.

Накопился достаточно большой материал для определения модели гравитационного поля Земли как планеты. По мере накопления новых данных производилась ревизия этих моделей.

Одна из последних моделей гравитационного поля по геофизическим данным была построена в ГАИШ профессором Н.П. Грушинским.

Настоящую революцию в определении гравитационного поля планеты произвели первые запуски искусственных спутников Земли. Был отмечен резкий скачок в точности определения постоянной  $J_2$  - постоянной, ответственной за сжатие планеты - одним из основных параметров, необходимых для развертывания карт на Земной поверхности. Сейчас разработаны новые методы наблюдения ИСЗ, которые позволяют определить положение спутника с точностью  $\pm 2$  см. Возникло новое направление небесной механики, позволяющее по видимым неравенствам в движении спутника определять возмущающие силы - гравитационное поле планеты. Как известно обратные задачи динамики относятся к типу некорректных, теорию которых разработали ученые МГУ и успешно используются для решения задач - как геофизики, так и астрофизики.

Сейчас построено достаточно много моделей гравитационного поля Земли разной детальности и точности. Отмечено, что с увеличением степени и порядка разложения падает точность определения коэффициентов. Для описания регионального поля часто

прибегают к модели степени и порядка 36 (36x36). Наиболее детальная из известных моделей, по-видимому, модель, получившая шифр EGM-96 (360x360).

### 15. 5. Потенциал тяжести.

Термин тяжесть (по-английски gravity) указывает на то, что пробное тело и опора взаимодействуют. Первое давит на опору, второе дает отклик в виде реакции опоры. Эти две силы разной физической природы. Первая имеет гравитационное происхождение, а вторая - электромагнитное (упругая сила). Если бы тело находилось в покое, то обе силы были бы равны и противоположны по направлению. Однако, любое тело неподвижное относительно поверхности Земли, движется с ускорением, так как совершает вместе с Землей суточное вращение. По этой причине сумма сил, действующих на тело, не равна нулю. Результирующая направлена в сторону оси вращения и равна  $F = R\omega^2 \cos\varphi$ , где  $R$  - радиус Земли в сферическом приближении,  $\omega$  - угловая скорость вращения,  $\varphi$  - геоцентрическая широта пробного тела.

В теоретической механике широко используется принцип Даламбера: задачи динамики можно заменить задачами статики, если ввести в рассмотрения силы инерции - силы равные и противоположно направленные тем силам, которые создают ускорение системе отсчета. В частности, если пробное тело неподвижно на поверхности Земли, то к силе притяжения нужно добавить с обратным знаком ту силу, которая сообщает пробному телу центростремительное ускорение. Эта сила обычно называется центробежной. Подчеркнем, что никакой физической природы центробежная сила не имеет. Она вводится лишь для того, чтобы все задачи механики во вращающейся системе координат решать, не принимая во внимание неинерциальность системы отсчета, связанной с вращающейся поверхностью Земли.

Результирующая сил тяготения и центробежной силы получила название силы тяжести. Этот термин в физике и геофизике имеет разное толкование. В физике под силой тяжести понимается та сила, с которой тело, обладающее массой  $m$  притягивается к Земле. Если тело освободить от всех связей, то оно будет падать свободно с ускорением  $g$ . Тогда сила тяжести, сообщающая телу ускорение свободного падения, равна  $P = mg$ . Эта сила не может служить характеристикой гравитационного поля, так как зависит от массы пробного тела. Для того чтобы силу тяжести превратить в характеристику поля, необходимо пробное тело сделать стандартным, в геофизике обычно берут массу пробного тела равную единице. Другими словами, вместо силы тяжести для характеристики поля используют удельную силу тяжести, то есть силу, отнесенную к единице массы.

В качестве единицы измерения удельной силы тяжести берут не Ньютоны на килограмм, а миллигалы, единица, введенная Вихертом, и широко применяющаяся в геофизике. По размерности, удельная сила тяжести совпадает с ускорением. Единица измерения 1 Гал равна ускорению  $1 \text{ см/с}^2$ , 1 мГал соответствует ускорению  $10 \text{ мкм/с}^2$ . С повышением точности, уменьшаются и единицы измерения. В настоящее время существуют приборы, в которых изменение удельной силы тяжести измеряют в микрогалах (мкГал) и даже в наногалах.

Нужно сказать, что в русской литературе вместо длинного термина удельная сила тяжести чаще употребляется просто сила тяжести, по умолчанию предполагается, что масса пробного тела равна единице. Хотя в некоторых статьях, посвященных гравиметрическим вопросам, вместо термина сила тяжести применяют и ускорение свободного падения, и ускорение силы тяжести. В англоязычной литературе силу тяжести в нашем понимании называют просто gravity (тяжесть) или на немецком языке - schwehre, что тоже обозначает тяжесть. Мы будем придерживаться, в основном наших русских традиций, хотя иногда вместо силы тяжести будем говорить просто тяжесть (см. заголовок настоящего раздела).

Потенциал или силовая функция для силы тяжести состоит из двух частей:

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \Omega(x, y) \quad (15.27)$$

Здесь, снова, декартова система координат выбрана традиционно: ось  $Oz$  совпадает с осью вращения планеты, две другие оси лежат в экваториальной плоскости.

Гравитационный потенциал (силовую функцию для сил притяжения)  $V(x, y, z)$  мы рассмотрели в предыдущих разделах. Остается определить силовую функцию для центробежной силы ("центробежный потенциал")  $\Omega(x, y)$ . Поскольку вектор центробежной силы равен:

$$F_{\text{ЦБ}} = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0)^T,$$

нетрудно догадаться, что

$$\Omega(x, y) = 1/2 \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Поверхность  $W(x, y, z) = \text{Const}$  является поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью. Сила тяжести равна производной этого потенциала по вдоль внутренней нормали. Равенство нулю компоненты силы, касательной к поверхности, говорит о том, что эта поверхность является поверхностью уровня. Меняя значение постоянной для потенциала, мы получим семейство поверхностей, обладающих следующими свойствами:

- чем больше значение силы тяжести, тем ближе две соседние уровенные поверхности,
- две уровенные поверхности не пересекаются. Если бы они могли пересекаться, то в точке пересечения существовали бы две нормали, а следовательно и две силы тяжести, что невозможно.

## 15. 6. Фигуры равновесия небесных тел.

Все планеты Солнечной системы находятся в состоянии, близком к гидростатическому равновесию. Принято считать, что планеты с массой больше  $10^7$  т имеют шарообразную форму, потому что массы, слагающие тело планет, обладают свойством пластичности. Планеты приобретают форму, как если бы они были жидкими. В этом случае уровенная поверхность будет поверхностью планеты. В действительности поверхность планеты не совпадает с уровенной поверхностью. Эти отличия свидетельствуют об отклонениях от состояния гидростатического равновесия и являются предметом изучения геофизиков и геодезистов. Введены специальные термины для обозначения поверхностей уровня для планет. Эквипотенциальная поверхность Земли, по предложению Листинга, называется геоидом. По аналогии, уровенную поверхность для Луны называют селеноидом, уровенную поверхность Марса - ареоидом, и т.п

### **Основные теоремы:**

**Теорема Ляпунова.** Единственно устойчивой фигурой равновесия покоящейся жидкости является сфера. Следствием этой теоремы можно усмотреть шарообразность всех планет Солнечной системы.

**Теорема Пуанкаре.** Единственно возможным движением жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия, является равномерное вращение вокруг одной из главных осей инерции. Понятно, что в случае, когда планета близка к состоянию гидростатического равновесия, ее ось вращения почти совпадает с главной осью инерции.

**Теорема Лихтенштейна.** Фигура равновесия однородной жидкости всегда симметрична относительно плоскости, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к оси вращения. Эту теорему называют еще теоремой о существовании экватора.

Исследования показали, что потенциал притяжения гидростатически равновесной планеты содержит лишь четные зональные гармоники:

$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k} \left( \frac{a}{r} \right)^{2k} P_{2k}(\sin \varphi) \right), \quad (15.28)$$

причем мультипольные моменты  $J_{2k}$  убывают как  $J_2^k$ .

**Эллипсоид как фигура равновесия.** Как мы уже говорили, внутри однородного эллипсоида, как и для шара, сила притяжения подчиняется закону Гука: она прямо пропорциональна отклонению материальной точки от положения равновесия. В теории потенциала доказано, что силовая функция для внутренней точки имеет вид  $V(x, y, z) = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2$ . Тогда компоненты силы притяжения пропорциональны координатам притягиваемой точки  $F = -2(P_x, Q_y, R_z)^T$ . Здесь  $P, Q, R$  и  $V_0$  - постоянные, зависящие от плотности и параметров эллипсоида и не зависящие от координат точки. Приведем эти формулы без вывода:

$$\begin{aligned} V_0 &= abc\pi G\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(s)}, \\ P &= abc\pi G\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\Delta(s)}, \\ Q &= abc\pi G\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\Delta(s)}, \\ R &= abc\pi G\sigma \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\Delta(s)}, \end{aligned} \quad (15.29)$$

где  $\Delta(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$ .

Если притягиваемая материальная точка - внешняя, то для нее силовая функция сохраняет тот же вид, но  $V_0, P, Q, R$  перестают быть постоянными, а зависят от координат точки. Для их вычисления справедливы те же интегралы, что и для внутренней точки, но нижний предел не нуль, а величина  $v$ , которая выбирается таким образом, чтобы эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2 + v} + \frac{y^2}{b^2 + v} + \frac{z^2}{c^2 + v} = 1$$

проходил через заданную внешнюю точку.

Потенциал тяжести от потенциала притяжения отличается тем, что аддитивно содержит потенциал центробежной силы  $W(x, y, z) = V(x, y, z) + 1/2(x^2 + y^2)\omega^2$ . Подставляя сюда выражение для потенциала притяжения эллипсоида, получим

$$W(x, y, z) = V_0 + \left(\frac{1}{2}\omega^2 - P\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\omega^2 - Q\right)y^2 - Rz^2. \quad (15.30)$$

Если поверхность эллипсоида является поверхностью уровня, то такой эллипсоид будет гидростатически равновесным. Уравнением уровенной поверхности будет  $W(x, y, z) = W_0$ , где  $W_0$  - постоянная величина. Возникает вопрос, можно ли подобрать такую угловую скорость вращения для трехосного эллипсоида с заданными полуосями, чтобы его поверхность оказалась поверхностью уровня? Нетрудно убедиться, что нельзя.

Уравнением трехосного эллипсоида в данном случае будет выражение:

$$\left(P - \frac{1}{2}\omega^2\right)x^2 + \left(Q - \frac{1}{2}\omega^2\right)y^2 + z^2 = V_0 - W_0. \quad (15.31)$$

Определим большие полуоси:

$$\begin{aligned} a^2 &= (V_0 - W_0) / \left(P - \frac{1}{2}\omega^2\right), \\ b^2 &= (V_0 - W_0) / \left(Q - \frac{1}{2}\omega^2\right), \\ c^2 &= (V_0 - W_0) / R. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Очевидно, что если из первого уравнения мы определим угловую скорость, то совсем не обязательно, чтобы эта угловая скорость удовлетворяла второму уравнению. Тем не менее

специалистами в области теории фигур равновесия небесных тел доказано существование равновесных трехосных эллипсоидов, которые получили название эллипсоидов Якоби.

**Эллипсоид Маклорена.** В частном случае  $a = b$ , поэтому  $P = Q$ . Из уравнения (15.32) получим:

$$V_0 - W_0 = c^2 R, \quad \omega^2 = 2\left(\frac{a^2}{c^2 R} - P\right). D = \sqrt[3]{GM / \omega^2} \quad (15.33)$$

Полученные уравнения определяют постоянные  $W_0$  и  $\omega^2$ . По-видимому, для любых заданных полуосей эллипсоида вращения можно найти угловую скорость вращения, такую, что данный эллипсоид становится фигурой равновесия.

**Модель "планеты Роша".** Под "планетой Роша" мы будем понимать такую фигуру равновесия, в которой вся притягивающая масса сосредоточена в одной точке - центре масс, а вектор силы тяжести образуют векторная сумма силы притяжения и центробежной силы. Тогда уравнением "поверхности" такой планеты будет:

$$\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = W_0. \quad (15.34)$$

Рассмотрим, сначала, как выглядит поверхность уровня вблизи начала координат. В этом случае величину  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  можно считать малой, а  $W_0$ , наоборот, большой. Пренебрегая в (15.34) вторым слагаемым в левой части формулы, получим:  $r \approx W_0/GM$ . Это уравнение замкнутой поверхности, которая по мере приближения к началу координат становится все более похожей на сферу. Назовем ее псевдосферой.

По мере отдаления от начала координат в плоскости  $z = 0$  мы достигнем таких точек, в которых сила притяжения и центробежная сила становятся равными и противоположно направленными, то есть  $-GM/r^2 + \omega^2 r = 0$ . Отсюда  $r^3 = GM/\omega^2$ . Мы получили уравнение окружности с радиусом, равным  $D = \sqrt[3]{GM / \omega^2}$ . Понятно, что во всех точках этой окружности сила тяжести равна нулю.

Если двигаться дальше от начала координат, мы придем к варианту, когда  $x^2 + y^2$  будет большой величиной, а  $GM/r$ , наоборот, малой. Тогда пренебрегая первым членом в формуле (15.34), получим уравнение поверхности, близкой к круговому цилиндру  $x^2 + y^2 \approx 2W_0/\omega^2$ . Это уже разомкнутая поверхность уровня. Планеты с такой поверхностью существовать не могут.

Таким образом, гидростатически равновесная планета может существовать только внутри "полости Роша", где сила тяжести всюду отлична от нуля, и направлена по нормали внутрь этой поверхности. Поверхность такой планеты имеет овальную форму, сплюснутую с полюсов.

**Сфероид Клеро.** Сфероидом в геодезии называют поверхность вращения, близкую к сфере. В первом приближении в качестве уравнения сфероида можно принять:

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi). \quad (15.35)$$

Очевидно, что на экваторе  $r = a$ , а на полюсах  $\varphi = \pm\pi/2$ ,  $r = b = a(1 - \alpha)$ . Фигура, уравнение которой удовлетворяет формуле (15.35) обладает *сжатием*: полярный радиус ее меньше экваториального. Из определения следует, что  $\alpha = (a - b)/a$ .

Установим связь между коэффициентом  $J_2$  и сжатием планеты. Потенциал притяжения равен:

$$V(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right),$$

а потенциал тяжести –

$$W(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (15.36)$$

В приведенной формуле мы ограничились лишь коэффициентом  $J_2$ , отбросив все остальные мультипольные моменты, так как в случае гидростатически равновесной фигуры, они будут иметь более высокий порядок малости, чем постоянная  $J_2$ .

Введем обозначение  $\bar{q} = \omega^2 a / \frac{GM}{a^2} = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$ . Новая малая величина есть, грубо говоря, отношение центробежной силы на экваторе к силе притяжения. Следовательно  $\omega^2 r = \frac{GM}{a^3} \bar{q} r$ . Подставим полученное выражение в (15.36) и вынесем за общие скобки отношение  $GM/r$ :

$$W(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \bar{q} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \varphi \right). \quad (15.37)$$

Приравнявая полученное выражение постоянной  $W_0$ , получим уравнение сфероида.

**Теорема Клеро** устанавливает связь между параметрами сфероида, силой тяжести на его поверхности и коэффициентами разложения гравитационного потенциала.

**Сжатие сфероида Клеро.** Сравним формулу (15.37) с (15.35). Учитывая, что  $a, J_2, q$  - малые величины, запишем приближенное равенство:

$$\frac{GM}{r} \left( 1 - J_2 P_2(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \bar{q} \cos^2 \varphi \right) = W_0.$$

Решим полученное выражение относительно  $r$ :

$$r = \frac{GM}{W_0} \left( 1 - J_2 P_2(\sin \varphi) + \frac{1}{2} \bar{q} \cos^2 \varphi \right) \quad (15.38)$$

Чтобы отождествить полученную формулу с уравнением сфероида (15.35), примем во внимание, что:

$$P_2(\sin \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}, \quad \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi.$$

Поставляя эти равенства в (15.38), получим:

$$\begin{aligned} r &= \frac{GM}{W_0} \left( 1 - \frac{J_2}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{\bar{q}}{2} (1 - \sin^2 \varphi) \right) = \\ &= \frac{GM}{W_0} \left( \left( 1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\bar{q}}{2} \right) - \left( \frac{3}{2} J_2 + \frac{\bar{q}}{2} \right) \sin^2 \varphi \right) \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (15.38) и учитывая, что  $J_2$  и  $q$  - малые величины, получим:

$$a = \frac{GM}{W_0} \left( 1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\bar{q}}{2} \right), \quad \alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{\bar{q}}{2}. \quad (15.39)$$

Отсюда определяем постоянную  $W_0$ :

$$W_0 = \frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{1}{2} J_2 + \frac{\bar{q}}{2} \right). \quad (15.40)$$

Итак, первая часть теоремы Клеро устанавливает связь между сжатием равновесной планеты с первым коэффициентом зональной гармоники разложения гравитационного потенциала и угловой скоростью вращения планеты.

$$\alpha = \frac{1}{2}(3J_2 + \bar{q}), \text{ или подробнее: } \alpha = \frac{1}{2} \left( 3 \frac{C-A}{Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{GM} \right). \quad (15.41)$$

Вторая часть теоремы Клеро определяет зависимость силы тяжести на поверхности равновесной планеты от широты.

**Сила тяжести на поверхности сфероида Клеро.** Вернемся снова к формуле потенциала тяжести для сфероида (15.37). Для того чтобы получить силу тяжести, нам нужно потенциал продифференцировать по нормали к поверхности уровня. Однако, поскольку наш сфероид мало отличается от сферы, дифференцирование по нормали мы заменим дифференцированием по радиус-вектору, что значительно проще.

Обозначив производную по радиус-вектору буквой  $\gamma$ , получим:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\partial W(r, \varphi)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GM}{r} \left[ 1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) + \frac{\bar{q}}{2} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \varphi \right] \right) = \\ &= -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{3a^2}{r^2} J_2 P_2(\sin \varphi) - \bar{q} \frac{r^3}{a^3} \cos^2 \varphi \right) \approx \\ &\approx -\frac{GM}{a^2} (1 - \alpha \sin^2 \varphi)^{-2} (1 - 3J_2 P_2(\sin \varphi) - \bar{q} \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

С точностью до малых величин первого порядка будем иметь:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{GM}{a^2} \left( 1 + 2\alpha \sin^2 \varphi - \frac{3}{2} J_2 (3 \sin^2 \varphi - 1) - \bar{q} (1 - \sin^2 \varphi) \right) = \\ &= \frac{GM}{a^2} \left( \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{q} \right) + \left( 2\alpha - \frac{9}{2} J_2 + \bar{q} \right) \sin^2 \varphi \right) \approx \\ &\approx \frac{GM}{a^2} \left( \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{q} \right) \left( 1 + \left( 2\alpha - \frac{9}{2} J_2 + \bar{q} \right) \sin^2 \varphi \right) \right). \end{aligned}$$

Сила тяжести на экваторе, согласно полученной формуле, равна:

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{2} J_2 - \bar{q} \right), \quad (15.42)$$

а для любой широты:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi), \quad (15.43)$$

где  $\beta = 2\alpha - \frac{9}{2} J_2 + \bar{q}$ . С помощью (15.41) исключим  $J_2$ :  $3J_2 = 2\alpha - \bar{q}$ , то есть

$$\beta = \frac{5}{2} \bar{q} - \alpha. \quad (15.44)$$

Здесь  $\gamma_e = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \alpha - \frac{3}{2} \bar{q} \right)$ .

Формулами (15.43) и (15.44) мы и завершим изложение теоремы Клеро.

**Два предела сжатия для фигур равновесия.** Коснемся сначала истории нашего вопроса. И.Ньютон (1643-1727) для объяснения явления, которое заметили многие астрономы, отъезжающие в экспедиции для наблюдений солнечного затмения в экваториальную зону, астрономические часы маятникового типа отстают по сравнению с Парижской обсерваторией, где они строго выверялись, на 2,5 минуты в сутки. Ньютон предположил, что виной тому служит эллипсоидальная форма Земли и, естественно, ее суточное вращение. Предполагая, что Земля - однородный эллипсоид вращения, он получил, что сжатие земного эллипсоида должно быть равным  $1,25 q = 1:230$ .

Современник Ньютона Гюйгенс (1629-1695) решает ту же задачу, но другим путем. Он предположил, что силы притяжения направлены к центру, а эллипсоидальность

поверхности уровня возникает только за счет центробежной силы. Таким образом, если Ньютон в качестве фигуры равновесия брал эллипсоид Маклорена, то Гюйгенс - фигуру, которую мы назвали "планетой Роша". Он получил, что сжатие равно  $0.5q = 1:576$ . Результат, который значительно отличается от Ньютонской оценки сжатия.

$$\frac{1}{2}\bar{q} < \alpha < \frac{5}{4}\bar{q}.$$

Вернемся к теории Клеро. Согласно его теории сжатие равновесной планеты должно быть равно  $\alpha = \frac{1}{2} \left( 3 \frac{C-A}{Ma^2} + \bar{q} \right)$ . Первый предел сжатия получим, если примем Землю

однородным двухосным эллипсоидом, для которого  $C = \frac{2}{5}Ma^2$ ,  $A = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$ .

Отсюда:  $\frac{C-A}{Ma^2} = \frac{1}{5} \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ .

Но  $\alpha = \frac{a-b}{a}$ ,  $b = a(1-\alpha)$ ,  $\frac{C-A}{Ma^2} \approx \frac{2}{5}\bar{q}$ . Следовательно,  $(1 - \frac{3}{2}\frac{2}{5})\alpha = \frac{1}{2}\bar{q}$  и, наконец,

$$\alpha = \frac{5}{4}\bar{q}. \quad (15.45)$$

Мы получили то же значение, что и Ньютон, правда с точностью до первой степени сжатия.

Второй предел сжатия, мы получим, если будем считать все притягивающие массы шаром, тогда  $C = A$  и

$$\alpha = \frac{1}{2}\bar{q}. \quad (15.46)$$

Таким образом, реальное сжатие лежит между этими двумя пределами:

$$\frac{1}{2}\bar{q} < \alpha < \frac{5}{4}\bar{q}.$$

Для иллюстрации сказанного приведем сжатия некоторых планет Солнечной системы, а также их возможные предельные значения.

Сравнивая значения сжатия, мы видим, что фигура планеты в значительной степени зависит от ее внутреннего строения. Планеты Земля и Марс весьма далеки от того строения, которое принял Гюйгенс: планета имеет компактное твердое притягивающее тело, окруженное рыхлой оболочкой. По величине сжатия можно судить о том, что к такой модели более подходят планеты гиганты.

Сжатия планет			
Название планеты	сжатие		
	по Ньютону	по Гюйгенсу	реальное
Земля	1:230	1:576	1:297
Марс	1:174	1:434	1:192
Юпитер	1:9,4	1:23,5	1:15
Сатурн	1:5,1	1:12,8	1:10
Уран	1:10,6	1:26,6	1:14

Приведенные данные взяты из книги акад. А.А. Михайлова "Курс гравиметрии и теории фигуры Земли", опубликованной в 1939 году. Современные данные могут несколько отличаться от приведенных выше, хотя общая картина не изменится.

### 15. 7. Гравитационные аномалии и строение Земли.

**Гравитационные аномалии.** Термин аномалии означает отклонения от некоторой "нормы" - то есть значения, которое можно предсказать, вычислив его по формуле. Вычисленное значение силы тяжести называют "нормальным", а наблюдаемое - аномальным. Если принять Землю равновесным эллипсоидом вращения, то значение силы тяжести можно вычислить по формуле (15.45), в которой постоянные нужно считать известными. Эти данные определяются из наблюдений и зависят от методики их вычислений, от объема и качества наблюдательных данных. Построение "нормальной" формулы для вычисления силы тяжести требует привлечения экспериментальных данных, полученных в разных странах, в разных экспедициях. В последние 3-4 десятилетия широко используются и спутниковые наблюдения, которые резко увеличили надежность результатов.

Для того чтобы карты гравитационных аномалий, полученных разными авторами, можно было сравнивать и анализировать, необходимо, чтобы гравитационные аномалии вычисляли по одинаковым методикам. По этой причине Международный Геофизический и Геодезический союз на своей Генеральной Ассамблее в августе 1971 года утвердил следующую формулу для нормальной силы тяжести:

$$\gamma = 978031,85(1 + 0,0053024\sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 \varphi) \quad (15.47)$$

В качестве "нормальной Земли" принят *общий земной эллипсоид* с параметрами:

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \pm 2 \text{ м}, \\ \omega &= 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}, \\ J_2 &= (1082,63 \pm 0.005) \cdot 10^{-8}, \\ GM &= (398600,5 \pm 0,3) \text{ км}^3 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Сжатие этого эллипсоида, определенное по спутниковым данным, равно  $\alpha = 1:298.256$ . Известно, что сила тяжести зависит от высоты точки наблюдения. Наблюдения производятся, в крайнем случае, на уровне моря, то есть на высоте, равной нулю. Все сухопутные определения силы тяжести выполняются на разных высотах. Так как поверхность эллипсоида не совпадает с поверхностью уровня, поэтому развита теория приведения гравитационной аномалии (редукции) к одной и той же поверхности. Кроме того, сила тяжести зависит и от масс, лежащих между эллипсоидом и геоидом. Чтобы учесть и эти факторы, развита теория геологических редукций. В таком случае вместе с гравитационными аномалиями обязательно должен указываться и вид редукций, с которыми данная аномалия вычислена. Существуют аномалии *в свободном воздухе*, аномалии *Фая*, аномалии *Буге*, изостатические аномалии и т. п.

**Изостазия.** Расчеты фигуры Земли, начиная с Ньютона, производились при условии, что Земля находится в состоянии гидростатического равновесия, что достаточно близко характеризует реальное состояние Земли. Отклонение поверхности геоида от поверхности сфероида как раз связано с некоторым отклонением реального состояния Земли от гидростатического равновесия. Спутниковые данные показали, что это отклонение имеет величину порядка квадрата сжатия ( $\alpha^2$ ). Отклонение фигуры Земли от равновесной составляет  $\alpha^2 \approx 70 \text{ м}$ .

В связи с тем гравитационное поле (и соответственно геопотенциал) состоит из слагаемых, существенно различающихся по величине, оно разделяется на нормальное

поле с потенциалом  $W_q$  и возмущенное (аномальное) с добавочным потенциалом  $T$ . Потенциал сфероида (1.14) определяет нормальное поле сил тяжести и, соответственно, нормальную фигуру Земли. Отклонения геоида от сфероида не превышают 70 м, с помощью спутниковых данных построены карты высот геоида (отклонений от сфероида).

Высоты геоида пропорциональны амplitудам гравитационных аномалий. Интересно то, что аномалии не связаны с топографическими особенностями поверхности (горы, впадины и т.п.), кстати, последние и не описываются поверхностью геоида. Из этого следует важнейший вывод: континентальные области изостатически скомпенсированы, т.е. материки как бы плавают в подкоровом субстрате, словно гигантские айсберги в полярных морях. Аномалии силы тяжести вызваны различными флуктуациями плотности в коре и мантии Земли.



Рис. 15-1. Изостатическое равновесие между корой и мантией.

Идея изостаии, высказанная в середине XIX века, объяснила тот удивительный факт, что наличие гор почти не сказывается на гравиметрических измерениях. Согласно принципу изостаии, легкая земная кора, состоящая из гранита и базальта, изостатически уравновешена на более тяжелой мантии, как показано на рис. 15-1.

Получается так, что масса вещества на единицу площади, измеренная вплоть до некоторой глубины в коре или мантии, приблизительно одинакова для всей поверхности Земли.

Гравитационные аномалии на Земле, как правило, меньше  $100 \text{ мГал}$ , их среднеквадратическая вариация по Земле составляет величину около  $20 \text{ мГал}$ . Следовательно, гравитационное поле Земли достаточно гладкое. Для экстремальных условий (островные дуги, глубоководные впадины) гравитационные аномалии достигают величины  $400 \text{ мГал}$ , что в 12,5 раз меньше разницы в значениях силы тяжести на полюсе и экваторе и составляют всего 0,04% от величины силы тяжести. Потому для получения данных, по которым можно судить о внутреннем строении нашей планеты, необходимо изучать аномалии на уровне не только миллигал но и микрогал, чего и добиваются геофизики.

Вторая характеристика гравитационного поля - это отклонение отвесной линии (вертикали) от нормали к эллипсоиду. Это отклонение также невелико и составляет секунды дуги. Геодезические работы в Индии близ горного массива Гималаев показали, что координаты астрономических пунктов из-за отклонений отвесной линии отличаются от геодезических на  $5,2''$ , тогда как вычисленное отклонение, связанное с притяжением гор, составляет  $27,9''$ . Для объяснения этого явления английский геодезист Пратт высказал мысль, что под горами плотность пород гораздо меньше, чем коренные породы под

равнинами. Иными словами, если все породы разбить на блоки, то плотность этих блоков должна зависеть от их толщины: чем толще блок, тем меньше плотность. При этом вес всех блоков на некоторой поверхности, называемой *поверхностью компенсации*, один и тот же. Вся земная кора, таким образом, находится в равновесии. Эта гипотеза Пратта получила название *изостатической*.

Конечно, с геологической точки зрения эта гипотеза никуда не годится. Французский геодезист Эри предложил более правдоподобную схему: земные блоки по Эри подобно айсбергам на море плавают на более плотной, но и более пластичной среде - верхней мантии. В этом случае, так же как и у айсбергов, должна образоваться под горными массивами "подводная часть" с плотностью, меньшей, чем плотность вмещающих пород. Таким образом эффект гравитационной компенсации должны создавать *корни гор*, существование которых сейсмологи подтверждают.

Строение земной коры невозможно изучить, пользуясь только одним методом. Геофизики применяют все доступные им методы, прежде всего сейсмологический и гравиметрический. По современным представлениям земная кора имеет разную толщину в разных регионах. В горах толщина ее достигает 60 и более километров. Состоит она из разных слоев. Большой объем занимает кислые (гранитные) породы с плотностью 2,67. Равнины покрыты осадочными породами толщиной несколько километров и с плотностью 2,2. Ниже этих слоев лежат основные породы - базальты с плотностью 2,8. Толщина коры для равнинных регионов полагают равной 30 км. Горные районы и равнины образуют основные морфологические особенности континентов. При переходе к океану, гранитный слой постепенно выклинивается, а осадочные породы покрывают на абиссальных котловинах, в основном, базальтовые породы. При этом толщина коры становится меньше и в среднем составляет 10-15 км. Особенно тонкой кора становится в глубоководных впадинах (4-5 км).

## 15. 8. Приливы.

***Приливообразующий потенциал.*** Всем хорошо известен морской прилив, когда два раза в сутки вода поднимается у морских берегов, затем вновь откатывается от берега. Но прилив существует не только на море, но и на суше. Два раза в сутки поверхность земли, на которой выстроены все дома, улицы, дороги, поднимаются и опускаются. В Москве амплитуда этих колебаний составляет приблизительно 0,5 м. Но мы этого не замечаем. Отчего это происходит?

Как известно, результатом действия силы на тело является либо его ускорение, если оно свободно и не взаимодействует с другими телами, либо его деформация, если такое взаимодействие существует. Притяжения Луны и Солнца нашей планеты сообщают ей ускорение, которое она имеет, совершая движение по орбите. Однако не все части планеты испытывают одинаковое притяжение. В качестве притягивающего тела возьмем пока только Луну. Максимальное притяжение Луной испытывают те части Земли, для которых она находится строго в зените, а минимальное - в надире. Центр масс Земли находится в промежуточном положении. Результирующая сила притяжения планеты приложена к центру масс. Она сообщает Земле поступательное ускорение. Для описания процессов в системе отсчета, связанной с Землей, то есть в неинерциальной системе координат, кроме упомянутых сил притяжения необходимо ввести силу инерции, равную массе какого-либо пробного тела умноженную на ускорение системы отсчета и направленную в сторону, противоположную ускорению системы отсчета.

Пренебрегая размером, строением и формой Луны, запишем удельную силу притяжения пробного тела, находящегося на Земле. Пусть  $r'$  - радиус-вектор, направленный от пробного тела в сторону Луны,  $r'^2$  - длина этого радиус-вектора, тогда сила притяжения этого тела Луной будет равна:

$$F = \frac{GM_L}{r'^3} r'. \quad (15.48)$$

Здесь  $GM_L$  - селеноцентрическая гравитационная постоянная. Пробное тело поместим в точку Р. Сила притяжения пробного тела помещенного в центр масс Земли будет равна:

$$F_0 = \frac{GM_L}{r^3}r, \quad (15.49)$$

где  $r$  соответственно радиус-вектор, соединяющий центры масс Земли и Луны, и его абсолютная величина. Тогда приливной силой называется разность этих двух сил притяжения:

$$F_{\text{пр}} = F - F_0. \quad (15.50)$$

В формулах (15.48) и (15.49) притягивающее тело (Луна) рассматривается как материальная точка или шар со сферически симметричным распределением масс.

Силовая функция притяжения пробного тела Луной ничем не отличается от силовой функции притяжения шара (материальной точки), то есть она равна  $GM_L/r'$ . Что касается второй силы, приложенной к центру масс и являющейся силой инерции для всех материальных точек Земли, то она строго постоянная. Для получения силовой функции для этой силы нам необходимо ввести временную систему координат. Ось  $Ox$  проведем из центра Земли и направим в сторону Луны. Направления двух других осей - произвольные. Тогда силовая функция для силы  $F_0$ , очевидно, равна  $(GM_L/r^2)x + Const$ .

Приливообразующий потенциал равен разности этих двух силовых функций. Обозначив его через  $\delta W$ , будем иметь:

$$\delta W = GM_L/r' - (GM_L/r^2)x - Const.$$

Постоянную  $Const$  определим при условии, что приливообразующий потенциал в центра Земли равен нулю. При этом  $x = 0$ ,  $r' = r$ . Поэтому  $Const = GM_L/r$ . Следовательно, для приливообразующего потенциала можно записать:

$$\delta W = GM_L \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \right). \quad (15.51)$$

Поскольку  $r' = \sqrt{(r-x)^2 + y^2 + z^2}$ , то  $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \left( \left(1 - \frac{x}{r}\right)^2 + \frac{y^2 + z^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Полагая отношения  $x/r$ ,  $y/r$ ,  $z/r$  малыми, последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{x}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2r^2} + \frac{3x^2}{2r^2} \right) = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{x}{r} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2} \right). \quad (15.52)$$

Подставим полученное выражение в (7.51), получим:

$$\delta W = GM_L \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2}. \quad (15.53)$$

Выражение для приливообразующего потенциала можно уточнить, если в (15.51) отношение  $1/r'$  заменить разложением в ряд по полиномам Лежандра, подобно тому, как мы делали при выводе гравитационного потенциала планеты. Пусть  $\rho$  - расстояние точки Р от центра планеты (от начала сферической системы координат), а  $\theta$  - геоцентрическое зенитное расстояние притягивающего тела (Луны), тогда:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\rho}{r} \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) \right).$$

Поскольку  $x = \rho \cos \theta$ , получим:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{x}{r^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \theta).$$

Поставляя полученное выражение в формулу для приливообразующего потенциала (15.51), окончательно получим:

$$\delta W = \frac{GM_L}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (15.53)$$

Остается определить приливообразующий потенциал на поверхности планеты. Поскольку на поверхности сферической планеты  $\rho = R$ , то:

$$\delta W = \frac{GM_L}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (15.54)$$

**Приливная деформация уровенной поверхности планеты.** Приливное возмущение потенциала неизбежно деформирует уровенную поверхность планеты. Выполним приближенную оценку этих искажений. Для простоты будем считать, что Земля шар со сферически симметрично распределенной массой. Тогда ее невозмущенный гравитационный потенциал на поверхности планеты имеет простой вид  $GM/R$ . Для точки  $P$ , находящейся на расстоянии  $\rho$  от центра сферы гравитационный потенциал Земли равен  $GM/\rho$ . Добавляя сюда приливной потенциал, получим возмущенную поверхность уровня:

$$W = \frac{GM}{\rho} + \frac{GM_L}{r} \frac{2x^2 + y^2 + z^2}{2r^2} = W_0.$$

В качестве константы мы возьмем невозмущенный гравитационный потенциал на поверхности. Тогда, после деления на гравитационную постоянную, получим:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{M_L}{M} \frac{2x^2 + y^2 + z^2}{2r^2} = \frac{1}{R}.$$

Здесь переменными величинами являются  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\rho$ . Обозначим отношение масс гравитирующего тела к массе планеты греческой буквой  $\mu$  и решим полученное выражение относительно  $\rho$ :

$$\rho = R \left( 1 - \mu \frac{R}{r} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2} \right)^{-1} \approx R \left( 1 + \mu \frac{R}{r} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2} \right).$$

Так как  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , с той же степенью точности получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \left( 1 + 2\mu \frac{R}{r} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2} \right).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\left( 1 - 2\mu \frac{R^3}{r^3} \right) x^2 + \left( 1 + \mu \frac{R^3}{r^3} \right) (y^2 + z^2) = R^2.$$

Учитывая, что отношения  $R/r$

$$\cos z = \frac{1}{r'} (r \cos \theta - R),$$

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta}.$$

- малые величины последнее выражение можно переписать так:

$$\frac{x^2}{R^2 \left( 1 + 2\mu \frac{R^3}{r^3} \right)} + \frac{y^2 + z^2}{\left( 1 - \mu \frac{R^3}{r^3} \right)} = 1.$$

Мы получили уравнение двухосного эллипсоида, у которого ось вращения совпадает с осью  $x$ , то есть с прямой, соединяющей притягивающее тело с центром Земли. Полуоси этого эллипсоида, очевидно, равны:

$$\begin{aligned} a &= \left( 1 + \mu R^3 / r^3 \right) R, \\ b = c &= \left( 1 - 1/2(\mu R^3) / r^3 \right) R. \end{aligned} \quad (15.55)$$

Итак, уровенная поверхность, заданная в виде шара, вследствие приливного действия другого небесного тела вытягивается в сторону этого тела и превращается в эллипсоид вращения. Большая полуось будет превышать радиус планеты на величину  $\Delta a = R\mu\left(\frac{R}{r}\right)^3$ ,

а малые полуоси будут меньше радиуса на величину  $\Delta b = \Delta c = \mu\frac{R}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3$ . Заметим, кстати,

что с той же степенью точности произведение всех трех полуосей остаются постоянными, что говорит о неизменности объема, ограниченного поверхностью уровня.

Для иллюстрации сказанного приведем численный пример. Вычислим приливной "горб" на Земле, вызванный притяжением Луны. Радиус Земли равен  $R = 6378$  км, расстояние между центрами Земли и Луны равно  $384.4 \cdot 10^3$  км, отношение масс Луна/Земля равно 1:81. Подставляя эти данные в формулу для увеличения большой полуоси, получим 0,36 м. Нетрудно подсчитать, что на Луне аналогичный приливной горб, направленный в сторону Земли будет равен 13 м.

Необходимо подчеркнуть, что в приведенных рассуждениях не учитывается приливные деформации самой Земли, что также изменит поверхность уровня. Для строгих выкладок необходимо задать модель Земли, ее строение, упругие постоянные и т.п., что, конечно, выходит далеко за рамки нашего курса.

**Преобразование формулы для приливообразующего потенциала.** Аргументом полиномов Лежандра является геоцентрическое зенитное расстояние притягивающего небесного тела  $\theta$ . Рассмотрим треугольник  $OPL$ . Сторона  $OP$ , как мы знаем, равна радиусу Земного шара  $R$  (если точка  $P$  находится на поверхности земного шара), сторона  $OL$  равна расстоянию между центрами масс притягивающего и притягиваемого тела  $r$ , угол между этими сторонами равен геоцентрическому зенитному расстоянию  $\theta$ , угол между сторонами  $PL$  и продолжением стороны  $OP$  равен зенитному расстоянию  $z$ . Проекция стороны  $OL$  на продолжение стороны  $OP$  равна  $r \cos \theta = r' \cos z + R$ . Отсюда:

$$\cos z = \frac{1}{r'}(r \cos \theta - R),$$

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta}.$$

Можно ли заменить геоцентрическое зенитное расстояние топоцентрическим, которое используется в астрономии? Какую ошибку мы сделаем, если заменим в формуле (15.55) угол  $\theta$  зенитным расстоянием  $z$ . Очевидно, что мы должны оценить величину  $|\cos z - \cos \theta| = \max$ .

Пусть отношение  $u = R/r$  является малой величиной, тогда:

$$\cos z = \frac{r}{r'}\left(\cos \theta - \frac{R}{r}\right) = \frac{\cos \theta - u}{\sqrt{1 - 2u \cos \theta + u^2}} \approx$$

$$\approx (\cos \theta - u)(1 + u \cos \theta) \approx \cos \theta - u(1 - \cos^2 \theta),$$

Следовательно,  $|\cos z - \cos \theta| \approx u \sin^2 \theta$ . Эта величина максимальна при  $\theta = \pi/2$ . Так если гравитирующее тело - Луна, то  $u = 6.371/384.4 = 0.0166$ . Следовательно, максимальное искажение зенитного расстояния в системе Земля-Луна не превосходит 1,7%. Для большинства задач этим отличием можно пренебречь и в качестве приливообразующего потенциала брать

$$\delta W = \frac{GM_L}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z). \quad (15.56)$$

Понятно, что наибольший вклад в приливные явления создает первый член формулы (15.56). Очень часто им и ограничиваются, хотя при строгом анализе приливных явлений приходится учитывать и остальные члены разложения (15.56).

Итак, приливообразующий потенциал с точностью до  $R^2/r^2$  имеет вид:

$$\delta W_2 = \frac{GM_L}{r} \frac{R^2}{2r^2} (3 \cos^2 z - 1). \quad (15.57)$$

Выполним некоторые преобразования полученной формулы и приведем к общепринятому виду. Поскольку  $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z)$ , то, подставляя это выражение в формулу (6.11)

после несложных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + n^2x &= n^2 \cos \omega t. \\ \delta W_2 &= \frac{3GM_L}{4r} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right). \end{aligned} \quad (15.58)$$

Величина  $D = \frac{3GM_L R^2}{4r^3}$  называется *постоянной Дудсона*. Теперь вместо (6.12) можно записать:

$$\delta W_2 = D \left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right). \quad (15.59)$$

Заметим, что так называемая *постоянная Дудсона* вовсе не является, постоянной величиной, так как расстояние между притягивающим и притягиваемым телами изменяются из-за того, что они движутся по орбитам, строго говоря, не эллиптическим, подчиняясь законам небесной механики. В книге бельгийского ученого П. Мельхиора известного специалиста по приливам приводятся численные значения постоянных Дудсона:

$$\begin{aligned} \text{для Луны} \quad D &= 3D \left( \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - \frac{1}{3}(\sin^2 \varphi + \sin^2 \delta) + \frac{1}{9} \right) = \\ &= 2,6206 \text{ м}^2/c_2, \\ \text{для Солнца} \quad D &= 1,2035 \text{ м}^2/c_2. \end{aligned}$$

**Типы приливных волн.** Все наблюдаемые приливные явления делятся на полусуточные, суточные и долгопериодические. Вернемся к формуле (15.59), в которой переменной величиной будем считать только зенитное расстояние. Известно, что

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H,$$

$$\cos 2z = 2 \cos^2 z - 1,$$

$$\cos^2 H = \frac{1}{2}(\cos 2H + 1),$$

где  $\varphi$  - широта места наблюдения,  $\delta$  - склонение светила,  $H$  - часовой угол, поэтому

$$\cos 2z = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta + 4 \sin \varphi \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \cos H + 2 \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos H - 1.$$

Подставляя полученное выражение в (15.59), будем иметь:

$$\begin{aligned} \delta W_2 &= D \left( \cos 2z + \frac{1}{3} \right) = D \left( 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta - \frac{2}{3} \right) + \\ &+ D \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H + D \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2H. \end{aligned}$$

Первая группа членов не зависит от часового угла. Здесь переменная величина только склонение, которое меняется медленно. Это долгопериодная часть приливообразующего потенциала. Второй член приведенной суммы имеет аргументом  $H$  - часовой угол, который меняется от 0 до  $2\pi$  за одни сутки. Следовательно, он формирует суточный прилив. Третий член с аргументом  $2H$ , как нетрудно догадаться - полусуточный.

**Долгопериодические приливы.** Будем помечать долгопериодическую компоненту приливного потенциала штрихом. Тогда

$$\begin{aligned}\delta W' &= D \left( 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta + \cos^2 \varphi \cos^2 \delta - \frac{2}{3} \right) = \\ &= D \left( 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta + (1 - \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 \delta) - \frac{2}{3} \right) = \\ &= D \left( 3 \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - (\sin^2 \varphi + \sin^2 \delta) + \frac{1}{3} \right) = \\ &= 3D \left( \sin^2 \varphi \sin^2 \delta - \frac{1}{3} (\sin^2 \varphi + \sin^2 \delta) + \frac{1}{9} \right).\end{aligned}$$

Окончательно

$$\delta W' = 3D \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right). \quad (15.60)$$

Этот прилив имеет период, равный половине периода обращения притягивающего светила за счет изменение склонения. Если это - лунный прилив, то период его две недели, если солнечный - полгода. Линия узлов (приливообразующий потенциал равен нулю) проходит по параллелям, для которых  $\sin^2 \varphi = 1/3$ , то есть  $\varphi = \pm 35^\circ 16'$ .

Долгопериодический прилив имеет зональную конфигурацию, он изменяет момент инерции Земли относительно оси вращения и, следовательно, изменяет и ее скорость вращения. Этот прилив можно наблюдать с помощью радиотелескопов со сверхдлинной базой, позволяющих обнаруживать ничтожно малые изменения в продолжительности суток.

**Суточные приливы.** Они определяются вторым членом в приливообразующем потенциале

$$\delta W'' = D \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H. \quad (15.61)$$

За одни сутки часовой угол  $H$  изменяется на  $2\pi$ , что и определяет периодичность этого члена потенциала. Небольшие отличия от суток вносит изменение склонения светила. У этого прилива линии узлов проходят по меридиану ( $H = \pm 12$  часов) и по экватору. Поверхность шара оказывается поделенной на четыре части, причем южное полушарие повторяет северное, но с другим знаком. Такую конфигурацию прилива мы относим к тессеральным. Этот прилив не изменяет момента инерции, и, следовательно, не меняет угловую скорость вращения Земли.

**Полусуточные приливы.** Третий тип приливов определяется членом

$$\delta W''' = D \cos^2 \varphi \cos \delta \cos H. \quad (15.62)$$

Изменение аргумента на  $2\pi$  достигается за 12 часов, что и сообщает этой части приливообразующего потенциала полусуточную периодичность. Линии узлов - два меридиана с часовыми углами  $H = 3$  часа и  $H = 9$  часов. Поверхность Земли оказывается снова рассеченной на четыре части, на четыре сектора. Отсюда и секториальная конфигурация полусуточного прилива.

Подъем урочной поверхности будет наблюдаться в секторе, обращенном в сторону притягивающего тела. В противоположном секторе - также подъем. В секторах, ориентированных под углом  $\pi/2$  - минимум.

Периоды приливообразующего потенциала, подсчитанные только по часовому углу, слишком упрощенный подход. Во-первых, мы рассматривали только одно притягивающее тело - Луну, хотя значительный вклад и земные приливы вносит и

Солнце. Приливы от Луны и Солнца, строго говоря, нельзя рассматривать как сумму приливов отдельно от Луны и от Солнца, так как сами формулы для вычисления потенциала нелинейные. Линейным образом этот потенциал зависит лишь от масс этих небесных тел, что же касается геометрии - то нелинейная зависимость очевидная. Приливную силу, действующую на планету, можно представить в виде суммы гармоник с аргументами, выражающиеся линейной комбинацией углов, которые можно представить в виде  $a\tau + bs + ch + dp + eN' + fps$ , где

- $\tau$  - среднее лунное время,
- $s$  - средняя долгота Луны,
- $h$  - средняя долгота Солнца,
- $p$  - долгота перигея Луны,
- $ps$  - долгота перигея Солнца.

Аргументным числом называется шестизначное число  $(a, b + 5, c + 5, d + 5, e + 5, f + 5)$ .

Приведем здесь перечень основных приливных волн (по П.Мельхиору "Земные приливы"):

волна	период	аргументное число	периодическая функция
$M_2$	12.25	(255.555)	$A \cos 2\tau$
$N_2$	12.39	(245.655)	$A \cos (2\tau - s + p)$
$O_1$	25.49	(145.555)	$A \cos (\tau - s)$
$K_1$	23.56	(165.555)	$A \cos (\tau + s)$
$M_f$	две недели	(075.555)	$A \cos 2s$
$M_m$	тропический месяц	(065.455)	$A \cos (s + p)$
$S_2$	12.00	(273.555)	$A \cos (2\tau + 2s - 2h)$
$P_1$	24.04	(163.555)	$A \cos (\tau + s - 2h)$

В приведенной таблице период указан в часах и минутах. Полусуточные приливы - это  $M_2$ ,  $N_2$  и  $S_2$ . Первые два связаны с Луной, третий -- с Солнцем. Суточные приливы это  $O_1$  (Луна),  $P_1$  и  $K_1$  (Солнце). Поскольку периоды приливных волн известны точно, так как движения небесных тел подчиняются законам небесной механики, то для исследования приливных волн применяют методы гармонического анализа. Представление приливных явлений гармониками введено еще известным геофизиком Дарвиным (1883). Изложенная выше классификация гармоник предложена Дудсоном. Им же, а затем и Леколазе предложены методы гармонического анализа. Среди российских ученых известен метод Перцева, который позволяет не только выделять отдельные гармоники, но и исключать дрейф в записи приливных волн.

**Наблюдения приливных явлений на Земле.** Наблюдаемые приливные явления на Земле:

- морские приливы,
- вариации высот земной поверхности,
- вариации силы тяжести,

- вариации отклонений отвесной линии,
- вариации угловой скорости вращения Земли,
- деформации земной коры,
- колебания уровня подземных вод.

Наблюдения за морскими приливами осложнены тем, что на высоту морского прилива влияют конфигурация берегов, температура и соленость воды, климатические условия. Учесть все эти факторы с необходимой точностью - очень сложная задача. Дж.Дарвин наблюдал долгопериодическую составляющую морского прилива и получил, что амплитуда приливной волны составляет всего 2/3 от расчетной.

Наблюдения вариаций высот земной поверхности также технически очень сложная задача.

Пусть точка  $P$  лежит на земной поверхности. Через эту точку проходит поверхность уровня  $W = C$ . Невозмущенная приливами поверхность уровня  $W_0 = C$  проходит через другую точку, назовем ее точкой  $Q$ . Вектор силы тяжести есть отношение приращения потенциала к расстоянию между точками  $P$  и  $Q$ . Для определенности будем считать, что точка  $P$  расположена выше точки  $Q$ , а расстояние между ними равно  $\zeta_0$ . Тогда  $g = -(W_0(P) - W_0(Q)) / \zeta_0$ .

Но  $W(P) = W_0(P) + \delta W(P)$ , поэтому  $g \zeta_0 = W_0(Q) - (W_0(P) - \delta W_0(P)) = \delta W(P) + (W_0(Q) - W(P))$ .

Выражение в скобках равно нулю, так как по условию и возмущенный потенциал в точке  $P$  и невозмущенный потенциал в точке  $Q$  равны одной и той же постоянной  $C$ .

Итак, приливная вариация высоты поверхности уровня для абсолютно твердой Земли определяется через приливообразующий потенциал следующим образом

$$\zeta_0 = \delta W / g. \quad (15.63)$$

Согласно (15.59) приливные колебания поверхности уровня можно вычислить по формуле:

$$\zeta_0 = \frac{D}{g} \left( \cos 2z + \frac{1}{3} \right). \quad (15.64)$$

Поверхность Земли, естественно, не повторяет движений поверхности уровня, хотя и "тянется" за ней. В первом приближении можно считать, что колебания поверхности Земли пропорциональны колебаниям поверхности уровня:

$$\zeta = h \zeta_0. \quad (15.65)$$

Таким образом, число  $h$  есть упругая постоянная, которая называется *первым числом Лява*.

При деформации Земли происходят перераспределение масс. При этом изменяется и собственный гравитационный потенциал планеты. Предполагая, что изменение потенциала пропорционально приливообразующему потенциалу, можно записать:

$$\delta W^* = k \delta W. \quad (15.66)$$

Постоянная  $k$  есть *второе число Лява*.

Если бы Земля была абсолютно твердой, то никаких деформаций бы не было и обе упругие постоянные Лява равнялись бы нулю. В действительности первое число приблизительно равно 0,5, а второе 0,2.

**Вариации силы тяжести.** Обратимся снова к формуле (15.58). Чтобы получить приливную вариацию силы тяжести нужно продифференцировать приливообразующий потенциал по радиусу Земли, а знак производной изменить на обратный, так как при увеличении силы тяжести растет компонента силы, направленная внутрь Земли.

$$\Delta g_0 = -\frac{\partial(\delta W)}{\partial R} = -\frac{\partial D}{\partial R} \left( \cos 2z + \frac{1}{3} \right) = -\frac{2D}{R} \left( \cos 2z + \frac{1}{3} \right). \quad (15.67)$$

В частности, лунный прилив создает вариацию силы тяжести

$$\Delta g_0 = -82(\cos 2z + 1/3) \text{ мкГал, а солнечный}$$

$$\Delta g_0 = -38(\cos 2z + 1/3) \text{ мкГал.}$$

Формула (15.67) дает возможность вычислить изменение силы тяжести только за счет приливообразующего потенциала, но не учитывает того факта, что высота прибора (гравиметра), с помощью которого измеряются вариации, также изменятся под действием тех же приливов. Известно. Что с увеличением высоты сила тяжести уменьшается, таким образом происходит усиление вариаций силы тяжести (приблизительно на 20%). Так, если приливная вариация силы тяжести для твердой Земли есть  $\Delta g_0$ , то истинной приливной вариацией будет:

$$\Delta g = \delta \Delta g_0, \quad (15.68)$$

где множитель  $\delta$  называется дельта фактором.

Дельта фактор постоянные Лява связаны между собой, в первом приближении, линейной зависимостью:

$$\delta = 1 + h - 3/2 k. \quad (15.69)$$

Как мы уже говорили, вариации силы тяжести измеряют специальным гравиметром, обладающим очень высокой чувствительностью. Такой гравиметр обычно не переносят из одной точки в другую. Он устанавливается стационарно на специальных станциях, где ведутся непрерывные наблюдения за приливами. В Московском университете такая станция имеется в ГАИШе в отделе гравитационных измерений. Гравиметр связан с компьютером, на котором выполняется графическое представление изменения силы тяжести.

Формула (15.69) выведена при условии, что приливная волна имеет очень большой период, то есть практически - это статический вариант, которого в действительности не бывает. Экспериментальные исследования показали, что упругие постоянные нельзя считать постоянными величинами: они зависят от периода волны. Зависимость дельта-фактора от периода приливной волны является очень сильным средством для тестирования принятой модели планеты.

**Отклонения отвесной линии.** Приливные силы изменяют не только величину силы тяжести, но ее направление, что отклоняет отвесную линию. Формулу для оценки отклонений отвесной линии получим, если продифференцируем изменение высоты уровенной поверхности по горизонтальной координате. Из формулы (15.54) следует, что угол отклонения отвесной линии в плоскости меридиана для абсолютно твердой Земли равен

$$\xi_0 = -\frac{\partial \xi_0}{\partial(Rz)} = -\frac{D}{Rg} \frac{\partial}{\partial z} \left( \cos 2z + \frac{1}{3} \right) = \frac{2D}{Rg} \sin 2z. \quad (15.70)$$

Согласно Мельхиору: для Луны  $\xi_0 = 0,0173'' \sin 2z$ , для Солнца  $\xi_0 = 0,0078'' \sin 2z$ .

Наблюдения за отвесной линией производят высокочувствительными горизонтальными маятниками на специальном подвесе, который позволяет усилить влияние ничтожно малых отклонений вертикали относительно жесткого основания. Применяют также и вертикальные маятники, которые помещают в скважины. Высокую чувствительность в этом случае обеспечивается специальными датчиками перемещений. Приборы, предназначенные для регистрации вариаций в направлении отвесной линии, носят название *наклономеров*. В любом случае непрерывно регистрируется вариации вертикали относительно опоры. Та, в свою очередь, также подвержена влиянию приливных сил, которые наклоняют опорную площадку. Если бы Земля была абсолютно жидкой, наклон ее поверхности совпал бы с поверхностью уровня, никакой прибор не сумел бы отметить отклонение отвесной линии. Для абсолютно твердой Земли отклонение отвесной линии

можно вычислить по формуле (15.70). Очевидно, что для реальной Земли это отклонение нужно вычислять с учетом упругости, то есть нужно снова ввести фактор

$$\xi = \gamma \xi_0. \quad (15.71)$$

Между гамма-фактором и числами Лява также имеется связь:

$$\gamma = 1 + k - h. \quad (15.72)$$

Однако гамма-фактор не является глобальной характеристикой планеты, а скорее отражает местные геологические особенности. В частности, в Японии делаются попытки использовать наблюдения за вариациями отклонений отвеса для предсказания землетрясений.

**Космогоническое значение исследования приливов.** Вклад приливных взаимодействий между спутником и планетой особенно отчетливо виден на примере системы Земля-Луна. Наш спутник обращен к нам всегда одной стороной, то есть его вращение вокруг оси строго синхронизировано с периодом обращения вокруг Земли. Почему?

Существует гипотеза о приливном торможении вращения Земли. Ее идея заключается в следующем. Земля является упругим телом и подобно линейному осциллятору на периодическое внешнее воздействие дает реакцию в виде перемещений масс и фазового запаздывания. Уравнение линейного осциллятора, как известно, имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + n^2x = n^2 \cos \omega t.$$

Периодическое решение этого уравнения имеет вид:  $x = \lambda \cos \omega(t - t_{\text{зап}})$ ,

$$\text{где } \lambda = \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{n^2} \right)^2 + \frac{4\varepsilon^2 \omega^2}{n^4} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t_{\text{зап}} = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{2\varepsilon\omega}{n^2 - \omega^2}.$$

При  $n = \omega$  имеем резонансное решение  $x_{\text{рез}} = Q \cos(nt - \pi/2)$ , где  $Q$  называется добротностью осциллятора. Для Земли добротность равна около 100 и с глубиной растет. Фазовые задержки (запаздывание) для полусуточного прилива составляет 3-4, что соответствует добротности  $Q = 15$ . Это противоречит сейсмическим данным, которые указывают на более высокую добротность. Возможно, дополнительная диссипация энергии происходит за счет морских приливов.

Фазовая задержка приводит к тому, что ближайший к Луне приливной горб Земли оказывается смещенным. Луна, притягивая этот приливной горб, сообщает Земле вращательный момент, тормозящий вращение. Однако, противоположный приливной горб, наоборот ускоряет вращение. Поскольку работает закон обратных квадратов, то второй горб дает меньший момент и сумма их, в целом, замедляет вращение Земли. Расчеты показывают, что замедление должно увеличивать продолжительность суток на 3,5 мс за столетие. В действительности сутки увеличиваются только на 2 мс за 100 лет. Следовательно, имеется и другой механизм потери энергии, скорее всего - это водная оболочка Земли.

Поскольку масса Земли существенно превосходит массу Луны, то приливное торможение Луны давно завершилось, и поэтому Луна всегда обращена на Землю одной стороной. Гравитационное влияние двух приливных горбов на Земле приводит к тому, что имеется составляющая приливной силы, направленная вдоль траектории движения Луны, которая сообщает ей дополнительную механическую энергию. Подчиняясь законам механики, Луна отдаляется от Земли со скоростью 3 см в год, двигаясь по спирали. Если предположить, что скорость "убегания" Луны от Земли за последние миллиарды лет сохранилась, то 1,5 млрд. лет Луна была в 10 раз ближе, а приливной эффект от нее в 1000 раз сильнее! Конечно, такие оценки слишком грубые, необходимо применять более строгую теорию эволюции системы Земля-Луна.

**Эффект Этвеша (ЭЭ)** - явление, заключающееся в том, что в одном и том же месте у предмета, находящегося в покое, и предмета, движущегося относительно Земли, ускорение силы тяжести имеет различные значения. ЭЭ обусловлен изменением центробежной составляющей силы тяжести, зависящей от скорости движения предмета. При движении в направлении вращения Земли, т. е. с запада на восток, скорость предмета складывается со скоростью вращения и центробежная сила увеличивается, а следовательно, уменьшается действующая сила тяжести; и, наоборот, — сила тяжести увеличивается при движении против вращения Земли. Величина ЭЭ (в Галах) равна

$$\Delta g = 0,00405V \cos \varphi \sin A + 0,00000121V^2,$$

где ( $\varphi$  - широта,  $A$  - азимут движения, отсчитываемый по часовой стрелке от направления на север,  $V$  — скорость предмета относительно Земли (в км/ч). ЭЭ учитывается при измерениях силы тяжести маятниковыми приборами и гравиметрами, установленными на движущихся кораблях и самолетах. Член с  $V^2$  является практически пренебрежимо малым только при скоростях движения  $V < 15$  км/ч. Эффект назван по имени Л. Этвеша, впервые указавшего на его существование и создавшего прибор для демонстрации ЭЭ в лабораторных условиях.

**Этвеш** - внесистемная единица градиента силы тяжести, равная изменению ускорения свободного падения на  $10^{-9}$  см/с<sup>2</sup> на расстоянии в 1 см, обозначается  $E$ .  $1E = 10^{-9}$  с<sup>-2</sup>, что соответствует изменению силы тяжести в 0,1 мГал на 1 км. Единица названа по имени Лоранда Этвеша.

## 15. 9. Гравиметры.

Гравиметры - приборы для измерения ускорения силы тяжести. Первые варианты конструкции гравиметров предложены Ломоносовым (1756) и английским астрономом Хершелем (Herschel, 1833). Прибор, годный для полевых измерений, впервые создал шведский геофизик Исинг (1918). Большинство современных гравиметров построено по схеме вертикального сейсмографа Голицина. Гравиметр - весьма чувствительный прибор. Его главной частью является грузик (масса), подвешенный на пружине. Изменения ускорения силы тяжести вызывают изменения веса грузика, соответственно пружина удлиняется либо поворачивается на некоторый угол. С помощью дополнительной пружины грузик выводится в исходное положение. Мерой изменения ускорения силы тяжести  $g$  служит изменение натяжения измерительной пружины. Чувствительная система современного гравиметра изготавливается из кварца или специального металлического сплава. Корпус гравиметра служит для предохранения чувствительной системы от механического, теплового и др. воздействия. Оптическая система и микрометр с высокой точностью фиксируют положение грузика и натяжение пружины. Наблюдения на одной точке занимают 4—5 мин. Сопоставляя показания гравиметра в смежных точках, определяют относительные приращения  $\Delta g$  вертикальной компоненты ускорения силы тяжести. Точность гравиметра позволяет определять  $\Delta g$  величиной до 0,01 мгл, т. е.  $10^{-8}$  полной величины  $g$ . Гравиметры используются в гравиразведке для изучения земной коры, поисков и разведки месторождений полезных ископаемых. Специальные геодезические гравиметры обладают широким диапазоном измерения  $g$ , для них характерно линейное изменение нуля-пункта в течение больших интервалов времени. Сильно демпфированные гравиметры применяются для измерений в движении на подводных и надводных кораблях. При съемке континентальных шельфов используются донные гравиметры, дистанционно управляемые с борта судна. Съёмка в движении на самолете находится в стадии успешной разработки.

**Типы гравиметров.** В практике гравиразведки применяются в основном статические гравиметры. Они основаны на компенсации силы тяжести силой упругости пружины или

силой кручения нити (рис. 15-2 а и б). Эти гравиметры служат лишь для относительных измерений ускорения силы тяжести. Абсолютное значение  $g_i$  в  $i$ -той точке получают, суммируя известное  $g_{исх}$  на исходной точке и измеренное приращение ускорения силы тяжести  $\Delta g_i$  между  $i$ -той и исходной точками.

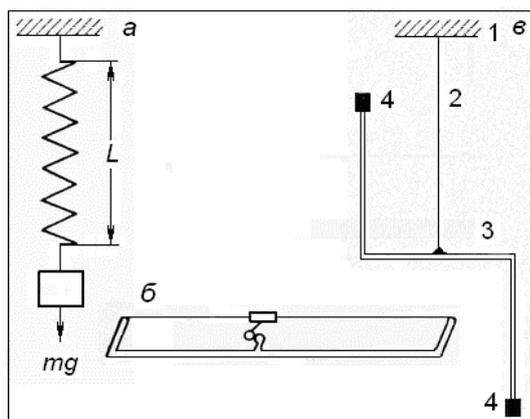


Рис. 15-2. Системы гравиметров: а – пружинная, б - крутильная, в - вариометр: 1 - корпус прибора, 2 - упругая нить, 3 - коромысло, 4 – грузики.

В гравиметрах 1-го рода мерой изменения ускорения силы тяжести служит изменение длины пружины, один конец которой закреплен, а к другому подвешен груз массой  $m$  (рис. 15-2-а). Равновесие в этом случае достигается при  $mg = \tau L$ , где  $L$  - длина пружины,  $\tau$  - коэффициент упругости пружины. Проведя измерения на опорной точке  $g_0$ , получим  $mg_0 = \tau L_0$ . Аналогично, в  $i$ -той точке будем иметь  $mg_i = \tau L_i$ . Тогда приращение силы тяжести между этими точками можно рассчитать по формуле  $\Delta g \approx \tau \Delta L / m$ .

Схема чувствительной системы гравиметра 2-го рода представлена на рис. 15-2-б. Здесь рычаг с грузиком крепится к горизонтальной упругой нити и под воздействием силы тяжести наклоняется, закручивая нить. С помощью измерительных пружин с микрометрическим винтом грузик выводится в горизонтальное положение. Переходя на другую точку, под воздействием приращения силы тяжести грузик отклоняется. Для вывода его в горизонтальное положение вновь необходимо использовать измерительную пружину, а на микрометрическом винте по специальной шкале взять отсчет  $\Delta n$ . Отсюда  $\Delta g = C \Delta n$ , где  $C$  - цена деления прибора, зависящая от его конструктивных особенностей.

Точность измерений с разными типами гравиметров на суше составляет 0,01 - 0,5 мГал, при измерениях на море и в воздухе точность достигает 1 мГал.

Для измерения вторых производных потенциала силы тяжести применяют вариометры и градиентометры. Гравитационные вариометры 1-го рода измеряют  $(W_{yy} - W_{xx})$ ,  $W_{xy}$  и 2-го рода -  $W_{xx}$ ,  $W_{yz}$ ,  $(W_{yy} - W_{xx})$ ,  $W_{xy}$ . Для измерения вертикального градиента силы тяжести используются наблюдения гравиметрами на двух высотах. Гравитационные горизонтальные градиентометры измеряют  $W_{xx}$ , и  $W_{yz}$ . Чувствительным элементом данных приборов являются крутильные весы, представляющие собой коромысло с двумя грузиками равной массы на концах, закрепленные на вертикальной нити. Один грузик располагают выше другого, вследствие чего крутильные весы имеют вид, показанный на рис. 15-2-в.

Неоднородности поля силы тяжести вызывают поворот коромысла на определенный угол, позволяющий судить об их величине. Для определения различных вторых производных гравитационного потенциала чувствительную систему устанавливают по нескольким (трем - пяти) азимутам. В градиентометрах отсчеты берутся визуально, а в вариометрах фиксируются на фотопластинках. Ограниченное применение данных приборов обусловлено громоздкостью установки и низкой производительностью.

В разных странах изготовлялись разные вариометры и градиентометры, в том числе цифровые.



Рис. 15-3. Общий вид гравиметров: ГАБЛ (слева) и CG-3 AutoGrav (справа).

**Гравиметр абсолютный баллистический лазерный типа ГАБЛ-Э** (разработка ИАЭ СО РАН) предназначен для измерения абсолютного значения и вариаций ускорения силы тяжести  $g$  при решении фундаментальных геофизических, геодезических и метрологических задач.

Принцип действия гравиметра ГАБЛ-Э основан на баллистическом методе измерения абсолютного значения ускорения силы тяжести  $g$ . Она определяется по результатам измерения пути и времени свободного падения оптического уголкового отражателя. Измерение пути, пройденного падающим телом, осуществляется лазерным интерферометром (мерой пути служит длина волны излучения лазера, стабилизированного по атомному реперу в спектре его излучения), а мерой интервалов времени являются сигналы прецизионного (например, рубидиевого) стандарта частоты. В серии лазерных гравиметров типа ГАБЛ используется несимметричный метод измерения ускорения свободного падения. Технические характеристики: Среднеквадратическая погрешность измерения - не более  $\pm 2$  мкГал. Систематическая погрешность - не более  $\pm 5$  мкГал.

**Гравиметр CG-3** (разработчик и изготовитель: фирма Scintrex, Канада) - микропроцессорный, автоматический гравиметр со множеством принципиально новых характеристик. CG-3 AutoGrav работает в диапазоне 8000 мГал, благодаря чему он может использоваться в любой точке мира без предустановок. Базовый CG-3 имеет выходную точность 5 мкГал при стандартной девиации  $< 10$  мкГал. Измеряющий микрогалы CG-3M имеет стандартную точность 1 мкГал при стандартной девиации  $< 5$  мкГал.

Чувствительная система CG-3 Autograv базируется на упругой конструкции из плавленного кварца. Гравитационная сила, приложенная к пробной массе,

уравновешивается пружиной и относительно маленькой электростатической силой. Присущая плавленому кварцу прочность и отличная упругость вместе с ограничителями движения пробной массы позволяют работать без арретира.

### 15. 10. Сила тяжести в прошлом.

**Изменение силы тяжести во времени.** Все, что окружает нас на поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести, она направлена вертикально вниз и воспринимается нами как вес. Сила тяжести пропорциональна массе тела. Коэффициент пропорциональности обозначается обычно через  $g$  и называется ускорением свободного падения. На поверхности Земли ускорение свободного падения приблизительно равно  $980 \text{ см/с}^2$  или 980 Гал (в честь Галилея). Сила притяжения уменьшается примерно на 0,3 мГал при подъеме тела на высоту в 1 метр относительно земной поверхности. Земля, как известно, вращается, поэтому на тело, находящееся на ее поверхности, кроме силы тяжести действует еще одна сила - центробежная. Эта сила максимальна на экваторе, где величина  $g$  уменьшается под ее влиянием на 3,4 Гала. На полюсах центробежная сила отсутствует.

Из закона всемирного тяготения вытекает, что:

$$g = GM/R^2,$$

где  $M$  - масса Земли,  $R$  - ее радиус,  $G$  - гравитационная постоянная. Коэффициент пропорциональности  $G$  необходим для согласования размерностей обеих частей равенства. Ньютон показал, что  $G$  величина постоянная и открытый им закон тяготения универсален. Общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна так же содержит  $G$  в качестве фундаментальной константы.

Гравитационный потенциал Земли можно выразить следующим образом:

$$\varphi = GM/R + G/R^3 \times [(A + B)/2 - C] (3/2 \cos 2\theta - S) + \Omega^2 R^2 / 2 \sin \theta. \quad (15.73)$$

Здесь:  $A$ ,  $B$  и  $C$  - моменты инерции Земли относительно ее основных осей, угол  $\theta$  - дополнение к широте,  $\Omega$  - частота вращения Земли.

Как следует из формулы (15.73), сила тяжести (гравитационный потенциал) на поверхности Земли может измениться со временем, если будут меняться: гравитационная постоянная, масса Земли или ее радиус, а так же скорость вращения. Рассмотрим возможные модели, в которых эти параметры могут изменять свои значения в течение времени эволюции Земли.

С точки зрения физики, наибольший интерес представляет идея об изменении величины гравитационной постоянной  $G$  высказанная Дираком (Dirac, 1938). Он обратил внимание на безразмерную постоянную  $e^2/4\pi G m_e m_p$ , которая по порядку величины равна  $10^{40}$ . Эта постоянная может быть получена следующим образом. Сила взаимодействия протона и электрона в атоме водорода обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:  $F_e = e^2/4\pi r^2$ . То же самое относится и к гравитационному взаимодействию:  $F_g = G m_e m_p / r^2$ . Если составить отношение сил электростатической и гравитационной, то получится постоянная Дирака. Он высказал предположение (гипотеза больших чисел), что такое большое число в природе не может быть случайным, и связал это число с возрастом Вселенной. По последним оценкам ее возраст ( $T$ ) составляет примерно 18 млрд. лет. Год - это искусственная единица времени. Дирак воспользовался атомной единицей времени, в которой за отсчет берется интервал времени, в течение которого свет проходит "сквозь" классический электрон  $e^2/4\pi m_e c^3$ . Возраст Вселенной в этих единицах оказывается равным  $\approx 10^{40}$ . Дирак предположил, что эти очень большие числа действительно равны, т.е.:

$$e^2/4\pi G m_e m_p \approx T. \quad (15.74)$$

В атомной системе единиц заряд электрона  $e$ , массы протона и электрона  $m_p$  и  $m_e$  постоянны, если возраст Вселенной  $T$  растет, значит должна изменяться гравитационная

постоянная ( $G \sim 1/T$ ). В соответствии с возрастом Вселенной за год это изменение должно составлять  $5 \times 10^{-11}$ .

П. Дирак обратил внимание еще на одну очень большую безразмерную величину - полную массу Вселенной, выраженную в массах протона (примерно  $10^{80}$ ). Согласно гипотезе больших чисел следует ожидать, что это число пропорционально возрасту Вселенной в квадрате ( $\sim T^2$ ). Это означает, что во Вселенной должно рождаться вещество, причем рождаться непрерывно. Дирак предположил два различных механизма этого явления. В первом из них новое вещество непрерывно рождается во всем пространстве Вселенной. Это, так называемое, - аддитивное рождение. Либо оно рождается рядом с уже существующим веществом, - это мультипликативное рождение. В предположении аддитивного рождения вещества масса Солнца  $M_{\odot}$  остается приблизительно постоянной величиной, следовательно  $(G \times M_{\odot}) \sim 1/T$ . Если имеет место мультипликативное рождение,  $M_{\odot} \sim T^2$ , т. е.  $(G \times M_{\odot}) \sim T$ .

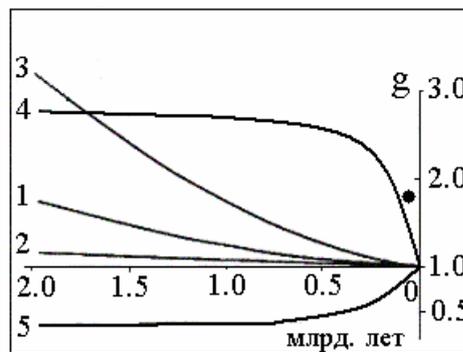


Рис. 15-4. Изменение силы тяжести во времени по различным моделям: 1 – Дике, 2 – термического расширения. 3 – Каппа, 4 – наша, 5 – Веселова и др. Точка – оценка Стюарта.

Идеи П. Дирака были развиты и обобщены В. Кануто, П. Джорданом, Р. Дике и др. Проводимые ими исследования в значительной степени касались изменения во времени величины земного радиуса и величины ускорения силы тяжести в зависимости от вариации гравитационной постоянной (см. рис. 15-4). Кануто (Canuto, 1981) предполагал возможность вариации величины  $G$ , при этом, он считал, что при вариациях земного радиуса происходит превращение части потенциальной гравитационной энергии в энергию электромагнитного поля (?). Дике (Dicke, 1962) показал, что нет принципиальной разницы между предположениями об изменении массы и изменении гравитационной постоянной. Можно предположить, что в постоянной Дирака изменяется со временем электрический заряд, однако, как было показано (Sabbata, 1980), это противоречит современным экспериментальным данным.

Общая теория относительности не удовлетворяет тезису Дирака, но может быть соответствующим образом обобщена, что было сделано сперва Джорданом (Jordan, 1979), а затем Брансом и Дике (Brans, Dicke, 1961). Из теории Джордана вытекает факт творения материи. Бранс и Дике, введя дополнительное к гравитационному скалярное поле, собственно связанное с изменением величины  $G$ , “обошли” эту трудность.

Идея “творения” материи, т.е. постоянный рост массы Земли в процессе ее эволюции, по всей видимости, принадлежит русскому, И.О. Ярковскому (1889) (Carey, 1976). Эта идея развивалась О. Хильгенбергом (Hilgenberg, 1933), поддерживалась С. Кэри (Carey, 1976) и, в большей степени, русскими: И.В. Кириловым, В.Ф. Блиновым (1984) и др. Отметим серию работ К.Е. Веселова и др. (1976, 1981, 1984, 1993), в которых авторы, для объяснения концепции глобального рифтогенеза, пытаются создать корпускулярную модель гравитационного поля. В ее основе лежит необоснованное предположение о наличии гипотетического “гравитационного вакуума”, в котором с огромной скоростью

носятся частицы (по всей видимости, гипотетические гравитоны). График поведения во времени величины  $g$ , следующий из “корпускулярной модели гравитации и инерции” Веселова, так же как и для других моделей, приведен на рис. 15-4.

Альтернативная всем предыдущим и поэтому стоящая несколько в стороне, гипотеза была высказана Каппом (Karr, 1960), предложившим идею, согласно которой масса Земли 2 млрд. лет тому назад была примерно в 30 раз больше современной, а ее радиус - в три раза больше. Капп считал, что в процессе эволюции Земли ее недра подвергались гравитационному коллапсу, в результате действия которого терялась ее масса (?). Этот процесс он называл buckling, что можно перевести как затягивание ремня пряжкой (другой, шуточный вариант, - жениться) (рис. 15-4). Эта идея перекликается с подходом развиваемым Холмсом (Holmes, 1965), согласно которому в процессе эволюции Земля подвергалась деструкции и уплотнению. Ее изначально “пустые” внутренние объемы сжимались, выбрасывая на поверхность Земли атмосферные газы и воду.

***Изменение гравитационного поля в прошлом.*** Менялось ли гравитационное поле Земли в процессе её эволюции? Ответить однозначно на этот вопрос нельзя и в наше время. Прошло четверть века с момента написания профессором университета в Рединге (Англия) А.Д. Стюартом (Stewart, 1970) обзора “Palaeogravity” на эту тему. Некоторые вопросы, затронутые им, были уточнены за прошедшие с той поры 25 - 30 лет, получены новые экспериментальные данные. Однако нельзя сказать, что в выяснении этого вопроса достигнут большой прогресс. Надо заметить, что тематика исследований, связанных с поведением гравитационного поля Земли в прошлом, не была эти годы особенно популярной. Новых работ появилось довольно мало. Тем не менее, несмотря на определенные успехи в области изучения стабильности во времени гравитационной постоянной и массы Земли, появляются статьи и книги, в которых авторами игнорируются экспериментально полученные данные по стабильности этих параметров. Стюартом были рассмотрены основные идеи, касающиеся физических моделей, в которых оказывается возможным изменение со временем величины силы тяжести на поверхности Земли. Здесь добавлены известные автору немногочисленные работы, в которых предпринималась попытка оценки величины  $g$  в прошлом (Stewart, 1972; Смирнов, Любина, 1969; Шмидт-Нильсон, 1976; Кренделев, 1977; Кузнецов, 1996). Основные результаты экспериментов по оценке степени стабильности массы и гравитационной постоянной заимствованы из статей (Flandren, 1975; Милуков, 1986; Shapiro et al., 1976).

***Системы чувствительные к изменению силы тяжести.*** Стюарт рассматривает несколько таких систем, которые можно разбить на три подгруппы: К первым отнесем системы, в которых изменение силы тяжести оказывает влияние на геодинамические процессы и явления. Стюарт рассматривает влияние релей-тейлоровской неустойчивости, возникающей при образовании осадочных пород в водной среде; подъем диапиров в мантии и мантийные конвективные системы. Ко второй подгруппе систем можно причислить: гравитационное сжатие глин, палеобарометрический метод и сжатие, и преобразование горных пород движущимися палеоледниками. Третья группа систем базируется на использовании чувствительности к величине силы тяжести биологических объектов, обитавших на Земле в прошлом: оценка размеров летающих животных, оценка относительного веса скелетов земных животных и глубины оставленных ими окаменевших следов.

Прежде чем подробнее рассмотреть эти и близкие к ним системы, обратим внимание на один существенный на наш взгляд момент. Стюарт рассматривал эти геологические данные с основной целью: использования их для оценки изменения величины  $G$  и выяснения степени правдоподобия теории Дирака. Стюарт полагал, что изменение  $g$  однозначно определяется уменьшением гравитационной постоянной. Как будет показано нами ниже, астрономические методы оценки стабильности  $G$  и  $M$  намного

точнее геологических, хотя и более дорогие, и сложные. Нас будут интересовать эти системы в основном с точки зрения возможности оценки не столько величины  $g$ , существовавшей на поверхности Земли в геологическом прошлом, сколько характера ее изменения. С помощью геологических методов достоверно оценить величину  $g$  в прошлом, по-видимому, невозможно, поэтому на первом этапе исследований было бы достаточным четко определить, была ли величина  $g$  в прошлом больше или меньше современной. Как будет ясно из последующего текста, мнения геологов на этот счет расходятся на диаметрально противоположные.

**Геодинамические системы.** Релей-тейлоровская неустойчивость возникает обычно в гидродинамической среде, если среда состоит из слоев вещества разной плотности, причем в силу каких-то обстоятельств в системе оказалось так, что плотность верхнего слоя выше, чем нижележащего. Такая ситуация может возникнуть в осадконакоплении в водной среде, когда например, слой тяжелого песка окажется на более легкой глине. Более тяжелый слой, находящийся на слое с меньшей плотностью деформирует пограничный слой в виде синусоидальной волны с длиной волны  $\lambda$  от долей сантиметра до нескольких метров. Слой осадков можно представить в виде ньютоновской жидкости с вязкостью  $\eta$ , которая подвергается растяжению. В нашей модели можно записать: волновое число  $k \sim (g/\eta^3)^{1/3}$ , и ускорение силы тяжести  $g \sim \lambda^{-3}$ . Предположим, что в древних осадочных породах наблюдается эффект образования синусоидальных волн, обязанный развитию релей-тейлоровской неустойчивости. Причем, «длина волн» неустойчивости была в древних породах меньше, чем в молодых. Это свидетельствовало бы в пользу уменьшения величины  $g$  в течение эволюции Земли.

Стюарт рассматривает механизм подъема соляных диапиров, как способ оценки величины  $g$ . Плотность соли обычно меньше чем плотность покрывающих ее пород. Если по каким-либо причинам образовался соляной купол высотой  $L$ , а толщина слоя покрывающих пород над вершиной купола  $T$ , то возникает выталкивающее давление:

$\Delta p = gL(\rho_2 - \rho_1)$ . Здесь  $\rho_2$  - плотность покрывающих пород,  $\rho_1$  - плотность соли ( $\rho_2 > \rho_1$ ).

Если вещество диапира обладает свойствами жидкости (т.е. вязкостью), то диапир будет подниматься под воздействием выталкивающего давления. Время подъема диапира (время "протыкания"  $t$ ) определяется такими параметрами как, вязкость его вещества:

$\mu$  ( $\mu = \nu \times \rho$ ), разность в плотностях  $\Delta\rho$ , величина  $L$  и ускорение силы тяжести  $g$ :

$$t = \mu / g L \rho.$$

Допустим, к примеру, что два диапира "протыкали" покрывающие их породы в геологически разные времена. Причем, такие их параметры как вязкость, плотность и начальная глубина  $T$  были одинаковы, а время "протыкания" более древнего диапира было меньше, чем у более молодого. Этот факт говорил бы в пользу того, что величина  $g$  со временем уменьшалась и наоборот.

В подтверждение "работоспособности" этой модели Стюарт приводит результат лабораторного эксперимента, в котором соляной "диапир" протыкал покрывающий его слой из асфальта толщиной в полтора сантиметра в течение 0,5 - 3 суток.

В конвективной модели мантии, предложенной Ранкорном в 1962 г., скорость конвекции вещества мантии  $V$  определялась плотностью вещества -  $\rho$ , коэффициентом объемного расширения -  $\beta$ , разностью температур на верхней и нижней плоскостях конвективной ячейки -  $\Delta T$ , толщиной ячейки -  $R$ , величиной вязкости вещества -  $\mu$  и ускорением силы тяжести -  $g$ :

$$g \rho \beta \Delta T = \mu V / R^2$$

Стюарт особо оговаривает такой немаловажный момент, касающийся вязкости. Он считает, что предположение о постоянстве вязкости может ввести в заблуждение. Тем не менее, опуская из рассмотрения ряд параметров, Стюарт обсуждает упрощенную формулу:

$$g = (k \times V) / \Delta T,$$

согласно которой сила тяжести связана со скоростью конвекции и разностью температур на конвективной ячейке. По ходу обсуждения проблемы, Стюарт делает глобальное обобщение: не является ли континентальный дрейф следствием изменения гравитационного поля Земли.

**Сжатие глин.** Сжатие глин давлением гравитации (весом вышележащих слоев) Стюарт считал идеальной системой для измерения величины силы тяжести в прошлом. Он разработал метод, хотя и не позволяющий определить точную величину палеогравитационного поля, но дающий возможность найти скорость уменьшения ускорения силы тяжести  $g$  со временем (Stewart, 1972). Стюарт полагал, что если величина  $g$  в прошлом была больше современной, то, вполне возможно, что некоторые тонкозернистые осадочные породы могли оказаться уплотненными в большей степени, чем это должно было бы произойти, если бы они уплотнялись под весом осадочного слоя существующего в настоящее время. Процесс уплотнения происходит относительно быстро и является практически необратимым, поэтому такие "свидетели" переуплотнения могли бы сохраниться.

Стюарт произвел измерения степени консолидации осадков в Лондонском бассейне. Он нашел, что глины в обнажениях этого бассейна консолидировались при более высоких давлениях, чем давления, соответствующие современной максимальной толщине перекрывающих осадков в Лондонском бассейне. Стюарт допускал, что здесь могли быть еще слои осадков, которые затем были размыты. Однако если консолидация глин произошла все же за счет большей величины силы тяжести в прошлом (у Стюарта - 26 млн. лет назад), то величина  $g$  не могла быть больше современной в два раза. Это означает, что максимальное уменьшение  $g$  за 26 млн. лет составляет  $4 \times 10^{-8}$  в год. Скорость уменьшения  $g$ , по нашей модели, примерно в 10 раз меньше (рис.15-4).

Суть палеобарометрического метода предложенного Стюартом для оценки величины  $g$  в прошлом состоит в определении градиента палеолитостатического давления:

$$g \sim (p_2 - p_1) / L(\rho/e),$$

где  $p_2$  и  $p_1$  - литостатические давления двух уровней,  $L$  - расстояние между уровнями  $\rho$  - их средняя плотность. Разность литостатических давлений можно определить, как считает Стюарт, минералогическими методами. Оценка  $g$  может быть сделана в том случае, если известна  $e$ . Точное определение величины  $e$  представляет очевидную трудность, что ставит применение предлагаемого метода непригодным в ряде случаев, например, в сейсмически активных районах, где величина  $e$  может изменяться со временем.

Способ оценки  $g$ , как результат сжатия горных пород древними ледниками и определение степени сжатия по глубине оставленных ледниками борозд, как мы отмечали, предлагал еще Холмс. Стюарт считал этот метод наиболее перспективным из всех трех обсуждаемых Холмсом. Аналогичный метод обосновал он сам. Стюарт считал возможным оценивать степень округлости валунов находящихся в осадочных слоях. Валуну изначально были раздроблены весомдвигающихся ледников, а затем, при движении их под давлением ледника в воде со скоростью  $v$ , они постепенно приобретали округлую форму. Сила "плавучести" валунов определяется формулой:

$$D = 4/3 \times \pi r^3 (\rho_1 - \rho_2) g,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  - плотности валунов и воды соответственно,  $r$  - их радиус. С другой стороны, эта сила уравнивается сопротивлением среды, которую можно выразить через скорость  $v$ :

$$D' = 1/2 \times C \pi r^2 \rho_2 v^2.$$

В результате, Стюарт получил зависимость скорости движения валунов от величины ускорения силы тяжести:  $v^2 = (8 r \Delta \rho g) / C \rho_2$  ( $C$  - константа). Для количественной оценки

необходимо получение природной информации о зависимости скорости  $v$  от  $g$  для различных типов глин, пород и размеров валунов.

Как выше отмечалось, Холмс считал метод оценки величины  $g$  по углам осадочных слоев совершенно непригодным. Подобные исследования были выполнены Смирновым и Любиной (1969), где авторы проанализировали информацию по углам наклонов косых серий в дюнах водной и эоловой природы и углам наклонов фронтальных откосов этих образований из отложений различного возраста (от раннего протерозоя по кайнозой). На довольно малой и непредставительной выборке авторы приходят к выводу, что с течением времени углы наклона косых серий изменяются и, по их мнению, скорее уменьшаются, чем возрастают и, что этот эффект связан с увеличением ускорения силы тяжести с течением времени. Правомерность этого вывода вызывает сомнение. С другим выводом авторов нельзя не согласиться, что "реконструкция  $g$  является важнейшей задачей науки о Земле" (Смирнов, Любиная, 1969, стр. 877).

**Палеонтологические данные.** Размер крыльев летающих животных и скорость движения крыльев, согласно Стюарту, находятся в соответствии с их весом и величиной силы тяжести:

$$m g = 1/2 \times (C S \rho v^2),$$

где  $C$  - безразмерный коэффициент,  $S$  - площадь поверхности крыльев,  $\rho$  - плотность воздуха,  $v$  - скорость движения крыла. Первое, что следует из этой формулы, это связь между ускорением силы тяжести и величинами  $S$  и  $m$ . Большая сила тяжести в прошлом у животных с одинаковой массой тела требовала больших размеров крыльев (при равной скорости их движения).

Для оценки энергетики (мощности) организма животного биологи вводит понятие интенсивность метаболизма ( $M$ ). Под этим имеется в виду превращение определенных веществ (белков, глюкозы и т.п.) внутри клеток с момента поступления веществ до образования конечного продукта. Интенсивность метаболизма измеряется в ккал/сутки и имеет смысл и размерность мощности. Эта характеристика для животных самых разных размеров (от крысы до быка) удивительно постоянно зависит от их веса, но заметно отклоняется от прямой зависимости от площади поверхности. Многочисленные исследования подтвердили, что наклон прямой в зависимости интенсивности метаболизма от веса составляет 0,734:  $M \sim (mg)^{0.734}$ , или:  $\approx (mg)^{3/4}$  (Шмидт-Нильсон, 1976). Зависимость:  $M \sim (mg)^{3/4}$  хорошо известна для животных, однако недавно аналогичная зависимость была получена и для растений (Гиляров, 1999). Под  $M$  здесь понимается величина, характеризующая интенсивность использования растениями ресурсов и их продуктивность.

Как показал Стюарт,  $M \sim L$  ( $L$  - линейный размер летающего животного, в частности, птицы). Поэтому, полагая очевидными пропорции:

$$M \sim L \sim (mg)^{3/4}; (mg)^{3/4} \sim (L g)^{3/4}$$

(если считать правомерной пропорцию:  $m \sim L$ , а не  $m \sim L^3$ , как в неживой природе);

$$L \sim (L g)^{3/4}; \text{ величина } L \text{ оказывается зависимой от } g: L \sim g^3.$$

Как это может показаться ни парадоксально, но с увеличением силы тяжести, должен возрастать размер животных. Ведь, казалось бы, что мелкому животному легче преодолеть большую величину силы тяжести, чем более крупному. Оказывается, что это ошибочное представление. Большие размеры животных (и растений) в прошлом, в этом случае, доказывают большую величину силы тяжести, чем ее современное значение.

Стюарт делает оценку величины  $g$  по относительному весу скелета животных. При этом он использует формулу Эйлера для оценки величины нагрузки на кость скелета ( $F$ ):

$$F = \pi^2 E \times I / L^2,$$

$E$  - модуль Юнга,  $I$  - момент инерции [ $I = (k \pi r^4)/4$ ],  $L$  - длина кости,  $r$  - ее радиус,  $k$  - константа. Подставляя, получаем:

$$F = \pi^3 k E / 4 \times (r^4 / L^2).$$

Полагая, что  $F$  должна быть: примерно равной  $mg$ , где  $m$  масса животного, зависимость ускорения силы тяжести имеет следующий вид:

$$mg \sim r^4 / L^2.$$

Масса скелета ( $m_c$ ), по всей видимости, пропорциональна:  $m_c \sim r^2 L$ , тогда величина  $g$ :

$$g \sim m^2 c / m L^4,$$

оказывается пропорциональной отношению массы скелета животного  $m_c$  к массе его тела (в квадрате) и обратно пропорциональной размеру животного (в кубе):

$$g \sim \alpha^2 / L^3, \quad \alpha = m_c / m, \quad L \sim m.$$

Рассмотрим в качестве примера, два животных с одинаковыми линейными размерами: современного слона и его предка – мастодонта. Они имели одинаковую массу, но отличались друг от друга массой скелета, причем, как следует из книги Шмидта-Нильсона (1976), скелет мастодонта более громоздкий, чем у слона. Это свидетельствует в пользу того, что сила тяжести раньше была больше чем теперь.

Сравним полученный нами результат ( $g \sim \alpha^2 / L^3$ , откуда следует,  $L \sim \alpha^{2/3} / g^{1/3}$ ), с прежней оценкой  $L$  ( $L \sim g^3$ , и  $H \sim 1/g$ ), тогда оказывается, что  $\alpha \sim g^5$ , т.е. должна наблюдаться очень сильная зависимость относительного веса скелета от величины силы тяжести. Трудно допустить, что такая зависимость реально имеет место в живой природе.

Ф.П. Кренделев (1977), анализируя изменение силы тяжести в геологическом прошлом Земли, приходит к аналогичному выводу: "Уменьшение сил гравитации (ослабление гравитационного поля) приводит к уменьшению веса скелета и наоборот" (стр. 156). Он приводит таблицу, в которой относительный вес скелета человека составляет 12%, а у рептилий 14%, что, казалось бы, должно подтверждать сказанное нами выше. Однако Кренделев делает совершенно противоположный вывод, "что гравитационное поле в истории Земли медленно возрастало с момента зарождения позвоночных до современной эпохи" (Кренделев, 1977, стр. 154).

Таблица

#	Метод	Параметр	Зависимость от $g$
1	Релей-тейлоровская неустойчивость	длина волны $\lambda$	$\sim \lambda^{-1}$
2	Подъем диапира	время $t$	$\sim t^{-1}$
3	Конвекция в мантии	скорость $v$	$\sim v$
4	Сжатие глин	время $t$	$\sim t^{-1}$
5	Палеобарометрический. метод	расст. между сл. $L$	$\sim L^{-1}$
6	Движение ледника	скорость $v$	$\sim v^{-2}$
7	Углы наклона	углы $\alpha$	$\sim \alpha$
8	Размер летающих животных	площадь крыльев $S$	$\sim S$
9	Метаболизм	размер $L$	$\sim L^{1/3}$
10	Относительная масса скелета	размер $L$	$\sim L^{1/3}$

Исследование глубины следов оставленных древними животными динозаврами так же дает некоторую информацию о величине силы тяжести в прошлом. Если удалось бы показать, что глубина окаменевших следов древних животных была больше чем таких же животных, обитавших на Земле в более поздние времена, то это свидетельствовало бы о том, что величина силы тяжести со временем убывает.

Стюарт считал, что Холмс первым (1947) предложил проводить целенаправленное изучение палеогравитационного поля. Холмс пытался в природе изменения величины  $g$  найти объяснение факту увеличения скорости седиментации и активизации земной коры начавшейся в кембрии. Он связывал изменение  $g$  с уменьшением величины  $G$  и вытекающие из этого превращения минералов при понижении давления в менее плотную форму. Наиболее вероятный механизм расширения, по мнению Холмса, это

конвективная циркуляция вещества в мантии. Холмс предложил три метода оценки величины  $g$ .

В первом, оценивалась глубина штрихов (борозд) под ледником, образующихся при его движении. Второй метод основывался на анализе количества фрагментов, выброшенных в геологическом прошлом из вулканов при их извержении. Третий метод оценки  $g$  основан на использовании информации об углах падения косой слоистости в осадках. Стюарт отдает предпочтение первому методу, считает весьма сомнительным второй и совершенно непригодным - третий.

### *Литература*

- Блинов В.Ф. Основные направления исследований расширяющейся Земли. В сб. Проблемы расширения и пульсаций Земли. М.: Наука. 1984. 191 с.
- Веселов К.Е. Гравитационное поле и геологическое развитие Земли. Советская геология. 1976. N. 5. С. 70-80.
- Веселов К.Е. Случайные совпадения или явления природы. Геофизический журнал. 1981. № 3. С. 50-61.
- Веселов К.Е., Долицкая Т.В. Формирование земной коры континентов с позиций гипотезы расширения Земли. В сб. Проблемы расширения и пульсаций Земли. М.: Наука. 1984. 191 с.
- Веселов К.Е., Карус Е.В., Савинский К.А., Долицкая Т.В. Физико-геологические основы концепции глобального рифтогенеза. М.: МГУ. 1993. 128 с.
- Гиляров А.М. Универсальные закономерности использования пространства животными и растениями. Природа. 1999. №2.
- Кренделев Ф.П. Изменение силы тяжести в геологическом прошлом Земли по результатам изучения химического состава костей позвоночных. Геология и геофизика. 1977. № 9. С. 154-157.
- Кузнецов В.В. Гравитационное поле Земли в геологическом прошлом. Геология и геофизика. 1996. Т. 37. № 10. С. 98-107.
- Милюков В.К. Изменяется ли гравитационная постоянная. Природа. 1978. № 6. С. 96-104.
- Смирнов Л.С., Любина Ю.Н. О возможности изучения изменения силы тяжести с геологическим временем. ДАН СССР. 1969. Т.187, № 4. С. 874-877.
- Шмидт-Нильсон К. Как работает организм животного М.: Мир. 1976. 140 с.
- Brans C., Dicke R.H. Mach's principle and relativistic theory of gravitation. Phys. Rev. 1961. V. 124. N. 3. P. 925-935.
- Carey S.W. The expanding Earth. Amsterdam: Elsevier. 1976. 488 p.
- Dicke R.H. Implication for cosmology of stellar and galactic evolution rates. Rev. Mod. Phys. 1962. V. 34. N. 1. P. 110-122.
- Dirac P.A.M. A new basis for cosmology. Proc. Roy. Soc. London A. 1938. V. 165. P. 199-206.
- Flandren T.C. Determination of rate of change of  $G$ . Month. Notic. Roy. Astron. Soc. 1975. V. 170. N 2. P. 333.
- Hilgenberg O. Vom wachsenden Erdball. B. 1933. 56 p.
- Holmes A. Trans. geol. Soc. Glasg. 1947. V. 21. P. 117-152.
- Holmes A. Principles of physical Geology. Nelson. London. 1965. 1260 p.
- Jordan T.H. The deep structure of the continents. Sci.Amer. 1979. V. 240. N 1. P.70-82.
- Kapp R.O. Towards a unified Cosmology. Hutchinson. London. 1960. 303 p.
- Shapiro I.I., Counselman C.C., King R. Verification of the principle of equivalence for massive bodies. Phys. Rev. Lett. 1976. V. 36. N. 11. 555-558.
- Stewart A.D. Palaeogravity in Palaeogeophysics (edit. by Rankorn, S.K) Academic Press, London. 1970.
- Stewart A.D. Palaeogravity from the compaction of fine-grained sediments. Nature 1972. V. 235. P. 322.